円筒コイルばねの素線断面形状の最適化*

(第1報, 応力の厳密解析法と最適化手法の検討)

今 泉 敏 幸^{*1}, 大河内 禎 一^{*2}, 市 川 正 治^{*1}

Shape Optimization of the Wire Cross Section of a Helical Spring (1st Reprot, Study on Stress Analysis and Optimum Design Method)

Toshiyuki IMAIZUMI, Teiichi OOKOUCHI and Syouji ICHIKAWA

In this paper, an exact method for calculating stress in closely coiled helical springs of arbitrary cross section is developed, and the shape optimal design method shown in the previous paper is scrutinized for adequacy. In order to obtain exactly the optimal shape of the wire cross section which minimizes the weight of a helical spring, stress analysis should be exact and the convergence to the optimum should be foolproof.

Therefore, the exact theory of stress analysis is first developed. In this new theory, stress is obtained by solving the functional derived from the state equation of the curved beam by means of FEM. Then the adequacy of the optimum design method shown in the pervious paper is confirmed through investigation of a bar problem.

Key Words: Structural Analysis, Optimum Design, Nonlinear Problem, Finite-Element Method
Helical Spring, Cross-Sectional Shape

1. 緒 言

コイルばねの小形化や軽量化等を目的として、素線断面形状を円形以外の形にするアイディアは古くからあり、さまざまな断面形状に対する応力解析法の研究^{(1)~(3)}も多くの研究者によって行われてきた。特に、近年の著しいコンピュータ技術の発展により、有限要素法等の構造解析手法が比較的容易に利用可能となったことから、素線断面形状が円形以外のコイルばねの精密な解析法の研究^{(4)~(6)}や実用化も盛んに行われるようになってきている。しかし、素線断面形状の最適化に関する研究は、極めて少ない。

そこで、前報⁽⁷⁾では負荷荷重、ばね定数、コイル中心径および量大設計応力が一定と言う条件下で、重量が最小となる素線断面形状の導出を試みた。そこでは、形状最適化法として、Wahl⁽⁸⁾と同じねじり中心の考え方に基いて定式化した有限要素法によるコイルばねの数値的構造解析と最急降下法による非線形計画が用いられた。その結果、収束断面形状は、ほぼ、だ円となり軽量化だけでなく小形化(密着高さが低くなる)に

も効果があることが示されたが、得られた収束断面形状は、原形状の違いによって異なることがわかった。この収束解の相違はコイルの曲率が比較的小さい前報⁽⁷⁾の設計条件の範囲内では実用上問題とならないくらいわずかであるが、コイルの曲率の増加とともに大きくなる傾向が見られた。これは、Wahl⁽⁸⁾と同じねじり中心の考え方に基いた応力解析では、コイル曲率が大きくなるとわずかではあるが精度が悪くなると考えられることや、コイル曲率の増加に伴って、最適点近傍で多峰性が現れ出す可能性のあること、また、前報⁽⁷⁾で提案した逐次形状最適化法では、原形状の相違により解が一意に収束しない場合もあり得ることなどが起因しているとも考えられる。

そのため、最適点近傍の多峰性の有無についての検討や最適断面形状の詳細な検討のためには、厳密な応力解析法の確立が不可欠であり、また、最適化法については局所的最適解が存在せず全域的最適解のみが存在する問題では、少なくとも原形状によらず解が一意に収束することが保証されている必要がある。

そこで、本研究においては、最適断面形状の厳密な検討のため、まず素線断面形状が任意の密巻コイルばねについて、コイル曲率の影響を正確に考慮した厳密な応力解析法を確立した。次に、前報⁽⁷⁾で提案した逐

* 原稿受付 平成2年8月13日。

^{*1} 正員、中央発條(株) (〒470-02 愛知県西加茂郡三好町大字福田字宮下43-1)。

^{*2} 正員、名古屋工業大学 (〒466 名古屋市昭和区御器所町)。

次形状最適化法の妥当性, すなわち解が一意に収束するかどうかを, 唯一の最適解が保証されている真直棒のねじり問題(コイル中心径が極めて大きい場合に相当)を例にとって検討し, 原形状によらず解が一意に収束することを確認した。

2. 任意断面コイルばねの 応力とばね定数

2.1 応力 コイルばねの応力に関する研究は, 従来から多くの研究者によって行われてきているが, その研究の対象は, 特定の断面形状に対するものがほとんどである⁽¹⁾⁽⁸⁾⁽¹⁰⁾。任意断面形状コイルばねの応力に関する研究については, 大橋や長屋らの研究⁽²⁾⁽⁴⁾⁽⁵⁾があるが, いずれも近似解にすぎず, ピッチ角の影響が無視できる場合においてすら, 応力を厳密に求める手法はまだ確立していないように思われる。著者らも前報⁽⁷⁾で応力関数を用いた有限要素法による任意断面コイルばねの応力解析法を提案しているが, その解析手法は, 真直棒をねじった場合の応力に Wahl と同様の考え方で曲率の影響を加味するという手法であり, 近似解にすぎない。また, 神谷ら⁽⁶⁾も有限要素法によって Fucks⁽³⁾が提案した卵形断面コイルばねの応力解析を行っているが, その定式化の方法は明確でない。ここでは, 支配微分方程式から導出した汎関数を有限要素法で定式化した厳密な応力解析法について考える。

荷重がコイル中心線に沿って作用し, ピッチ角の影響も無視できる場合には, 図1に示すように, コイル中心線上向き正に Z 軸, 素線断面中心 O を通って水平に右向き正に r 軸をとった円筒座標系 (r, θ, Z) で考えて, 応力を応力関数 ϕ で次のように定義すると,

$$\left. \begin{aligned} \tau_{r\theta} &= \frac{GR^2}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial Z} \\ \tau_{\theta z} &= -\frac{GR^2}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial r} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

支配微分方程式⁽¹⁾⁽²⁾⁽¹⁰⁾は,

図1 座標系

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial Z^2} - \frac{3\partial \phi}{r \partial r} + 2C = 0 \dots\dots\dots (2)$$

境界条件は断面外周上で,

$$\phi = 0 \dots\dots\dots (3)$$

となる。ここで, G は横弾性係数, R はコイル中心半径である。 $r = R + r^*$ において, 素線断面中心 O に座標原点を移すと,

$$\left. \begin{aligned} \tau_{r\theta} &= \frac{GR^2}{(R+r^*)^2} \frac{\partial \phi}{\partial Z} \\ \tau_{\theta z} &= -\frac{GR^2}{(R+r^*)^2} \frac{\partial \phi}{\partial r^*} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^{*2}} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial Z^2} - \frac{3\partial \phi}{(R+r^*) \partial r^*} + 2C = 0 \dots\dots (5)$$

Langhaar⁽¹⁾は, 素線断面形状が長方形の場合について, 変数変換によって式(2)から二次の Bessel の方程式を作り, これを解き境界条件を考慮して応力関数を求め, これから応力の厳密解を得ている。しかし, この方法は簡単な断面形状以外に用いるのは困難なように思われる。また, 大橋⁽²⁾や Göhner⁽¹⁴⁾は, $R \gg r^*$ として式(5)の左辺第3項を展開し, 逐次近似法により支配微分方程式を解いている。しかし, コイル曲率が大きい場合には, $R \gg r^*$ とは言えないので, 近似次数を多くしても精度が落ちることは明らかである。

素線断面形状が任意の場合について, 応力を厳密に求める一つの方法としては, 式(5)の汎関数を求めた後, これを有限要素法で定式化する方法が考えられるが, まだ, この方法による研究は報告されていないように思われる。そこで, ここでは, 支配微分方程式の汎関数を導出し, これを有限要素法で定式化する方法について考える。この方法であれば, 要素分割さえ細かくしていけば厳密解に近づくことが保証される。

式(5)の両辺に $GR^3/(R+r^*)^3$ を掛ければ,

$$\frac{GR^3}{(R+r^*)^3} \left\{ \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^{*2}} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial Z^2} - \frac{3\partial \phi}{(R+r^*) \partial r^*} + 2C \right\} = 0 \dots\dots\dots (6)$$

となる。したがって, 式(6)の汎関数は,

$$\begin{aligned} x &= \frac{GR^3}{2} \int_A \left[\left\{ \left(\frac{\partial \phi}{\partial r^*} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial Z} \right)^2 \right\} / (R+r^*)^3 \right. \\ &\quad \left. - \frac{4C\phi}{(R+r^*)^3} \right] dr^* dZ \dots\dots\dots (7) \end{aligned}$$

となる。これは, 式(7)を1変数, 二次元, 1階の場合の Euler の方程式⁽⁹⁾に代入すれば, 式(6)が得られることより容易に証明できる。

上式をマトリックス表示し, 各要素ごとに定義された $\phi^{(e)}$ を用いると,

$$x = \sum_{e=1}^E \int_{A^{(e)}} \left[\frac{GR^3}{2(R+r^*)^3} \{g^{(e)}\}^T [D^{(e)}] \{g^{(e)}\} \right]$$

$$-\frac{2GR^3C}{(R+r^*)^3}\phi^{(e)}]dr^*dZ \dots\dots\dots (8)$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} \{g^{(e)}\} &= \begin{Bmatrix} \partial\phi^{(e)}/\partial r^* \\ \partial\phi^{(e)}/\partial Z \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} \partial N^{(e)}/\partial r^* \\ \partial N^{(e)}/\partial Z \end{Bmatrix} \{\phi\} \\ &= [B^{(e)}]\{\phi\} \dots\dots\dots (9) \end{aligned}$$

$$[D^{(e)}] = [I] \dots\dots\dots (10)$$

$$\phi^{(e)} = [N^{(e)}]\{\phi\} \dots\dots\dots (11)$$

なお、 $N^{(e)}$ は形状関数、 E は要素数である。 x を $\{\phi\}$ で最小化すると、次の連立一次方程式を得る。

$$\sum_{e=1}^E [K^{(e)}]\{\phi\} = \sum_{e=1}^E \{f^{(e)}\} \dots\dots\dots (12)$$

ここで、

$$[K^{(e)}] = \int_{A^{(e)}} \frac{GR^3}{(R+r^*)^3} [B^{(e)}]^T [B^{(e)}] dr^* dZ \dots\dots\dots (13)$$

$$\{f^{(e)}\} = \int_{A^{(e)}} \frac{2GR^3C}{(R+r^*)^3} [N^{(e)}]^T dr^* dZ \dots\dots\dots (14)$$

である。連立方程式(12)を式(3)の境界条件のもとで解いて $\{\phi\}$ を求めれば、応力は次式から求めることができる。

$$\begin{Bmatrix} \tau_{r\theta} \\ \tau_{\theta z} \end{Bmatrix} = \frac{GR^2}{(R+r^*)^2} \begin{Bmatrix} \partial N^{(e)}/\partial r^* \\ -\partial N^{(e)}/\partial Z \end{Bmatrix} \{\phi\} \dots\dots\dots (15)$$

なお、コイルばねの素線断面のO点まわりに作用するねじりモーメント M は、境界条件を考慮すれば、

$$\begin{aligned} M &= \int_A (-\tau_{r\theta}Z + \tau_{\theta z}r^*) dr^* dZ \\ &= \int_A \frac{2GR^3}{(R+r^*)^3} \phi dr^* dZ \dots\dots\dots (16) \end{aligned}$$

また、せん断力 P は⁽¹⁾、

$$P = \int_A \frac{2GR^2}{(R+r^*)^3} \phi dr^* dZ \dots\dots\dots (17)$$

となり、 $M=PR$ となるから、式(4)による応力は、言うまでもなくコイル中心軸に沿って荷重 P が作用した時の応力であることがわかる。

2.2 ばね定数 コイルばねの単位長さの線素 ($Rd\theta=1$) に生じるひずみエネルギー U_0 は⁽¹⁾、

$$U_0 = CGR^3 \int_A \frac{\phi}{(R+r^*)^3} dr^* dZ \dots\dots\dots (18)$$

上式に式(17)を代入すれば、ひずみエネルギーは、

$$U_0 = CPR/2 = P\delta_0/2 \dots\dots\dots (19)$$

となるしたがって、 $Rd\theta$ が1のコイル素線の軸方向たわみ δ_0 は、

$$\delta_0 = CR \dots\dots\dots (20)$$

となり、 C は単位長さ当たりのねじれ角を表していることがわかる。また、コイルばねの有効巻き数が n の時のたわみ δ は、

$$\delta = 2C\pi R^2 n \dots\dots\dots (21)$$

となるから、ばね定数 k は、

$$k = P/(2C\pi R^2 n) \dots\dots\dots (22)$$

2.3 円形断面コイルばねの応力 上述の応力計算式の妥当性を検討するため、円形断面コイルばねのコイル内径側の応力について最も厳密解に近いといわれている Göhner の理論⁽¹⁰⁾ による結果と本解析結果を比較する。なお、前報⁽⁷⁾と同様、断面は二次元アイソパラメトリックの8節点く形要素の集合体(要素数160)として、図2のように近似的に表現される。表1は各ばね指数(コイル中心直径/素線直径)別のその結果であるが、応力は $(8PD/\pi d^3)$ で無次元化されて示されている。ここで、 D はコイル中心直径、 P は負荷荷重、 d は素線直径である。計算に当たっては、素線直径は4.0 mm、負荷荷重は490 N、コイル中心直径は16.00 mm~44.00 mm まで4.0 mm おきに変化させた。また、材料定数としては、横弾性係数 G は78.45 GPa とした。

表1には Göhner の理論による結果に対する本解析結果の差異も合わせて示す。

表1より、本理論による解は、Göhner の解と良く一致していることがわかる。また、Göhner の解との差

表1 円形断面コイルばねの応力修正係数

Spring index	Stress correction factor		Deviation %
	Present	Göhner	
4.0	1.3724	1.3825	-0.7306
5.0	1.2853	1.2924	-0.5494
6.0	1.2313	1.2368	-0.4447
7.0	1.1945	1.1990	-0.3753
8.0	1.1679	1.1716	-0.3158
9.0	1.1476	1.1509	-0.2867
10.0	1.1318	1.1346	-0.2468
11.0	1.1190	1.1215	-0.2229

図2 断面形状の要素分割

はばね指数が小さくなるほど大きくなっているが、これは Göhner の理論では、 (r^*/R) が小さいものと仮定して、式(5)を逐次近似法により解いているため、ばね指数が小さくなるほど差異が大きくなると考えられることより、本理論による解は妥当であることがわかる。

2・4 素線断面形状が多連結の場合の解析例 コイルばねの軽量化法の一つとして、素線断面を中空にする方法が考えられるが、素線の断面外形形状が任意で、かつ、内部に任意形状の空域を有するコイルばねの応力に関する研究は、行われていないように思われる。これは、中空断面コイルばねの製造の難しさのために設計現場からの要求があまりなかったことも一因と思われるが、従来の理論では、素線断面形状が多連結となると応力解析が困難であるためと思われる。

ここでは、図3に示すように断面外形形状がだ円で空域部の形状もだ円の場合の解析例を示す。なお、だ円の短径は、コイル中心軸に平行とし、コイル中心半径 R は 20 mm とした。また、コイルの材質はばね鋼とし、料定数としては、横弾性係数 G は 78.45 GPa を用いた。

図4に有限要素解析モデル概要を示す。図の斜線部は、空域に該当する。計算に当たっては、この空域部の要素の横弾性係数 G は、78.45 Pa とした。

図5に負荷荷重 P が 850 N の時の応力の計算結果を示す。図中の実線および破線はそれぞれ、断面外周および内周に沿っての応力 ($\sqrt{\tau_{r\theta}^2 + \tau_{\theta z}^2}$) を示す。

3. 逐次形状最適化法の妥当性の検討

3・1 評価問題の設定 前報⁽⁷⁾での解析結果より、コイルばねの場合コイル曲率の増加に伴って、最適点

図3 解析例の素線断面形状と寸度 [単位(mm)]

図4 有限要素解析モデル

近傍で多峰性が現れ出す可能性があるもので、逐次形状最適化法の妥当性は、全体的最適解のみが存在し、かつコイルばねとほぼ同様な負荷状態にある真直棒のねじり問題を通して評価される。

なお、逐次形状最適化法の妥当性の評価に当たっては、目的関数と設計条件を次のように設定した。

目的関数

真直棒の断面積 A = 最小

設計条件

負荷モーメント M_t = 一定

最大設計応力 τ_a = 一定

この最適化問題は、コイル中心直径 D を無限大に近づけ、負荷荷重 P を $(2M_t/D)$ と等しくして、ばね定数 k = 一定と言う設計条件をなくした場合のコイルばねの素線断面形状の最適化問題に相当する。なお、この問題の最適設計点は、ただ一つだけ存在し、その断面形状は円となることは明らかである。解析に当たっては横弾性係数 G は 78.45 GPa を用いた。

3・2 最適化の手順⁽⁷⁾ 前報と同様に断面は二次元アイソパラメトリックの8節点く形要素の集合体として図2に示すように表現される。断面形状の最適化は断面の原点 O を中心とした等分割線と断面外周の交点にある節点を法線方向に移動することによって行われ、その形状変換に伴う面積の変化率が無視し得るくらいになるまで、次の(1)から(2)までのステップが繰返される。

図5 応力分布

(1) ステップ1 断面外周上の1節点をあらかじめ定めた距離 Δr だけ内外に移動した時の応力を計算する。続いて、計算された応力の最大値が最大設計応力と等しくなるように、断面の相似的拡大縮小を行い面積を算出する。なお、応力は式(13)~(15)において、 $(R+r^*)=R$ と置き、式(12)を式(3)の境界条件のもとで解いて求められる。

(2) ステップ2 ステップ1を外周上のすべての節点について適用し、どの節点を移動させれば面積

が最も減少するか調べる。そして、面積が最も減少する節点の移動により1回の形状変換が行われる。

3.3 計算結果および考察 長径 15.972 mm, 短

n	A (mm ²)	Cross-sectional shape & stress
0	100.17
23	87.394
35	82.102
48	81.094
58	80.187
73	79.712
83	79.637

Note n : Number of transformations
A : Cross-sectional area

図6 形状変換過程(原形状: だ円)

n	A (mm ²)	Cross-sectional shape & stress
0	97.345
3	89.877
14	82.689
19	80.762
23	80.317
40	79.888
47	79.728
57	79.648

Note n : Number of transformations
A : Cross-sectional area

図7 形状変換過程(原形状: 正方形)

径7.986 mmのだ円と辺の長さが9.866 mmの正方形を原形状とした2ケースについて最適化の計算を行い収束解を比較する。なお、本計算においては、ねじりモーメントは200 kN・mm、最大設計応力は1000 MPa、横弾性係数 G は78.45 GPaとした。

図6は、だ円を原形状とした場合の形状変換に伴う断面形状と断面外周上の応力($\sqrt{\tau_{r\theta}^2 + \tau_{\theta z}^2}$)分布の変化の過程を示している。また、図7は原形状が正方形の場合の同様の結果を示す。図中の太い実線は断面形状を、細い実線は応力分布を示す。

図8と図9は、それぞれ、原形状がだ円と正方形の場合の形状変換に伴う面積の変化の過程を図示したものである。横軸は形状変換回数を、縦軸は各形状変換過程における断面積を同一設計条件下での円形断面真直棒の断面積で割った値である。形状変換過程における各部分の断面外周上節点の法線方向移動量 Δr は、初期断面の基準寸法 r_0 (だ円の場合は15.972 mm、正方形の場合は9.866 mm)で無次元化して図中に示してある。図によれば、断面積は最小値へ漸近的に収束し、この最適化が安定的に実現されていることがわかる。

図8 形状変換に伴う断面積の変化(原形状:だ円)

図9 形状変換に伴う断面積の変化(原形状:正方形)

る。

表2は、図10に示す円筒座標系(r, β)で表した収束断面の寸法を示す。なお、材料力学によって計算した同一設計条件下での円形断面棒の半径は5.0308 mmである。図6～図9および表2より、収束までの変換回数は異なるものの原形状に依らず、形状変換を重ねるにつれて断面積は減少し、一様な応力分布に近づくこと、また断面形状はいずれも円に収束し、寸法も材料力学による結果とほとんど一致することから、前報⁽⁷⁾で用いた形状最適化法は妥当であることがわかる。

4. 結 言

円筒コイルばねの素線断面形状の最適化の問題において最適点近傍の多峰性の有無についての検討等最適断面形状の詳細な検討を行うに当たり、その布石として素線断面形状が任意の密巻コイルばねについて、コイル曲率の影響を正確に考慮した厳密な応力解析法を確立した。また、最適化法については唯一の最適解が保証されている真直棒のねじり問題(コイル中心径が極めて大きい場合に相当)を例にとりて、その妥当性を確認した。

表2 収束断面の寸法

Original shape: Oval		Original shape: Square	
β (deg)	r (mm)	β (deg)	r (mm)
0.00	5.0244	0.00	5.0285
11.25	5.0252	11.25	5.0296
22.50	5.0294	22.50	5.0313
33.75	5.0355	33.75	5.0332
45.00	5.0411	45.00	5.0362
56.25	5.0465	56.25	5.0408
67.50	5.0473	67.50	5.0413
78.75	5.0505	78.75	5.0398
90.00	5.0497	90.00	5.0410
101.25	5.0469	101.25	5.0407
112.50	5.0431	112.50	5.0401
123.75	5.0390	123.75	5.0384
135.00	5.0354	135.00	5.0346
146.25	5.0314	146.25	5.0310
157.50	5.0276	157.50	5.0283
168.75	5.0250	168.75	5.0273
180.00	5.0244	180.00	5.0285

図10 座標系

文 献

- (1) Langhaar, H. L., *J. Appl. Mech.*, **19**(1952), 49.
 - (2) 大橋, 機論, **20**-95(1954), 449.
 - (3) Fuchs, H. O., *Prod. Eng.*, **27**(1969-1), 86.
 - (4) 長屋, 機論, **51**-470, A(1985), 2293.
 - (5) 長屋, 機論, **54**-503, C(1983), 1393.
 - (6) 神谷・豊福, ばね研究会講演前刷集, (1985-1), 25.
 - (7) 大河内・今泉・市川, 機論, **55**-517, A (1989), 2033.
 - (8) Wahl, A. M., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, **51**(1929), 185.
 - (9) Fung, Y. C. (大橋・村上・神谷 訳), 固体の力学/理論, (1970), 173, 培風館.
 - (10) Göhner, O., *V. D. I.*, **76**(1932), 269.
-