一入力高精度ディジタルレギュレータの基本構造と デッドビート LQ 最適制御の新解法*

近藤 英二^{*1}, 清田 高德^{*1}, 須永 照雄^{*1}

Fundamental Structure of Single-Input Accurate Digital Regulator and New Solution of Deadbeat Linear-Quadratic Optimal Control

Eiji KONDO, Takanori KIYOTA and Teruo SUNAGA

This paper discusses the regulator problem with the zero terminal state for a single-input linear time-invariant discrete-time system. First, for the general additive performance index, the fundamental structure of the accurate digital regulator which drives the state to zero within a finite time is obtained. This problem is divided into two sections; the new free terminal state problem in the former section, and the constant gain deadbeat control in the latter section. By using this fundamental structure, the new solution of the deadbeat LQ optimal control problem is obtained. Furthermore, the sufficiency of the optimal solution of the deadbeat LQ optimal control problem is shown by using the property of the linear-quadratic form.

Key Words: Automatic Control, Digital Regulator, Accuracy, Optimal Control, Linear-Quadratic

1. ま え が き

通常、有限時間最適レギュレータ問題は、終端状態が自由な条件のもとで解かれる。その理由は、終端状態が自由な有限時間 LQ 最適制御問題が、

(1) 最適制御が状態フィードバックで実現できる。

(2) 最適ゲインが初期状態に依存しない有界な時変ゲインとなる。

(3) 最適ゲインを求める明確なアルゴリズムが存在する。

などの特徴をもつためである。しかし、高精度レギュレータにおいては、有限の制御時間で状態を零にすることが望ましい。終端状態が零に固定される有限時間最適レギュレータ問題(以後、終端状態固定問題と呼ぶ)に対し、終端状態が自由な問題(以後、終端状態自由問題と呼ぶ)と同様な特徴をもつ状態フィードバックゲインを求めるための解法を一般的に求めることは難しい⁽¹⁾。ディジタル制御系では、自由終端状態の重みを無限大にする極限操作を用いることにより、簡単

な例題でしか解かれていない⁽²⁾。なお、ディジタル制御においては、有限の制御時間で終端状態を零にするデッドビート制御^{(3)~(5)}があるが、そこではゲインは一定とされる。しかし、一定ゲインでは終端状態固定問題の最適解を得ることはできない。著者ら⁽⁶⁾は、一入力ディジタル制御系に対し、零終端状態を満足する入力の一般形を用いて、二次形式評価関数を最小化する終端状態固定問題を解く手法を求めた。しかし、終端状態固定問題から直接導かれる二点境界値問題の解法は求められていない。また、一般の加法性評価関数に対し、終端状態固定問題の基本構造も明らかになっていない。

本論文では、一入力線形定常離散時間系に対する終端状態固定問題について述べる。まず、一般の加法性評価関数に対し、有限の制御時間で状態を零にする高精度ディジタルレギュレータが満足すべき基本構造を明らかにし、終端状態自由問題との比較を行う。次に、この基本構造を用いることにより、二次形式評価関数の場合の終端状態固定問題(以後、デッドビート LQ 最適制御⁽⁶⁾と呼ぶ)から直接導かれる二点境界値問題の新解法について述べる。さらに、二次形式評価関数の特徴を用いて、デッドビート LQ 最適制御の最適解の十分性を示す。

* 平成元年10月4日 第32回自動制御連合講演会において講演、原稿受付 平成2年6月28日。

*¹ 正員、九州大学工学部 (〒812 福岡市東区箱崎6-10-1)。

2. 高精度デジタルレギュレータ問題

制御対象として、次の可到達な一入力線形定常離散時間系を考える。

$$\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t) \quad \cdots \cdots \cdots (1)$$

ここで、 $\mathbf{x}(t)$ は $n \times 1$ 状態ベクトル、 $u(t)$ はスカラー入力、 $\mathbf{A}$ と $\mathbf{b}$ はそれぞれ $n \times n$ と $n \times 1$ の実定数行列とし、 t は零または正の整数とする。

このとき、終端時刻 $n+q$ (q は零または正の整数とする)⁽⁶⁾において終端状態が零になる条件

$$\mathbf{x}(n+q) = \mathbf{0} \quad \cdots \cdots \cdots (2)$$

のもとで、一般の加法性評価関数

$$\left. \begin{aligned} J(n+q) &= \sum_{t=0}^{n+q-1} h[\mathbf{x}(t), u(t)] \\ h[\mathbf{x}(t), u(t)] &> 0 \\ (\mathbf{x}(t) \neq \mathbf{0}, u(t) \neq 0 \text{ のとき}) \\ h(\mathbf{0}, 0) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \cdots \cdots \cdots (3)$$

を最小にする最適入力 $u^*(t)$ ($t=0, \dots, n+q-1$) を求める終端状態固定問題を考える。

3. 基本構造

この問題に、ラグランジュの未定乗数法を適用する。まず、 $n+q$ 個の $n \times 1$ 未定乗数ベクトル $\lambda(t)$ ($t=1, \dots, n+q$) を用いると、ラグランジュ関数 L は

$$\begin{aligned} L = J(n+q) + \sum_{t=0}^{n+q-1} \lambda'(t+1) [&\mathbf{A}\mathbf{x}(t) \\ &+ \mathbf{b}u(t) - \mathbf{x}(t+1)] \quad \cdots \cdots \cdots (4) \end{aligned}$$

となる。ここで、 $'$ は転置を表す。よって、式(1)と

$$\begin{aligned} \lambda(t) &= \mathbf{A}'\lambda(t+1) + \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}(t)} \\ (t=1, \dots, n+q-1) \quad \cdots \cdots \cdots (5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial h}{\partial u(t)} + \mathbf{b}'\lambda(t+1) \\ (t=0, \dots, n+q-1) \quad \cdots \cdots \cdots (6) \end{aligned}$$

なる二点境界値問題が得られる。ここで、境界条件は初期状態 $\mathbf{x}(0)$ と零終端状態式(2)である。なお、 h は式(3)の $h[\mathbf{x}(t), u(t)]$ を簡略化した表現であり、以後同様とする。このとき、次の関係が成立する。

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t)'\lambda(t) - \mathbf{x}(t+1)'\lambda(t+1) \\ = \mathbf{x}(t)'\frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}(t)} + u(t)\frac{\partial h}{\partial u(t)} \quad \cdots \cdots \cdots (7) \end{aligned}$$

この二点境界値問題は、時刻 $t=q$ の前後で性質が異なるので二つの区間に分割して考えるが、二つの区間を接続するための条件が重要となる。

3.1 $t=q, \dots, n+q-1$ のとき この区間を、デッドビート区間と呼び、次の一連の変換をデッドビー

ト変換と呼ぶ。簡単のため

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{W} &= [\mathbf{b} \ \mathbf{A}\mathbf{b} \ \cdots \ \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}] \\ \mathbf{W}_i &= [\mathbf{b} \ \mathbf{A}\mathbf{b} \ \cdots \ \mathbf{A}^{i-1}\mathbf{b}] \quad (i=1, \dots, n-1) \\ \mathbf{V}_i &= [\mathbf{0} \ \mathbf{W}_i], \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} u(n+q-1) \\ \vdots \\ u(q) \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad \cdots \cdots \cdots (8)$$

とおく。ここで、 $\mathbf{W}$ は $n \times n$ 可到達性行列、 $\mathbf{W}_i$ は $n \times i$ 行列、 $\mathbf{V}_i$ は $n \times n$ 行列、 $\mathbf{U}$ は $n \times 1$ ベクトルであり、 $\mathbf{V}_0 = \mathbf{0}$ 、 $\mathbf{V}_n = \mathbf{W}$ とする。式(1)より、 $i=0, \dots, n$ のとき、 $\mathbf{x}(q+i)$ は

$$\mathbf{x}(q+i) = \mathbf{A}^i\mathbf{x}(q) + \mathbf{V}_i\mathbf{U} \quad \cdots \cdots \cdots (9)$$

となる。よって、可到達性の条件より $\mathbf{W}(=\mathbf{V}_n)$ は正則であるから、 $i=n$ とおくと零終端状態式(2)より求まる方程式

$$\mathbf{A}^n\mathbf{x}(q) + \mathbf{W}\mathbf{U} = \mathbf{0} \quad \cdots \cdots \cdots (10)$$

は、任意の $\mathbf{x}(q)$ に対し一意的な解 $\hat{\mathbf{U}}$ をもち、

$$\hat{\mathbf{U}} = -\mathbf{W}^{-1}\mathbf{A}^n\mathbf{x}(q) \quad \cdots \cdots \cdots (11)$$

となる。式(11)より、第 i 成分のみが 1 で他は零なる $1 \times n$ 単位ベクトルを $\mathbf{e}_i$ とおくと、 $t=q, \dots, n+q-1$ に対して

$$\hat{u}(t) = -\mathbf{e}_{n-t+q}\mathbf{W}^{-1}\mathbf{A}^n\mathbf{x}(q) \quad \cdots \cdots \cdots (12)$$

$$\mathbf{x}(t) = (\mathbf{A}^{t-q} - \mathbf{V}_{t-q}\mathbf{W}^{-1}\mathbf{A}^n)\mathbf{x}(q) \quad \cdots \cdots \cdots (13)$$

となる。一方、式(11)を一意的に定まる一定ゲインの状態フィードバックで表すと、 $t=q, \dots, n+q-1$ に対して

$$\hat{u}(t) = \mathbf{k}^*\mathbf{x}(t) \quad \cdots \cdots \cdots (14)$$

$$\mathbf{k}^* = -[\mathbf{0} \ \cdots \ \mathbf{0} \ 1]\mathbf{W}^{-1}\mathbf{A}^n \quad \cdots \cdots \cdots (15)$$

となることが知られている⁽⁷⁾。式(14)より、

$$\hat{u}(t) = \mathbf{k}^*(\mathbf{A} + \mathbf{b}\mathbf{k}^*)^{t-q}\mathbf{x}(q) \quad \cdots \cdots \cdots (16)$$

$$\mathbf{x}(t) = (\mathbf{A} + \mathbf{b}\mathbf{k}^*)^{t-q}\mathbf{x}(q) \quad \cdots \cdots \cdots (17)$$

となる。すなわち、デッドビート区間の最適フィードバックゲインはデッドビート制御のゲインと一致し、評価関数に依存しない。しかし、中間状態 $\mathbf{x}(q)$ はそれ以前にどのような入力がかわったかにより変化するので、この区間の最適入力 $u^*(t)$ は評価関数に依存する。

3.2 中間条件 $\lambda(q)$ ここでは、分割した二つの区間の接続関係を示す中間条件 $\lambda(q)$ を求める。式(7)の左辺の q から $n+q-1$ までの総和は、式(2)より

$$\begin{aligned} \sum_{t=q}^{n+q-1} [\mathbf{x}(t)'\lambda(t) - \mathbf{x}(t+1)'\lambda(t+1)] \\ = \mathbf{x}(q)'\lambda(q) \quad \cdots \cdots \cdots (18) \end{aligned}$$

となる。一方、対応する式(7)の右辺の総和は次のようになる。

[1] 式(11)を用いる場合

$$\begin{aligned} & \sum_{t=q}^{n+q-1} \left[\mathbf{x}(t)' \frac{\partial \hat{h}}{\partial \mathbf{x}(t)} + \bar{\mathbf{u}}(t)' \frac{\partial \hat{h}}{\partial \bar{\mathbf{u}}(t)} \right] \\ &= \mathbf{x}(q)' \sum_{t=q}^{n+q-1} \left[(\mathbf{A}^{t-q} - \mathbf{V}_{t-q} \mathbf{W}^{-1} \mathbf{A}^n)' \frac{\partial \hat{h}}{\partial \mathbf{x}(t)} \right. \\ & \quad \left. - (\mathbf{e}_{n-t+q} \mathbf{W}^{-1} \mathbf{A}^n)' \frac{\partial \hat{h}}{\partial \bar{\mathbf{u}}(t)} \right] \dots\dots\dots (19) \end{aligned}$$

[2] 式(14)を用いる場合

$$\begin{aligned} & \sum_{t=q}^{n+q-1} \left[\mathbf{x}(t)' \frac{\partial \hat{h}}{\partial \mathbf{x}(t)} + \bar{\mathbf{u}}(t)' \frac{\partial \hat{h}}{\partial \bar{\mathbf{u}}(t)} \right] \\ &= \mathbf{x}(q)' \sum_{t=q}^{n+q-1} \left[\{(\mathbf{A} + \mathbf{b}\mathbf{k}^*)^{t-q}\}' \frac{\partial \hat{h}}{\partial \mathbf{x}(t)} \right. \\ & \quad \left. + \{(\mathbf{A} + \mathbf{b}\mathbf{k}^*)^{t-q}\}' (\mathbf{k}^*)' \frac{\partial \hat{h}}{\partial \bar{\mathbf{u}}(t)} \right] \dots\dots\dots (20) \end{aligned}$$

ここで、 $\hat{h}$ は $h[\mathbf{x}(t), \bar{\mathbf{u}}(t)]$ を簡略化した表現であり、以後同様とする。

よって、任意の $\mathbf{x}(q)$ に対し、中間条件 $\lambda(q)$ は、式(11)を用いる場合は

$$\begin{aligned} \lambda(q) &= \sum_{t=q}^{n+q-1} \left[(\mathbf{A}^{t-q} - \mathbf{V}_{t-q} \mathbf{W}^{-1} \mathbf{A}^n)' \frac{\partial \hat{h}}{\partial \mathbf{x}(t)} \right. \\ & \quad \left. - (\mathbf{e}_{n-t+q} \mathbf{W}^{-1} \mathbf{A}^n)' \frac{\partial \hat{h}}{\partial \bar{\mathbf{u}}(t)} \right] \dots\dots\dots (21) \end{aligned}$$

となり、式(14)を用いる場合は

$$\begin{aligned} \lambda(q) &= \sum_{t=q}^{n+q-1} \{(\mathbf{A} + \mathbf{b}\mathbf{k}^*)^{t-q}\}' \\ & \quad \cdot \left[\frac{\partial \hat{h}}{\partial \mathbf{x}(t)} + (\mathbf{k}^*)' \frac{\partial \hat{h}}{\partial \bar{\mathbf{u}}(t)} \right] \dots\dots\dots (22) \end{aligned}$$

となる。式(13)と式(17)が同一の式であることより、式(21)と式(22)が同一の条件であることは明らかである。

なお、この方法は二点境界値問題を直接解いた場合であるが、零終端状態を満足する入力的一般形⁽⁶⁾を用いて元の終端状態固定問題を変換し、新しい終端状態 $\mathbf{x}(q)$ が自由な問題を求めると、

$$J(n+q) = J_1(n+q) + H[\mathbf{x}(q)] \dots\dots\dots (23)$$

$$J_1(n+q) = \sum_{t=0}^{q-1} h[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)] \dots\dots\dots (24)$$

$$H[\mathbf{x}(q)] = \sum_{i=0}^{n-1} h[\mathbf{x}(q+i), \bar{\mathbf{u}}(q+i)] \dots\dots\dots (25)$$

において式(23)を最小化する問題となる。この新しい問題に前と同様にラグランジュの未定乗数法を適用すると、

$$\begin{aligned} \lambda(q) &= \frac{\partial H[\mathbf{x}(q)]}{\partial \mathbf{x}(q)} \\ &= \sum_{t=q}^{n+q-1} \{(\mathbf{A} + \mathbf{b}\mathbf{k}^*)^{t-q}\}' \\ & \quad \cdot \left[\frac{\partial \hat{h}}{\partial \mathbf{x}(t)} + (\mathbf{k}^*)' \frac{\partial \hat{h}}{\partial \bar{\mathbf{u}}(t)} \right] \dots\dots\dots (26) \end{aligned}$$

となり、式(22)と一致する。

3・3 $t=0, \dots, q-1$ のとき この区間を、評価依

存区間と呼ぶ。3・2節の中間条件が評価依存区間の境界条件となる。すなわち、 $t=0, \dots, q-1$ において式(1)と

$$\begin{aligned} \lambda(t) &= \mathbf{A}' \lambda(t+1) + \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}(t)} \quad (t=1, \dots, q-1) \\ &\dots\dots\dots (27) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial h}{\partial \mathbf{u}(t)} + \mathbf{b}' \lambda(t+1) \quad (t=0, \dots, q-1) \\ &\dots\dots\dots (28) \end{aligned}$$

の二点境界値問題を、初期状態 $\mathbf{x}(0)$ と新しい終端条件 $\lambda(q)$ のもとで解く終端状態自由問題となる。なお、零終端状態を満足する入力の一般形⁽⁶⁾を用いても同じ二点境界値問題が得られる。

すなわち、デジタル制御系において終端状態固定問題は二つの区間に分割され、前半は終端状態自由問題、後半はデッドビート制御となり、その中間条件が重要となる。

以上の議論より、一般の加法性評価関数に対する終端状態固定問題の基本構造が明らかになった。そこで、終端状態自由問題との比較を行う。なお、比較を明確にするために、終端時刻を τ 、加法性評価関数を

$$J(\tau) = \sum_{t=0}^{\tau-1} h[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)] \dots\dots\dots (29)$$

とする。また、終端状態固定問題の最適解や最適評価には*印を付け、終端状態自由問題の最適解や最適評価には**印を付ける。

(a) 終端時刻は、終端状態自由問題では任意の整数となり、終端状態固定問題では n 以上の整数となる。

(b) 終端状態自由問題に式(2)の制約条件を付加すると終端状態固定問題になるので、終端状態固定問題の実行可能解は終端状態自由問題の実行可能解に含まれる。よって、最適化問題の一般的性質より、最適評価の間には、同一の有限な $\tau (\geq n)$ に対して次の関係式が成立する。

$$J^*(\tau) \geq J^{**}(\tau) \dots\dots\dots (30)$$

(c) 終端状態固定問題および終端状態自由問題の終端時刻 τ と $\tau+1$ における最適評価の間には、それぞれ次の関係式が成立する。

$$J^*(\tau) \geq J^*(\tau+1) \dots\dots\dots (31)$$

$$J^{**}(\tau) \leq J^{**}(\tau+1) \dots\dots\dots (32)$$

終端状態固定問題(式(31)の場合)では、原点 $\mathbf{0}$ は平衡点であるから、終端時刻 τ における最適解に入力 $\mathbf{u}(\tau)=0$ を加えたものが、終端時刻 $\tau+1$ において $\mathbf{x}(\tau+1)=\mathbf{0}$ を満足する実行可能解になっていることにより明らかである。次に、終端状態自由問題について述べる。終端時刻における違いを明確にするために、

終端時刻が τ のときの最適状態を $\mathbf{x}^{**}(t)$, 最適入力を $\mathbf{u}^{**}(t)$ とすると,

$$\begin{aligned} J^{**}(\tau+1) &= \sum_{t=0}^{\tau-1} h[\mathbf{x}_{t+1}^{**}(t), \mathbf{u}_{t+1}^{**}(t)] \\ &\quad + h[\mathbf{x}_{\tau+1}^{**}(\tau), \mathbf{u}_{\tau+1}^{**}(\tau)] \\ &\geq \sum_{t=0}^{\tau-1} h[\mathbf{x}_{t+1}^{*}(t), \mathbf{u}_{t+1}^{*}(t)] \\ &\geq \sum_{t=0}^{\tau-1} h[\mathbf{x}_{t+1}^{**}(t), \mathbf{u}_{t+1}^{**}(t)] \\ &= J^{**}(\tau) \dots\dots\dots (33) \end{aligned}$$

となり, 終端状態自由問題に対して式(32)が導かれる。すなわち, 終端時刻 τ と $\tau+1$ での最適評価の大小関係は, 終端状態固定問題と終端状態自由問題では逆の関係になる。

(d) (b), (c) より, $\tau \rightarrow \infty$ のとき, 最適評価 $J^*(\tau)$ と $J^{**}(\tau)$ はともに収束する。よって, 式(3)より, $\mathbf{x}^{**}(\tau) \rightarrow 0$, $\mathbf{u}^{**}(\tau) \rightarrow 0$ となり, 式(2)の制約条件は終端状態自由問題においても自動的に満足されるから, 二つの問題は一致し,

$$J^*(\infty) = J^{**}(\infty) \dots\dots\dots (34)$$

となる。

なお, これ以上の式の展開を行うためには評価関数を具体的に決めなければならないので, 次章では二次形式評価関数について述べる。

4. デッドビート LQ 最適制御の新解法

すでに, デッドビート LQ 最適制御(二次形式評価関数を最小化する終端状態固定問題)は, 零終端状態を満足する入力の一般形を用いることにより解かれている⁽⁶⁾。本章では, この問題の新解法として, 3章の基本構造を用いて終端状態固定問題から直接導かれる二点境界値問題の解法について述べる。すなわち, 式(3)において

$$h[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)] = \frac{1}{2} [\mathbf{x}(t)' \mathbf{Q} \mathbf{x}(t) + r u(t)^2] \dots\dots\dots (35)$$

なる二次形式評価関数を考える。ここで, $\mathbf{Q}$ は $n \times n$ 半正定対称行列, r は正の実数とする。

この問題にラグランジュの未定乗数法を適用すると, 式(1)と

$$\lambda(t) = \mathbf{A}' \lambda(t+1) + \mathbf{Q} \mathbf{x}(t) \quad (t=1, \dots, n+q-1) \dots\dots\dots (36)$$

$$\mathbf{u}(t) = -\frac{1}{r} \mathbf{b}' \lambda(t+1) \quad (t=0, \dots, n+q-1) \dots\dots\dots (37)$$

なる二点境界値問題が得られる。ここで, 境界条件は初期状態 $\mathbf{x}(0)$ と零終端状態式(2)である。

4・1 $t=q, \dots, n+q-1$ のとき 3.1 節より, この区間の最適入力は

$$\mathbf{u}^*(t) = \mathbf{k}^* \mathbf{x}(t) \dots\dots\dots (38)$$

となる。ここで, $\mathbf{k}^*$ は式(15)で与えられ, 評価関数に依存しないデッドビート制御のゲインとなる。

4・2 中間条件 $\lambda(q)$ 式(21)あるいは式(22)より, 中間条件は

$$\lambda(q) = \mathbf{P}(q) \mathbf{x}(q) \dots\dots\dots (39)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(q) &= \sum_{i=0}^{n-1} [\{ (\mathbf{A} + \mathbf{b} \mathbf{k}^*)^i \}' \{ \mathbf{Q} + r (\mathbf{k}^*)' \mathbf{k}^* \} \\ &\quad \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{b} \mathbf{k}^*)^i \}] \dots\dots\dots (40) \end{aligned}$$

あるいは

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(q) &= \sum_{i=0}^{n-1} (\mathbf{A}^i - \mathbf{V}_i \mathbf{W}^{-1} \mathbf{A}^n)' \mathbf{Q} (\mathbf{A}^i - \mathbf{V}_i \mathbf{W}^{-1} \mathbf{A}^n) \\ &\quad + (\mathbf{A}^n)' (\mathbf{W}^{-1})' r \mathbf{W}^{-1} \mathbf{A}^n \dots\dots\dots (41) \end{aligned}$$

と表現できる。明らかに, 式(40)と式(41)は同一であり, $\mathbf{P}(q)$ は半正定対称行列となる。

4・3 $t=0, \dots, q-1$ のとき この評価依存区間を, 特にリカッチ区間と呼ぶ。式(39), (40) (あるいは式(41))の中間条件がリカッチ区間の境界条件となる。よって,

$$\lambda(t) = \mathbf{P}(t) \mathbf{x}(t) \dots\dots\dots (42)$$

なるリカッチ変換を行って, リカッチ区間の二点境界値問題を解くことができる。すなわち, リカッチ方程式

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(t) &= \mathbf{Q} + \mathbf{A}' \mathbf{P}(t+1) \mathbf{A} \\ &\quad - \frac{\mathbf{A}' \mathbf{P}(t+1) \mathbf{b} \mathbf{b}' \mathbf{P}(t+1) \mathbf{A}}{r + \mathbf{b}' \mathbf{P}(t+1) \mathbf{b}} \dots\dots\dots (43) \end{aligned}$$

の半正定対称解 $\mathbf{P}(t)$ を用いると, この区間の最適入力は

$$\mathbf{u}^*(t) = \mathbf{f}^*(t) \mathbf{x}(t) \dots\dots\dots (44)$$

$$\mathbf{f}^*(t) = -\frac{\mathbf{b}' \mathbf{P}(t+1) \mathbf{A}}{r + \mathbf{b}' \mathbf{P}(t+1) \mathbf{b}} \dots\dots\dots (45)$$

となる。

明らかに, 本解法による最適入力は, 文献(6)で示した解法による最適入力と一致し, 評価関数の最小値 $J^*(n+q)$ は

$$J^*(n+q) = \frac{1}{2} \mathbf{x}(0)' \mathbf{P}(0) \mathbf{x}(0) \dots\dots\dots (46)$$

となる。なお, 本解法は単に通常の LQ 制御とデッドビート制御を組合せただけのものではない。中間条件の $\mathbf{P}(q)$ が式(40)あるいは式(41)のように定まることによって初めて解くことができる。

5. 最適解の十分性

本章では, 二次形式評価関数の特徴を用いて, 4章の最適入力の十分性を証明する。

5・1 $t=q, \dots, n+q-1$ のとき まず, 零終端状態式(2)を用いずに一般的な入力 $u(t)$ を用いる。
式(1)より $x(t+n)$ は

$$x(t+n) = A^n x(t) + W \begin{bmatrix} u(t+n-1) \\ \vdots \\ u(t) \end{bmatrix} \dots\dots\dots (47)$$

となる。可到達性行列 W は正則なので $1 \times n$ ベクトル

$$h = [0 \dots 0 \ 1] W^{-1} \dots\dots\dots (48)$$

を式(47)の左からかけて整理すると,

$$u(t) = k^* x(t) + h x(t+n) \dots\dots\dots (49)$$

を得る。このとき, 式(1)と式(49)より

$$x(t+1) = (A + b k^*) x(t) + b h x(t+n) \dots\dots\dots (50)$$

$$x(t) = (A + b k^*)^{t-q} x(q) + \sum_{j=q+1}^t \{(A + b k^*)^{t-j} b h x(j+n-1)\} \dots\dots\dots (51)$$

を得る。

一方, デッドビート区間の評価関数 $J_2(n+q)$ は,

$$J_2(n+q) = \frac{1}{2} \sum_{t=q}^{n+q-1} [x(t)' Q x(t) + r u(t)^2] = \frac{1}{2} \sum_{t=q}^{n+q-1} [\{u(t) - k^* x(t)\}' \{u(t) - k^* x(t)\} + G(t)] \dots\dots\dots (52)$$

$$G(t) = x(t)' (k^*)' u(t) + u(t) k^* x(t) - x(t)' (k^*)' k^* x(t) - u(t)^2 + x(t)' Q x(t) + r u(t)^2 \dots\dots\dots (53)$$

とおくことができる。式(49)を式(53)に代入すると,

$$G(t) = x(t)' (k^*)' \{k^* x(t) + h x(t+n)\} + \{k^* x(t) + h x(t+n)\}' k^* x(t) - x(t)' (k^*)' k^* x(t) \\ + (r-1) \{k^* x(t) + h x(t+n)\}' \{k^* x(t) + h x(t+n)\} + x(t)' Q x(t) \dots\dots\dots (54)$$

となる。

ここで, $x(n+q)$ 以後のすべての状態が零になる入力 $w(t)$ (4章の最適入力はこの条件を満足するので, $w(t)$ の集合は空集合ではない) に対しては,

$$x(t) = (A + b k^*)^{t-q} x(q) \dots\dots\dots (55)$$

となるので,

$$G(t) = x(t)' \{Q + r(k^*)' k^*\} x(t) = x(q)' \{(A + b k^*)^{t-q}\}' \{Q + r(k^*)' k^*\} (A + b k^*)^{t-q} x(q) \dots\dots\dots (56)$$

が得られる。したがって, $J_2(n+q)$ は

$$J_2(n+q) = \frac{1}{2} \sum_{t=q}^{n+q-1} [\{w(t) - k^* x(t)\}' \{w(t) - k^* x(t)\}] + \frac{1}{2} x(q)' P(q) x(q) \dots\dots\dots (57)$$

となる。

5・2 $t=0, \dots, q-1$ のとき よく知られているリカッチ方程式の性質より, この区間の評価関数 $J_1(n+q)$ は,

$$J_1(n+q) = \frac{1}{2} \sum_{t=0}^{q-1} [u(t) - f^*(t) x(t)] [r + b' P(t+1) b] [u(t) - f^*(t) x(t)] \\ + \frac{1}{2} x(0)' P(0) x(0) - \frac{1}{2} x(q)' P(q) x(q) \dots\dots\dots (58)$$

となる。

よって, 式(57), (58)より

$$J_1(n+q) = \frac{1}{2} \sum_{t=0}^{q-1} [u(t) - f^*(t) x(t)] [r + b' P(t+1) b] [u(t) - f^*(t) x(t)] \\ + \frac{1}{2} \sum_{t=q}^{n+q-1} [\{w(t) - k^* x(t)\}' \{w(t) - k^* x(t)\}] + \frac{1}{2} x(0)' P(0) x(0) \dots\dots\dots (59)$$

となる。すなわち, デッドビート LQ 最適制御の十分性が明らかとなる。

6. あ と が き

本論文では, 一入力線形定常離散時間系に対する高精度デジタルレギュレータの基本構造とデッドビート LQ 最適制御の新解法について述べた。まず, 一般の加法性評価関数に対し, 有限の制御時間で状態を零にする終端状態

固定問題が満足すべき基本構造を明らかにし、終端状態自由問題との比較を行った。その結果、制御区間は二つの区間に分かれ、後の区間(デッドビート区間)では最適入力の評価関数に依存するが、最適ゲインは評価関数に依存しないデッドビート制御のゲインとなることがわかった。次に、この基本構造を用いたリカッチ変換とデッドビート変換により、デッドビートLQ最適制御の新解法を示した。さらに、二次形式評価関数の特徴を用いて、デッドビートLQ最適制御の十分性を示した。

一入力系の結果を多入力系へ拡張するにはもっと複雑な変換が必要であり、現在研究中である。また、ここで求めた一入力終端状態固定問題の基本構造は一般の加法性評価関数に対して成立するので、ロバスト性評価関数への応用も現在研究中である。

なお、本研究の一部は、(財)稲盛財団の平成元年度助成金を用いて行った。

文 献

- (1) 計測自動制御学会編, 自動制御ハンドブック基礎編, (1983), 497, オーム社.
- (2) 高橋・北森訳, 制御と力学系, (1977), 276, コロナ社.
- (3) Kalman, R. E., On the General Theory of Control Systems, *Proc. of IFAC, Moscow*, 1(1960), 481.
- (4) O'Reilly, J., The Discrete Linear Time Invariant Time-optimal Control Problem—An Overview, *Automatica*, 17-2(1981), 363.
- (5) 今井, デッドビート制御, 計測と制御, 22-7(1983), 606.
- (6) 近藤・清田・須永, 1入力線形定常離散時間系のデッドビートLQ最適制御, 計測自動制御学会論文集, 25-11(1988), 1245.
- (7) Ackermann, J., *Der Entwurf linearer Regelungssysteme im Zustandsraum*, (1972), 297, Regelungstechnik und Prozeß-Datenverarbeitung.