アングルプライ積層厚肉円筒殻の自由振動*

太田 佳樹^{*1}, 成田 吉弘^{*2}
小林 幸徳^{*3}, 山田 元^{*3}

Free Vibration of an Angle-Ply Laminated, Thick Circular Cylindrical Shell

Yoshiki OHTA, Yoshihiro NARITA, Yukinori KOBAYASHI and Gen YAMADA

An analysis is presented for the free vibration of angle-ply laminated circular cylindrical thick shells having any combinations of boundary conditions. For this purpose, the maximum strain and kinetic energies of the shell are evaluated analytically according to the first-order shear deformation theory (FSDT), and the frequency equation is derived by minimizing the Lagrange functional with respect to unknown coefficients of the displacement functions. These displacement functions are written in the power series which satisfy any combination of the geometrical boundary conditions automatically. In numerical examples, the natural frequencies and the mode shapes of the angle-ply laminated thick circular cylindrical shells are calculated, and the effects of the lamination parameters (fiber orientation, number of layers) and the boundary conditions on the vibration are studied.

Key Words: Free Vibration, Natural Frequency, Mode of Vibration, Energy Method, Angle-Ply Thick Circular Cylindrical Shell

1. 緒 言

CFRPなどに代表される繊維強化複合材料は、高い比強度と比剛性を持っているため、構造部材の軽量化を可能とするとともに、与えられた形状、荷重条件、環境に合わせて材料を設計できるという点に特徴を有する新しい材料である。このため、近年さまざまな複合材料が開発され、主要構造部材について従来の材料からの転換が急速に進んでいる。したがって、繊維強化複合材料を用いた構造物の振動特性を把握することは構造設計の点から極めて重要となっている。

従来、人工衛星のスラストチューブや圧力容器などに用いられている積層円筒殻の自由振動解析に関しては、これまでにいくつかの研究が行われており、古くは直交異方性を有するクロスプライ積層円筒殻に関する Dong⁽¹⁾⁽²⁾や Whitney ら⁽³⁾⁽⁴⁾の研究がある。そして、Reddy ら⁽⁵⁾⁽⁶⁾は高次せん断変形理論に基づいてクロスプライ積層偏平殻に関する厳密解を求め、一次せん断変形理論や古典(薄肉)殻理論を用いた場合との比較を行っている。一方、著者ら⁽⁷⁾はクロスプライ積層円筒殻について、一次せん断変形理論に基づき伝達マトリックス法を用いて解析し、殻の境界条件や積層形態が振動特性に及ぼす影響を明らかにしている。また、解の変数分離が不可能なために解析が複雑となるアングルプライ積層円筒殻(繊維方向と殻の軸方向のなす角が一定となるように積層された円筒殻)に関しては、小林ら⁽⁸⁾が古典殻理論を用いて逆対称積層した円筒殻の振動特性を明らかにしている。また、Soldatos⁽⁹⁾は両端単純支持(SS3)された逆対称積層偏平殻を扱っており、Sheinman ら⁽¹⁰⁾⁽¹¹⁾は有限要素法を用いて積層円筒殻や円すい殻に関する研究を行っている。しかしながら、これらの研究のほとんどは逆対称に積層された、厚さの薄い積層円筒殻や円筒パネルに限られており、さまざまな境界条件や積層形態を有する比較的厚いアングルプライ積層円筒殻の振動特性を明らかにした研究はほとんど見受けられない。そこで本論文においては、さまざまな境界条件や積層形態を有するアングルプライ積層円筒殻について理論解析を行うとともに、数値計算を実施してその振動特性を明らかにすることを目的とする。

このために面外のせん断変形を考慮した一次せん断

* 原稿受付 平成2年9月25日。

^{*1} 正員, 北海道大学大学院 (〒060 札幌市北区北13条西8丁目)。^{*2} 正員, 北海道工業大学 (〒006 札幌市手稲区手稲前田419-2)。^{*3} 正員, 北海道大学工学部。

変形理論⁽⁷⁾と積層理論に基づいて、アングラプライ積層円筒殻のひずみエネルギーと運動エネルギーを解析的に求める。次に、変位関数として任意の幾何学的境界条件を満足するべき級数を導入し、リッツ法を適用してアングラプライ積層円筒殻の振動数方程式を導出する。そして、この解析結果に基づいて数値計算を実施し、積層円筒殻の固有振動数と振動モードを求め、両端の境界条件、ラミナの積層数、繊維方向等が振動特性に与える影響を明らかにする。

2. 理論解析

図1は本論文で扱うアングラプライ積層円筒殻の形状と座標系を示す。図のように座標 (x, θ, z) をとり、それぞれの方向の殻変位を u, v, w とする。また、円筒殻の半径を R 、長さを L 、積層された殻の厚さを H とし、各ラミナの繊維方向と殻の軸方向のなす角（繊維配向角）を α で表す。

一次せん断変形理論に基づくと、積層円筒殻の各方向変位はそれぞれ次のように表せる。

$$\left. \begin{aligned} u &= u_0(x, \theta, t) + z\psi_x(x, \theta, t) \\ v &= \frac{R+z}{R}v_0(x, \theta, t) + z\phi_\theta(x, \theta, t) \\ w &= w_0(x, \theta, t) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

ここで、 u_0, v_0, w_0 は殻の中央面における変位、 ψ_x 、 ϕ_θ はそれぞれ θ, x 軸まわりの回転角を表している。そして、変位とひずみの関係は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \epsilon_\theta = \frac{1}{R+z} \left[\frac{\partial v}{\partial \theta} + w \right] \\ \gamma_{\theta z} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{R+z} \left[\frac{\partial w}{\partial \theta} - v \right] \\ \gamma_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \\ \gamma_{x\theta} &= \frac{1}{R+z} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

また、積層した各ラミナが直交異方性材料であれば、 k 番めのラミナにおける応力とひずみの関係式は次のようになる。

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_\theta \\ \tau_{\theta z} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{x\theta} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & 0 & 0 & \bar{Q}_{16} \\ & \bar{Q}_{22} & 0 & 0 & \bar{Q}_{26} \\ & & \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} & 0 \\ & \text{sym.} & & \bar{Q}_{55} & 0 \\ & & & & \bar{Q}_{56} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_\theta \\ \gamma_{\theta z} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{x\theta} \end{Bmatrix}_k$$

図1 アングラプライ積層円筒殻の形状と座標系

ただし

$$\left. \begin{aligned} \bar{Q}_{11} &= Q_{11}m^4 + Q_{22}n^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})m^2n^2 \\ \bar{Q}_{12} &= Q_{12}(m^4 + n^4) + (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66})m^2n^2 \\ \bar{Q}_{16} &= Q_{11}m^3n - Q_{22}mn^3 - mn(m^2 - n^2) \\ &\quad \times (Q_{12} + 2Q_{66}) \\ \bar{Q}_{22} &= Q_{11}n^4 + Q_{22}m^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})m^2n^2 \\ \bar{Q}_{26} &= Q_{11}mn^3 - Q_{22}m^3n + mn(m^2 - n^2) \\ &\quad \times (Q_{12} + 2Q_{66}) \\ \bar{Q}_{44} &= Q_{44}m^2 + Q_{55}n^2, \quad \bar{Q}_{45} = (Q_{55} - Q_{44})mn \\ \bar{Q}_{55} &= Q_{55}m^2 + Q_{44}n^2 \\ \bar{Q}_{66} &= Q_{66}(m^2 - n^2)^2 + (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12})m^2n^2 \\ Q_{11} &= \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \\ Q_{12} &= \frac{E_1\nu_{21}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = \frac{E_2\nu_{12}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \\ Q_{44} &= G_{23}, \quad Q_{55} = G_{31}, \quad Q_{66} = G_{12} \\ m &= \cos \alpha, \quad n = \sin \alpha \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

ここで、 E, G, ν はそれぞれ縦弾性係数、横弾性係数、ポアソン比を表しており、添字 1, 3 はそれぞれラミナの繊維方向、面外（厚さ）方向の諸量を、添字 2 は 1, 3 に垂直な方向の諸量を表している。

次に $u_0, v_0, w_0, \psi_x, \phi_\theta$ を最大振幅とみなし、積層理論に基づき (1)~(3) を用いて積層しているすべてのラミナのエネルギーの和を求めると、アングラプライ積層円筒殻の最大ひずみエネルギーと最大運動エネルギーは次式で与えられる。

$$\begin{aligned}
 U_{\max} = & \frac{R}{2} \iint \left[\bar{A}_{11} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right)^2 + \frac{A_{66}^*}{R^2} \left(\frac{\partial u_0}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{\bar{A}_{22}}{R^2} \left(\frac{\partial v_0}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\bar{A}_{66} + \frac{2}{R} \bar{B}_{66} + \frac{\bar{C}_{66}}{R^2} \right) \left(\frac{\partial v_0}{\partial x} \right)^2 \right. \\
 & + \frac{A_{22}^*}{R^2} w_0^2 + \bar{C}_{11} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} \right)^2 + \frac{C_{22}^*}{R^2} \left(\frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{2C_{12}}{R} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta} + \bar{C}_{11} \left(\frac{\partial \psi_\theta}{\partial x} \right)^2 + \frac{C_{66}^*}{R^2} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial \theta} \right)^2 \\
 & + \frac{2A_{22}}{R^2} \frac{\partial v_0}{\partial \theta} w_0 + \frac{2A_{12}}{R} \frac{\partial u_0}{\partial x} w_0 + \frac{2\bar{A}_{66}}{R} \frac{\partial u_0}{\partial \theta} \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{2\bar{A}_{12}}{R} \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial v_0}{\partial \theta} + \frac{2C_{66}}{R} \frac{\partial \psi_x}{\partial \theta} \frac{\partial \psi_\theta}{\partial x} \\
 & + \frac{2A_{16}}{R} \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial u_0}{\partial \theta} + \frac{2}{R} \left(\bar{A}_{26} + \frac{\bar{B}_{26}}{R} \right) \frac{\partial v_0}{\partial x} \frac{\partial v_0}{\partial \theta} + \frac{2A_{26}^*}{R^2} \frac{\partial u_0}{\partial \theta} w_0 + 2 \left(\bar{A}_{16} + \frac{\bar{B}_{16}}{R} \right) \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial v_0}{\partial x} \\
 & + \frac{2A_{26}}{R^2} \frac{\partial u_0}{\partial \theta} \frac{\partial v_0}{\partial \theta} + \frac{2\bar{A}_{26}}{R} \frac{\partial v_0}{\partial x} w_0 \\
 & + 2\bar{C}_{16} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \frac{\partial \psi_\theta}{\partial x} + \frac{2C_{16}}{R} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta} + \frac{2C_{26}}{R} \frac{\partial \psi_\theta}{\partial x} \frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta} + \frac{2C_{26}^*}{R^2} \frac{\partial \psi_x}{\partial \theta} \frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta} \\
 & + \frac{2B_{22}}{R^2} \frac{\partial v_0}{\partial \theta} \frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta} + \frac{2B_{12}}{R} w_0 \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{2B_{26}}{R} w_0 \frac{\partial \psi_\theta}{\partial x} + \frac{2B_{26}^*}{R^2} w_0 \frac{\partial \psi_x}{\partial \theta} + 2 \left(\bar{B}_{16} + \frac{\bar{C}_{15}}{R} \right) \frac{\partial v_0}{\partial x} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \\
 & + \frac{2\bar{B}_{26}}{R} \frac{\partial v_0}{\partial \theta} \frac{\partial \psi_\theta}{\partial x} + \frac{2B_{26}}{R^2} \frac{\partial v_0}{\partial \theta} \frac{\partial \psi_x}{\partial \theta} + \frac{2\bar{B}_{26}}{R} \frac{\partial v_0}{\partial x} \frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta} + \frac{2\bar{B}_{12}}{R} \frac{\partial v_0}{\partial \theta} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \\
 & + 2 \left(\bar{B}_{66} + \frac{\bar{C}_{66}}{R} \right) \frac{\partial v_0}{\partial x} \frac{\partial \psi_\theta}{\partial x} + \frac{2\bar{B}_{66}}{R} \frac{\partial v_0}{\partial x} \frac{\partial \psi_x}{\partial \theta} + \frac{2B_{22}^*}{R^2} w_0 \frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta} + 2\bar{B}_{11} \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \\
 & + \frac{2B_{66}}{R} \frac{\partial u_0}{\partial \theta} \frac{\partial \psi_\theta}{\partial x} + \frac{2B_{66}^*}{R^2} \frac{\partial u_0}{\partial \theta} \frac{\partial \psi_x}{\partial \theta} + \frac{2B_{12}}{R} \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta} + \frac{2B_{16}}{R} \frac{\partial u_0}{\partial \theta} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \\
 & + \frac{2B_{16}}{R} \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial \psi_x}{\partial \theta} + 2\bar{B}_{16} \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial \psi_\theta}{\partial x} + \frac{2B_{26}^*}{R^2} \frac{\partial u_0}{\partial \theta} \frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta} \\
 & + x^2 \left(A_{44} - \frac{B_{44}}{R} + \frac{C_{44}^*}{R^2} \right) \psi_\theta^2 + x^2 \frac{A_{44}^*}{R^2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{2x^2}{R} \left(A_{44} - \frac{B_{44}}{R} \right) \frac{\partial w_0}{\partial \theta} \psi_\theta + x^2 \bar{A}_{55} \psi_x^2 \\
 & + 2x^2 \bar{A}_{55} \frac{\partial w_0}{\partial x} \psi_x + x^2 \bar{A}_{55} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 + 2x^2 A_{45} \psi_x \psi_\theta + \frac{2x^2}{R} A_{45} \frac{\partial w_0}{\partial \theta} \psi_x \\
 & + 2x^2 A_{45} \frac{\partial w_0}{\partial x} \psi_\theta + \frac{2x^2}{R} A_{45} \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial \theta} \Big] dx d\theta \\
 T_{\max} = & \frac{R\omega^2}{2} \iint \left[\bar{I}_1 u_0^2 + \left(\bar{I}_1 + \frac{2}{R} \bar{I}_2 + \frac{\bar{I}_3}{R^2} \right) v_0^2 + \bar{I}_1 w_0^2 + \bar{I}_3 \psi_x^2 + \bar{I}_3 \psi_\theta^2 + 2\bar{I}_2 u_0 \psi_x + 2 \left(\bar{I}_2 + \frac{\bar{I}_3}{R} \right) v_0 \psi_\theta \right] dx d\theta
 \end{aligned}
 \tag{a}$$

$$\tag{b}$$

$$\tag{c}$$

$$\tag{d}$$

$$\tag{e}$$

ただし

$$\bar{A}_{ij} = A_{ij} + \frac{B_{ij}}{R}, \quad \bar{B}_{ij} = B_{ij} + \frac{C_{ij}}{R}, \quad \bar{C}_{ij} = C_{ij} + \frac{D_{ij}}{R}$$

$$(A_{ij}, B_{ij}, C_{ij}, D_{ij}) = \sum_{k=1}^N \int_z \bar{Q}_{ij}^{(k)}(1, z, z^2, z^3) dz, \quad (A_{ij}^*, B_{ij}^*, C_{ij}^*) = \sum_{k=1}^N \int_z \bar{Q}_{ij}^{(k)} \left(1 + \frac{z}{R} \right)^{-1} (1, z, z^2) dz$$

$$\bar{I}_1 = I_1 + \frac{I_2}{R}, \quad \bar{I}_2 = I_2 + \frac{I_3}{R}, \quad \bar{I}_3 = I_3 + \frac{I_4}{R}, \quad (I_1, I_2, I_3, I_4) = \sum_{k=1}^N \int_z \rho^{(k)}(1, z, z^2, z^3) dz$$

$$(i, j=1, 2, 4, 5, 6)$$

..... (4)

ここで、上式中の x^2 はせん断修正係数であって、これは式(2)、(3)で与えられ厚さ方向に一定となる、面外のせん断ひずみ、せん断応力を補正するために導入した係数である。また、 ω は円振動数、 $\rho^{(k)}$ は k 番めのラミナの密度、 N は積層しているラミナの総数を表している。そして $\bar{A}_{ij}$ 、 $\bar{B}_{ij}$ 、 $\dots$ 、 C_{ij}^* は積層円筒殻の剛性係数であり、 I_i は慣性量である。また、ひずみエネルギー式における(a)の部分は伸び、(面内の)せん断、曲げ、ねじれ変形に関する項であり、(b)と(c)はそれぞれ伸び-(面内)せん断、曲げ-ねじれ変形の連成を表している。また、(d)は面内変形と面外変形の連成を表す項であり、(e)は面外のせん断変形に関する項

である。

さらに、解析の簡単化のために次の無次元量を導入する。

$$\begin{aligned}
 \xi &= x/(L/2), \quad \eta = z/H, \quad (l, h) = (1/R)(L, H) \\
 (\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) &= (1/H)(u_0, v_0, w_0) \\
 (\bar{\psi}_x, \bar{\psi}_\theta) &= (H/R)(\psi_x, \psi_\theta) \\
 \lambda^2 &= \rho_0 R^2 \omega^2 / E_{20} \quad (\text{振動数パラメータ}) \\
 (\bar{I}_1^*, \bar{I}_2^*, \bar{I}_3^*) &= (1/\rho_0 R)(\bar{I}_1, \bar{I}_2/R, \bar{I}_3/R^2) \\
 (\bar{a}_{ij}, a_{ij}, a_{ij}^*) &= (1/E_{20} R)(\bar{A}_{ij}, A_{ij}, A_{ij}^*) \\
 (\bar{b}_{ij}, b_{ij}, b_{ij}^*) &= (1/E_{20} R^2)(\bar{B}_{ij}, B_{ij}, B_{ij}^*) \\
 (\bar{c}_{ij}, c_{ij}, c_{ij}^*) &= (1/E_{20} R^3)(\bar{C}_{ij}, C_{ij}, C_{ij}^*)
 \end{aligned}$$

..... (5)

ただし、上式における ρ_0 , E_{20} はそれぞれ無次元化の際に基準となる密度、縦弾性係数であり、 λ は無次元振動数パラメータである。

本論文においては、変位 $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ と回転角 $\bar{\psi}_x$, $\bar{\psi}_\theta$ を次のべき級数を用いて表す。

$$\left. \begin{aligned} \bar{u}(\xi, \theta) &= \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J U_{ij} X_{1i}(\xi) Y_j(\theta) \\ \bar{v}(\xi, \theta) &= \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J V_{ij} X_{2i}(\xi) Y_j(\theta) \\ \bar{w}(\xi, \theta) &= \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J W_{ij} X_{3i}(\xi) Y_j(\theta) \\ \bar{\psi}_x(\xi, \theta) &= \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \Psi_{xij} X_{4i}(\xi) Y_j(\theta) \\ \bar{\psi}_\theta(\xi, \theta) &= \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \Psi_{\theta ij} X_{5i}(\xi) Y_j(\theta) \end{aligned} \right\}$$

ただし

$$X_{mi}(\xi) = \xi^{i-1} (1+\xi)^{\alpha_m} (1-\xi)^{\beta_m}$$

$$Y_j(\theta) = \begin{cases} \cos \frac{(j-1)\theta}{2} & (j: \text{odd}) \\ \sin \frac{j\theta}{2} & (j: \text{even}) \end{cases}$$

..... (6)

ここで、上式中の U_{ij} , V_{ij} , W_{ij} , Ψ_{xij} , $\Psi_{\theta ij}$ は未定係数である。また、試験関数 $X_{mi}(\xi)$ は α_m , β_m ($m=1, 2, 3, 4, 5$) を適当に指定することによって、殻の両端における任意の幾何学的境界条件を満足させることが可能である。例えば、 $\xi=1$ において変位 $\bar{u}$ が拘束されていない場合には $\beta_1=0$ とし、拘束されている場合には β_1

=1 と与えればよい。いま、アングラプライ積層円筒殻が境界条件

両端単純支持 (SS2):

$$N_x = \bar{v} = \bar{w} = M_{x\theta} = \bar{\psi}_\theta = 0 \quad (\xi = \pm 1)$$

両端固定:

$$\bar{u} = \bar{v} = \bar{w} = \bar{\psi}_x = \bar{\psi}_\theta = 0 \quad (\xi = \pm 1)$$

固定 ($\xi=-1$) - 自由 ($\xi=1$):

$$\bar{u} = \bar{v} = \bar{w} = \bar{\psi}_x = \bar{\psi}_\theta = 0 \quad (\xi = -1)$$

$$N_x = V = Q_{zx} = M_x = M_{x\theta} = 0 \quad (\xi = 1)$$

..... (7)

を有する場合には、それぞれに対して α_m , β_m を

両端単純支持:

$$\alpha_1 = \beta_1 = \alpha_4 = \beta_4 = 0, \quad \alpha_2 = \beta_2 = \alpha_3 = \beta_3 = \alpha_5 = \beta_5 = 1$$

両端固定:

$$\alpha_1 = \beta_1 = \alpha_2 = \beta_2 = \alpha_3 = \beta_3 = \alpha_4 = \beta_4 = \alpha_5 = \beta_5 = 1$$

固定 ($\xi=-1$) - 自由 ($\xi=1$):

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = 1, \quad \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = \beta_5 = 0$$

..... (8)

と指定する。ここで式(7)における N_x , V , Q_{zx} , M_x , $M_{x\theta}$ は積層円筒殻の合応力、等価せん断力、合モーメントである⁽⁷⁾。

最後に、式(4)で与えられる積層円筒殻の最大ひずみエネルギーと最大運動エネルギーに式(5), (6)を代入した後、未定係数に関して汎関数 $L = T_{\max} - U_{\max}$ を極小化する。

$$\frac{\partial L}{\partial U_{mn}} = \frac{\partial L}{\partial V_{mn}} = \frac{\partial L}{\partial W_{mn}} = \frac{\partial L}{\partial \Psi_{xmn}} = \frac{\partial L}{\partial \Psi_{\theta mn}} = 0$$

$$(m=1, 2, \dots, I; n=1, 2, \dots, J)$$

..... (9)

その結果、連立同次方程式

$$\left[\left[K_{ij}^{(m,n)} \right] - \lambda^2 \left[M_{ij}^{(m,n)} \right] \right] \begin{Bmatrix} U_{ij} \\ V_{ij} \\ W_{ij} \\ \Psi_{xij} \\ \Psi_{\theta ij} \end{Bmatrix} = 0 \quad \text{..... (10)}$$

$$(i, m=1, 2, \dots, I; j, n=1, 2, \dots, J)$$

が得られ、これが有意な解を持つための条件として

$$\left| \left[K_{ij}^{(m,n)} \right] - \lambda^2 \left[M_{ij}^{(m,n)} \right] \right| = 0 \quad \text{..... (11)}$$

$$(i, m=1, 2, \dots, I; j, n=1, 2, \dots, J)$$

となる振動数方程式が求まる。なお、式(10), (11)における剛性行列 $[K]$ と質量行列 $[M]$ は付録に示す。

4. 数値計算結果と考察

本論文においては、同じ厚さと材料特性のラミナからなるアングラプライ積層円筒殻について数値計算を

表 1 3層 (45°/-45°/45°) アングラプライ積層円筒殻の振動数パラメータの収束状況 ($l=4.0$, $h=0.2$, $E_1=20E_2$, $G_{12}=G_{31}=0.65E_2$, $G_{23}=0.5E_2$, $\nu_{12}=0.25$)

$I \times J$	1st	2nd	3rd	4th	5th
S. S. - S. S.					
4×9	0.4619*	0.6128 ¹	0.8580*	0.9935*	1.290*
5×11	0.4593	0.6127	0.8388	0.9935	1.078
6×13	0.4583	0.6124	0.8350	0.9932	1.078
7×15	0.4578	0.6124	0.8345	0.9932	1.074
8×17	0.4575	0.6124	0.8337	0.9932	1.074
9×19	0.4575	0.6124	0.8335	0.9932	1.074
5×9	0.4593	0.6127	0.8388	0.9935	1.078
6×9	0.4583	0.6124	0.8350	0.9932	1.078
7×9	0.4578	0.6124	0.8345	0.9932	1.074
8×9	0.4575	0.6124	0.8337	0.9932	1.074
9×9	0.4575	0.6124	0.8335	0.9932	1.074
Clamped-Clamped					
4×9	0.6572*	0.9030*	1.031 ¹	1.108*	1.373*
5×11	0.6547	0.8924	1.027	1.099	1.335
6×13	0.6527	0.8908	1.025	1.097	1.322
7×15	0.6519	0.8903	1.024	1.096	1.319
8×17	0.6514	0.8900	1.023	1.096	1.319
9×19	0.6513	0.8900	1.023	1.096	1.318

実施した。数値計算において用いた各ラミナ材料特性は、高強度グラファイト/エポキシを参考にして以下のとおりにした。

$$E_1=20E_2, G_{12}=G_{31}=0.65E_2$$

$$G_{23}=0.5E_2, \nu_{12}=0.25$$

また、積層数を変化させたときの各ラミナの厚さは積

層した殻全体の厚さが常に一定となるように与えている。なお、式(4)のせん断修正係数 κ^2 には $5/6$ 、 $\pi^2/12$ などの値が用いられているが、本論文の数値計算においては、Whitney⁽¹³⁾ らがすすめている $5/6$ を用いた。

数値計算における計算精度は、式(6)におけるべき級数の項数 I, J に依存するので、採用した項数による振動数パラメータの収束状況を調べる必要がある。

表1は両端単純支持、両端固定された3層(45°/

図2 両端単純支持されたアングラプライ積層円筒殻の振動数パラメータと繊維配向角の関係 ($l=4.0$, $h=0.2$, $E_1=20E_2$, $G_{12}=G_{31}=0.65E_2$, $G_{23}=0.5E_2$, $\nu_{12}=0.25$)

表2 両端単純支持されたアングラプライ積層円筒殻の振動数パラメータの比較 ($l=4.0$, $h=0.01$, $E_1=20E_2$, $G_{12}=G_{31}=0.65E_2$, $G_{23}=0.5E_2$, $\nu_{12}=0.25$)

Mode	45°/-45°/45°		45°/-45°	
	Present	CTST	Present	CTST
1 st	0.1188*	0.1188*	0.0944*	0.0944*
2 nd	0.1246*	0.1247*	0.1097*	0.1097*
3 rd	0.1694*	0.1697*	0.1233*	0.1234*
4 th	0.2180*	0.2180*	0.1719*	0.1721*
5 th	0.2255*	0.2260*	0.2037*	0.2038*

CTST : Classical Thin Shell Theory

図3 アングラプライ積層円筒殻の基本振動数パラメータと繊維配向角の関係 ($l=4.0$, $h=0.2$, $E_1=20E_2$, $G_{12}=G_{31}=0.65E_2$, $G_{23}=0.5E_2$, $\nu_{12}=0.25$)

−45°/45°) アングラプライ積層円筒殻について、項数 I, J を変化させたときの振動数パラメータの収束状況を示している。ここで、表中の振動数パラメータの右上の数字は、振動モード形を調べることによって決定された円周方向の波数である（以下、周方向波数と呼ぶ）。表からわかるように、最低次から五次までの振動は周方向波数の比較的小さいところにあるため、周方向の試験関数 $Y(\theta)$ の項数は $J=9$ で十分である。また、軸方向関数 $X(\xi)$ に関しては、次数によって収束状況はいくらか異なるが、いずれの境界条件の場合でも項数 $I=8$ を用いれば十分な精度で振動数パラメータが得られていることがわかる。これらの結果より、以下の数値計算においては項数 $I \times J = 8 \times 9$ を用いた。

表2は本解析法の妥当性を調べるために、薄肉 ($h=0.01$) のアングラプライ積層円筒殻の振動数パラメータについて、本解析法によって求めた結果と古典殻理論 (CTST) に基づいた解析より得られた結果⁽¹²⁾ の比較を行ったものである。本解析法は面外のせん断変形を考慮しているため、古典殻理論に基づく結果に比べてわずかに低い振動数を与えているが、両者はよく一致している。また、厚肉 ($h=0.2$) のクロスプライ積

層円筒殻に関しても、別の解析法より得られた結果⁽⁷⁾ との比較を行い、非常によい一致をしていることを確認してある。これより本解析法の妥当性が確かめられる。

図2は両端単純支持されたアングラプライ積層円筒殻の振動数パラメータ λ と繊維配向角 α の関係を示しており、図(a), (b)はそれぞれ3層 ($\alpha/-\alpha/\alpha$) と2層 ($\alpha/-\alpha$) の積層円筒殻に対応している。また、図中の曲線は最低次から五次までの振動数を各次数ごとに結んだものであり、(・)印を付した箇所に示す数字は対応する振動モードの周方向波数を表している。図より繊維配向角 α が増加するにつれて振動数パラメータは大きく増減する。そして、3層の対称積層の場合には2層の逆対称積層の場合に比べて振動数が全体的に高くなることがわかる。また、それぞれの図において振動数が接近している付近では、周方向波数が示しているように、振動モード形の移り変わりが起こっていることがわかる。さらに、殻の境界条件が両端固定、固定-自由の場合や積層数が異なる場合にも、同様な特徴を有することを確認してある。

図3は1層~4層のアングラプライ積層円筒殻の基本振動数パラメータ λ と繊維配向角 α の関係を示し

図4 両端単純支持されたアングラプライ積層円筒殻の振動モード ($l=4.0$, $h=0.2$, $E_1=20E_2$, $G_{12}=G_{31}=0.65E_2$, $G_{23}=0.5E_2$, $\nu_{12}=0.25$)

ている。図において、実線、破線、点線はそれぞれ両端単純支持、両端固定、一端固定他端自由の境界条件を有する場合に対応しており、図中の N はラミナの積層数である。すなわち、 $N=2$ は $(\alpha/-\alpha)$ 、 $N=3$ は $(\alpha/-\alpha/\alpha)$ 、そして $N=4s$ 、 $4A$ はそれぞれ 4 層の対称積層 $(\alpha/-\alpha/-\alpha/\alpha)$ 、逆対称積層 $(\alpha/-\alpha/\alpha/-\alpha)$ を示している。図よりいずれの境界条件の場合でも、積層数 N が増加するに従って振動数は全体的に高くなり、積層数 $N=4$ 程度において振動数はある値にほぼ収束することがわかる。また、 $N=4s$ で両端単純支持された場合に注目すると、配向角 α が $\alpha=24^\circ$ 、 54° 近傍で振動数パラメータは極大となり、最も低い振動数を与える $\alpha=90^\circ$ のときに比べると、 $\alpha=24^\circ$ のときに約 65% も振動数が高くなる。同様に両端固定された場合 ($N=4s$) にも、それぞれ $\alpha=33^\circ$ 、 74° の 2 箇所で振動数は極大となり最大 70% ほど振動数が高くなるが、一端固定他端自由の場合には、 $\alpha=35^\circ$ 近傍でのみ極大となり約 130% も振動数が高くなっている。このように繊維配向角 α を適当に選択することによって、比較的厚さの厚いアングルプライ積層円筒殻の基本固有振動数の最適化（最大化）を実現することができる。しかしながら、厚さが薄いアングルプライ積層円筒殻については、繊維配向角 α のとり方によっては $\alpha=90^\circ$ の場合より振動数が低下する例も報告⁽⁸⁾ されている。

図 4 はアングルプライ積層円筒殻の振動モードを示しており、図 (a) と (b) はそれぞれ 3 層 $(\alpha/-\alpha/\alpha)$ 、2 層 $(\alpha/-\alpha)$ の積層円筒殻に対応している。また、各々の図は変位 $\bar{u}$ 、 $\bar{v}$ 、 $\bar{w}$ の軸方向分布図と、図 5 に示すような面外変位 $\bar{w}$ の節線と振幅が $\pm 0.5\bar{w}$ の等振幅線が描かれている殻の展開図から成っている。この分布図における変位 $\bar{u}$ 、 $\bar{v}$ 、 $\bar{w}$ は、それぞれ円筒殻上の最大値を与える軸線上 ($\bar{w}$ についてのみ展開図中に点線で示す) における変位分布であり、それぞれ点線、破線、実線で表されている。また、各変位はそれぞれの図におけるいずれかの最大変位量で基準化されている。はじめに図 (a) の 3 層円筒殻のモード形に着目する

図 5 アングルプライ積層円筒殻の展開図

と、図 2 に示したように繊維配向角 α が変化することによって振動モード形の順序が変化していることがわかる。また、節線 2 本 (周方向波数が 1) の振動モード形 ($\alpha=20^\circ$ の三次、 $\alpha=45^\circ$ の二次、 $\alpha=70^\circ$ の一次) に顕著なように、繊維配向角が増加するにつれて面内の変位量が大きくなり、面内変形と面外変形の連成が強くなる。そして、各振動モード形に対して $\alpha=45^\circ \sim 70^\circ$ の範囲内でその連成度合いが最も大きくなることも確認してある。次に、節線のあり方に注目すると、繊維配向角 α が変化しても節線の傾きはそれほど変化しない。しかし、図 (a) の対称積層と図 (b) の逆対称積層の場合を比較すると、逆対称積層のときは対称積層の場合に比べて節線全体の傾きは少ないが、殻の両端付近において節線が大きく曲がることわかる。さらに、繊維配向角が異なる場合や、4 層の逆対称積層の場合についても同様の傾向が現れることを確認してある。

なお、本論文の数値計算は北海道大学大型計算機センターの HITAC M-682H 計算機を用いて行った。

5. 結 言

本論文では繊維強化複合材料をアングルプライ積層した厚肉円筒殻の自由振動問題をリッツ法を用いて理論解析した。その際、積層円筒殻の基礎式を一次せん断変形理論と積層理論に基づいて誘導し、殻の最大ひずみエネルギーと運動エネルギーを解析的に求めた。そして、任意の幾何学的境界条件を満足する変位関数を導入し、汎関数の極小化により殻の振動数方程式を導出した。そして数値計算を実施することにより、両端での境界条件や積層形態の違いがアングルプライ積層円筒殻の振動特性に与える影響を検討し、次の結論を得た。

(1) アングルプライ積層厚肉円筒殻の固有振動数は繊維配向角が変化することによって大きく増減し、各次数の円周方向の波数も変化する。

(2) 厚さを一定としたアングルプライ積層厚肉円筒殻の基本振動数は、積層数の増加に従ってある値に収束する傾向があり、繊維配向角の違いにより片持積層円筒殻で最大 130% もの差が生じる。また、基本振動数が最大となる繊維配向角は境界条件によって大きく異なり、繊維配向角を適当に選択することによって基本振動数の最適化（最大化）が可能となる。

(3) アングルプライ積層円筒殻の振動モード形は繊維配向角が変化しても大きな変化はないが、対称積層、逆対称積層の違いによって節線のあり方が異なる。また、繊維配向角の変化とともに面内変形と面外変形の連成度合いも変化し、繊維配向角が $45^\circ \sim 70^\circ$

の範囲内で最大となる。

付 録

アングラプライ積層円筒殻の振動数方程式における剛性行列 $[K]$, 質量行列 $[M]$ の各要素は次式で与えられる。

$$[K_{ij}^{(m,n)}] = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} \\ & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} \\ & & K_{33} & K_{34} & K_{35} \\ & & & K_{44} & K_{45} \\ & \text{sym.} & & & K_{55} \end{bmatrix}$$

$$[M_{ij}^{(m,n)}] = \begin{bmatrix} M_{11} & 0 & 0 & M_{14} & 0 \\ & M_{22} & 0 & 0 & M_{25} \\ & & M_{33} & 0 & 0 \\ & & & M_{44} & 0 \\ & \text{sym.} & & & M_{55} \end{bmatrix}$$

ただし

$$K_{11} = \frac{2\bar{a}_{11}}{l^2} f_{11mi}^{11} g_{nj}^{00} + \frac{a_{66}^*}{2} f_{11mi}^{00} g_{nj}^{11} + \frac{a_{16}}{l} (f_{11mi}^{10} g_{nj}^{01} + f_{11mi}^{01} g_{nj}^{10})$$

$$K_{12} = \frac{\bar{a}_{66}}{l} f_{12mi}^{01} g_{nj}^{10} + \frac{\bar{a}_{12}}{l} f_{12mi}^{10} g_{nj}^{01} + \frac{2(\bar{a}_{16} + \bar{b}_{16})}{l^2} f_{12mi}^{11} g_{nj}^{00} + \frac{a_{26}}{2} f_{12mi}^{00} g_{nj}^{11}$$

$$K_{13} = \frac{a_{12}}{l} f_{13mi}^{10} g_{nj}^{00} + \frac{a_{26}^*}{2} f_{13mi}^{00} g_{nj}^{10}$$

$$K_{14} = \frac{2\bar{b}_{11}}{l^2} f_{14mi}^{11} g_{nj}^{00} + \frac{\bar{b}_{66}^*}{2} f_{14mi}^{00} g_{nj}^{11} + \frac{b_{16}}{l} f_{14mi}^{01} g_{nj}^{10} + \frac{b_{16}}{l} f_{14mi}^{10} g_{nj}^{01}$$

$$K_{15} = \frac{b_{66}}{l} f_{15mi}^{01} g_{nj}^{10} + \frac{b_{12}}{l} f_{15mi}^{10} g_{nj}^{01} + \frac{2\bar{b}_{16}}{l^2} f_{15mi}^{11} g_{nj}^{00} + \frac{b_{26}^*}{2} f_{15mi}^{00} g_{nj}^{11}$$

$$K_{22} = \frac{\bar{a}_{22}}{2} f_{22mi}^{00} g_{nj}^{11} + \frac{2(\bar{a}_{66} + 2\bar{b}_{66} + \bar{c}_{66})}{l^2} f_{22mi}^{11} g_{nj}^{00} + \frac{\bar{a}_{26} + \bar{b}_{26}}{l} (f_{22mi}^{10} g_{nj}^{01} + f_{22mi}^{01} g_{nj}^{10})$$

$$K_{23} = \frac{a_{22}}{2} f_{23mi}^{00} g_{nj}^{10} + \frac{\bar{a}_{26}}{l} f_{23mi}^{10} g_{nj}^{00}$$

$$K_{24} = \frac{2(\bar{b}_{16} + \bar{c}_{16})}{l^2} f_{24mi}^{11} g_{nj}^{00} + \frac{b_{26}}{2} f_{24mi}^{00} g_{nj}^{11} + \frac{\bar{b}_{12}}{l} f_{24mi}^{01} g_{nj}^{10} + \frac{\bar{b}_{66}}{l} f_{24mi}^{10} g_{nj}^{01}$$

$$K_{25} = \frac{2(\bar{b}_{66} + \bar{c}_{66})}{l^2} f_{25mi}^{11} g_{nj}^{00} + \frac{b_{22}}{2} f_{25mi}^{00} g_{nj}^{11} + \frac{\bar{b}_{26}}{l} f_{25mi}^{01} g_{nj}^{10} + \frac{\bar{b}_{12}}{l} f_{25mi}^{10} g_{nj}^{01}$$

$$K_{33} = \frac{a_{22}^*}{2} f_{33mi}^{00} g_{nj}^{00} + \frac{a_{44}^*}{2} f_{33mi}^{00} g_{nj}^{11}$$

$$+ \frac{2\bar{a}_{55}}{l^2} f_{33mi}^{11} g_{nj}^{00} + \frac{a_{45}}{l} (f_{33mi}^{10} g_{nj}^{01} + f_{33mi}^{01} g_{nj}^{10})$$

$$K_{34} = \frac{b_{12}}{l} f_{34mi}^{01} g_{nj}^{00} + \frac{b_{26}^*}{2} f_{34mi}^{00} g_{nj}^{01} + \frac{\bar{a}_{55}}{l} f_{34mi}^{10} g_{nj}^{00} + \frac{a_{45}}{2} f_{34mi}^{00} g_{nj}^{10}$$

$$K_{35} = \frac{b_{26}}{l} f_{35mi}^{01} g_{nj}^{00} + \frac{b_{22}^*}{2} f_{35mi}^{00} g_{nj}^{01} + \frac{a_{44} - b_{44}^*}{2} f_{35mi}^{00} g_{nj}^{10} + \frac{a_{45}}{l} f_{35mi}^{10} g_{nj}^{00}$$

$$K_{44} = \frac{2\bar{c}_{11}}{l^2} f_{44mi}^{11} g_{nj}^{00} + \frac{c_{66}^*}{2} f_{44mi}^{00} g_{nj}^{11} + \frac{c_{16}}{l} (f_{44mi}^{10} g_{nj}^{01} + f_{44mi}^{01} g_{nj}^{10}) + \frac{\bar{a}_{55}}{2} f_{44mi}^{00} g_{nj}^{00}$$

$$K_{45} = \frac{c_{12}}{l} f_{45mi}^{10} g_{nj}^{01} + \frac{c_{66}}{l} f_{45mi}^{01} g_{nj}^{10} + \frac{2\bar{c}_{16}}{l^2} f_{45mi}^{11} g_{nj}^{00} + \frac{c_{26}^*}{2} f_{45mi}^{00} g_{nj}^{11} + \frac{a_{45}}{2} f_{45mi}^{00} g_{nj}^{00}$$

$$K_{55} = \frac{c_{22}^*}{2} f_{55mi}^{00} g_{nj}^{11} + \frac{a_{44} - b_{44} + c_{44}^*}{2} f_{55mi}^{00} g_{nj}^{00} + \frac{2\bar{c}_{66}}{l^2} f_{55mi}^{11} g_{nj}^{00} + \frac{c_{26}}{l} (f_{55mi}^{10} g_{nj}^{01} + f_{55mi}^{01} g_{nj}^{10})$$

$$M_{11} = \frac{\bar{I}_1^*}{2} f_{11mi}^{00} g_{nj}^{00}, \quad M_{14} = \frac{\bar{I}_2^*}{2} f_{14mi}^{00} g_{nj}^{00}$$

$$M_{22} = \frac{\bar{I}_1^* + 2\bar{I}_2^* + \bar{I}_3^*}{2} f_{22mi}^{00} g_{nj}^{00},$$

$$M_{25} = \frac{\bar{I}_2^* + \bar{I}_3^*}{2} f_{25mi}^{00} g_{nj}^{00}$$

$$M_{33} = \frac{\bar{I}_1^*}{2} f_{33mi}^{00} g_{nj}^{00}, \quad M_{44} = \frac{\bar{I}_3^*}{2} f_{44mi}^{00} g_{nj}^{00}$$

$$M_{55} = \frac{\bar{I}_3^*}{2} f_{55mi}^{00} g_{nj}^{00}$$

また、上式中における f_{mnl}^{ij} , g_{kl}^{ij} はそれぞれ試験関数 $X(\xi)$, $Y(\theta)$ の定積分

$$f_{mnl}^{ij} = \int_{-1}^1 \frac{\partial^{(i)} X_{mk}}{\partial \xi^{(i)}} \frac{\partial^{(j)} X_{nl}}{\partial \xi^{(j)}} d\xi$$

$$g_{kl}^{ij} = \int_0^{2\theta} \frac{\partial^{(i)} Y_k}{\partial \theta^{(i)}} \frac{\partial^{(j)} Y_l}{\partial \theta^{(j)}} d\theta$$

である。

文 献

- (1) Dong, S. B., Free Vibration of Laminated Orthotropic Cylindrical Shells, *J. Acoust. Soc. Am.*, **44**-6 (1968), 1628.
- (2) Dong, S. B. and Tso, F. K. W., On a Laminated Orthotropic Shell Theory Including Transverse Shear Deformation, *J. Appl. Mech.*, **39**-4 (1972), 1091.
- (3) Whitney, J. M. and Sun, C. T., A Refined Theory for Laminated Anisotropic Cylindrical Shells, *J. Appl. Mech.*, **41**-2 (1974), 471.
- (4) Sun, C. T. and Whitney, J. M., Axisymmetric Vibrations of Laminated Composite Cylindrical Shells, *J. Acoust. Soc. Am.*, **55**-6 (1974), 1238.
- (5) Reddy, J. N. and Liu, C. F., A Higher-Order Shear Deformation Theory of Laminated Elastic Shells, *Int. J. Eng. Sci.*, **23**-3 (1985), 319.

- (6) Khdeir, A. A. and Reddy, J. N., Influence of Edge Conditions on the Modal Characteristics of Cross-Ply Laminated Shells, *Comput. Struct.*, **34**-6 (1990), 817.
- (7) 山田・ほか2名, クロスプライ積層円筒殻の自由振動, 機論, **57**-533, C (1991), 27.
- (8) 小林・長島, CFRP 積層円筒殻の振動特性, 日本航空宇宙学会誌, **34**-389 (1986), 332.
- (9) Soldatos, K. P., Free Vibration of Antisymmetric Angle-Ply Laminated Circular Cylindrical Panels, *Q. J. Mech. Appl. Math.*, **36**-2 (1983), 207.
- (10) Sheinman, I. and Greif, S., Dynamic Analysis of Laminated Shells of Revolution, *J. Composite Mater.* **18** (1984), 200.
- (11) Sheinman, I. and Weissman, S., Coupling Between Symmetric and Antisymmetric Modes in Shells of Revolution, *J. Composite Mater.*, **21** (1987), 988.
- (12) Narita, Y., ほか3名, An Analytical Method for Vibration of Angle-Ply Cylindrical Shells Having Arbitrary Edges, *AIAA*, (掲載決定).
- (13) Whitney, J. M. and Pagano, N. J., Shear Deformation in Heterogeneous Anisotropic Plates, *J. Appl. Mech.*, **37**-4 (1970), 1031.