部分構造物特性パラメータの実験的同定* (台加振による方法の提案)

安井良次^{*1}, 八坂哲雄^{*1}

Experimental Parameter Identification of Structural Components (The Method Using the Base Excitation Test)

Yoshitsugu YASUI and Tetsuo YASAKA

An experimental identification method for qualifying analytical models of a structural dynamic is proposed. The method can be applied, at the design stage, when assembling a set of sub-structures. Its major feature is to represent correctly the equilibrium of forces within each substructure. The characteristic representation of a substructure obtained from the experiment consists of a set of eigenfrequencies, the corresponding modal damping coefficients and some boundary factors. These characteristics are determined by measuring the excitation forces, and the mathematical algorithm employed guarantees that the measured forces will be conserved in the analytical representation of the substructure. Only a few data points, which can be obtained from dynamic tests with sinusoidal base excitation, are required. Two example problems have been analyzed by means of a finite-element package and also tested experimentally, it is shown that these two sample problems yield consistent results.

Key Words: Vibration, Modal Analysis, Sinusoidal Excitation, Identification, Modal Parameter

1. 結 言

宇宙構造物の開発においてはロケットによる打上げ環境と軌道上での姿勢制御の要求から構造物の振動特性の正確な把握が必要とされる。また大形で複雑な構造体になりつつある近年の宇宙構造物では、全体をひとつの構造体として一括して設計したり試験することが難しくなっている。そのため動特性の評価には全体を複数の部分構造物に分けて設計および試験する分割設計法⁽¹⁾が用いられる。さて、設計解析に用いる解析モデルには試験による確認が不可欠であるが、試験で得られたデータによって解析モデルを同定できればその信頼性は高まる。手法としては、実験データから質量や剛性などの特性マトリックスを求める特性行列同定法⁽²⁾かモーダルパラメータを求めるパラメータ同定法が応用できる。特性行列同定法で求めたモデルの場合、解析との比較や解析への代入が容易であるが、現実には限られた測定データからどのような大きさや形態のモデルを同定するのが問題となる。その点モーダルパラメータは全体の運動を規定する一般化

パラメータであるが、モーダルパラメータによって解析モデル構成する場合にも、結合解析時の特性を精度良く表現できるモデル形式が求められる。特に、モーダル自由度を用いた部分構造物の解析モデルでは、その結合部領域の特性が重要となる⁽³⁾。例えば不拘束モード法は実験データの取り込みが簡単であるが、採用するモード数に限りがある場合には精度劣化を招く。このため打切ったモード成分を補償する方法が知られているが、精度上は結合部領域に関する特性が重要となることがわかっている⁽⁴⁾。その点では拘束モード法⁽⁵⁾は安定した精度で解析できる部分構造物の表現法である。しかし、これは一般に解析において用いられる方法であって、実験による測定データからは結合部領域の特性をいかに求めるかが問題になる。そこで、提案する方法は拘束モード法の数学表現における結合部領域の特性パラメータを加振試験時に求まる応答波形データから同定する。試験法は一般的な正弦波台加振であり、必要となるのは加振反力の応答波形のみであり、モード形状の同定の必要がなく測定点数を多く必要としない。また、本方法は部分構造を全体構造に組込んだ時に実際に励振力が作用する接合部を加振した伝達特性からパラメータが同定できるため部分構造の特性評価に有効である。以下その手法と単純な供試

* 原稿受付 平成2年10月15日。

^{*1} 正員、日本電信電話(株)無線システム研究所 (〒238-03 横須賀市武1-2356)。

体に対して実施した解析と実験について述べる。

2. 結合パラメータ同定法

部分構造物を拘束モード法を用い、接合点 b で拘束した弾性モードと接合点の変位を独立自由度とした静的変形モードを用いて表現する⁽⁵⁾。

$$\begin{Bmatrix} u_a \\ u_b \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi & G \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_i \\ u_b \end{Bmatrix} \quad \cdots \cdots \cdots (1)$$

ここで、 Φ は接合点 b 点を拘束した弾性モードであり q_i はそのモーダル自由度、 a 点は接合点以外の点である。 G は静的縮退モードであって、以下で与える。

$$[G] = -[K_{aa}]^{-1}[K_{ab}] \quad \cdots \cdots \cdots (2)$$

式(1)の変換を運動方程式の前後から施すと、以下の減衰項を加えた一般的な拘束モード形のコンポーネントモードの式を得る(付録参照)。

$$\begin{Bmatrix} m_i & M_{ib} \\ M_{bi} & \bar{M}_{bb} \end{Bmatrix} s^2 \begin{Bmatrix} q_i \\ u_b \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} b_i & B_{ib} \\ B_{bi} & \bar{B}_{bb} \end{Bmatrix} s \begin{Bmatrix} q_i \\ u_b \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} k_i & 0 \\ 0 & \bar{K}_{bb} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} q_i \\ u_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ F_b \end{Bmatrix} \quad \cdots \cdots \cdots (3)$$

ここで、 s はラプラスの演算子。式(3)は部分構造の特性を表現するのに有効な数学的表現である⁽⁶⁾。

さて、式(3)を構成するパラメータにおいて、 b 点で拘束した弾性モード Φ は、 b 点を振動台に固定して強制変位励振した場合のモードと一致するため、モードを質量正規とすれば、 $m_i=1$ で、 k_i は台加振で全体系の共振周波数を測定すれば求まる。 b_i は曲線適合からも求まるが、自由減衰波形から得ることとした。これは後で述べる。すなわち、結合部に関係しないモードパラメータは台加振時に既存の測定法で求まる。

式(3)の上半分は、

$$\begin{aligned} [m_i]s^2\{q_i\} + [b_i]s\{q_i\} + [k_i]\{q_i\} \\ = -[M_{ib}]s^2\{u_b\} - [B_{ib}]s\{u_b\} \quad \cdots \cdots \cdots (4) \end{aligned}$$

であり、また下半分は、

$$\begin{aligned} [M_{bi}]s^2\{q_i\} + [B_{bi}]s\{q_i\} + [\bar{M}_{bb}]s^2\{u_b\} \\ + [\bar{B}_{bb}]s\{u_b\} + [\bar{K}_{bb}]\{u_b\} = \{F_b\} \quad \cdots \cdots \cdots (5) \end{aligned}$$

となる。

本解析においては、減衰は小さいとし、弾性モードのモーダルダンピングとしてその値を評価をする。また、式(4)の減衰の非対角項は無視して、

$$[B_{bi}]s\{u_b\} = 0 \quad \cdots \cdots \cdots (6)$$

とする(理由は付録にて説明する)。

式(4)は、加振周波数 ω において、

$$(-\omega^2[m_i] + j\omega[b_i] + [k_i])\{q_i\} = [M_{ib}]\omega^2\{u_b\} \quad \cdots \cdots \cdots (7)$$

となる。

また、式(3)において、 $[\bar{K}_{bb}]$ 、 $[\bar{B}_{bb}]$ は静的変形モ

ードの b 点への縮退である。台加振では加振点 b 点と同方向一定の運動をするため相対運動はなく剛体変位のみであり、相対運動に依存する剛性および減衰は剛体変位・速度に対して力を生じないから、

$$[\bar{K}_{bb}]\{u_b\} = [\bar{B}_{bb}]s\{u_b\} = 0 \quad \cdots \cdots \cdots (8)$$

とできる。これより、加振周波数 ω において式(5)は、

$$\begin{aligned} -[M_{bi}]\omega^2\{q_i\} + j[B_{bi}]\omega\{q_i\} \\ - [\bar{M}_{bb}]\omega^2\{u_b\} = \{F_b\} \quad \cdots \cdots \cdots (9) \end{aligned}$$

となる。ここで、式(7)の左辺の非連成の単振動の応答関数を複素分離して、

$$(-m_i + jb_i/\omega + k_i/\omega^2)^{-1} = H_{\omega_i} + jL_{\omega_i} \quad \cdots \cdots \cdots (10)$$

と表現し、式(7)と式(9)から $\{q_i\}$ を消去すれば、

$$\begin{aligned} -[M_{bi}][H_{\omega_i} + jL_{\omega_i}][M_{ib}]\omega^2\{u_b\} \\ + [B_{bi}][jH_{\omega_i} - L_{\omega_i}][M_{ib}]\omega\{u_b\} \\ - [\bar{M}_{bb}]\omega^2\{u_b\} = \{F_b\} \quad \cdots \cdots \cdots (11) \end{aligned}$$

となる。

加振変位 $\{u_b\}$ を基準位相とすれば、正弦波加振の場合 $\{u_b\}$ の虚数部分は存在しない。式(11)の虚数域だけ取り出すと、左辺の最終項は省略できて、

$$\begin{aligned} -[W_{bi}][L_{\omega_i}][M_{ib}]\omega^2\{u_b\} \\ + [B_{bi}][H_{\omega_i}][M_{ib}]\omega\{u_b\} = \text{Im}\{F_b\} \quad \cdots \cdots \cdots (12) \end{aligned}$$

となる。振動台による加振では式(1)の弾性モードが励起されるが、式(10)より各モードは各々の共振周波数において、虚数域の係数 L_{ω_i} が最大で、 H_{ω_i} は零となる。また、共振しているモード以外のモードについては H_{ω_i} が零ではないが、減衰はそもそも小さいため、減衰が反力に及ぼす影響も小さいとして、共振点近傍の測定反力の虚数成分は、式(12)第2項の減衰項を無視して左辺と釣合うとする。マトリックスの対称性から、 $[M_{ib}] = [M_{bi}]^T$ であり、結局、式(12)は加振反力 $\{F_b\}$ と励振を支配するパラメータ $[M_{bi}]$ の関数となる。そこで、 $[M_{bi}]$ を未知数として、この虚数部の方程式を共振周波数による連立方程式として解けばよい。すなわち、式(11)の加振反力の複素分離が実験によって計測可能であれば、式(12)より結合パラメータ $[M_{bi}]$ を求めることができる。 ω は共振点を目標としてその近傍で加振する。

さて、結合解析時には $[M_{bi}]$ 以外の結合部領域のパラメータも必要だが、 $[\bar{M}_{bb}]$ は質量特性であり、振動試験ではなく質量や重心、慣性モーメントの測定により確認される。また、結合点が複数あり接合時にそれぞれ独立に変位する場合、 $[\bar{K}_{bb}]$ が必要だが、これは加振試験ではなく静荷重試験などで求めるものである。さらに、応答解析の場合においても、 $[\bar{B}_{bb}]$ 、 $[B_{bi}]$ などの減衰は現実的には、結合解析時のモーダルダン

ピングに含めて評価することになり、同定の必要はない。

すなわち、部分構造の特性を式(3)の拘束モード形の運動方程式で表現した場合、 $[M_{bi}]$ を同定することが、振動試験を用いた場合の最大の目的となる。

2・1 支持点が単点の場合 さて、構造物が一点で支持されており、これを加振する場合を考える。 b が一点であれば $[M_{bi}]$ は列ベクトルで、

$$-\sum_{i=1}^n M_{bi}^2 \cdot L_{\omega_i} \cdot \omega^2 \cdot u_b = \text{Im} F_b \quad \cdots \cdots (13)$$

とできる。 b 点を台に固定した台加振による加速度一定($\omega^2 u_b = \text{const}$)の加振試験を弾性モードの数 n だけ行つて、連立方程式を解けば M_{bi} は求まる。 $\omega^2 u_b$ は加速度計で測定し、 F_b は力センサ(ひずみ計測)によって得ることにより、 M_{bi} を同定する。 M_{bi} の±の符号はモードを±どちら側に定義するかで決めてやればよい。

2・2 支持点が多点の場合 一般には構造物を複数点で台に支持して加振する場合が多い。ただし、加振点 $\{u_b\}$ はすべて同方向、同位相で動くから、支持点の運動は剛体列ベクトル $\{\phi_0\}$ によって記述できる。

$$\{u_b\} = \{\phi_0\} u_{b0} \quad \cdots \cdots (14)$$

$\{\phi_0\}$ により、加振方向の一点に統合されるから、

$$\{\sum M_{ib}\} = [M_{ib}]\{\phi_0\} \quad \cdots \cdots (15)$$

$$\sum F_b = \{\phi_0\}^T \{F_b\} \quad \cdots \cdots (16)$$

として、 $\{\phi_0\}^T$ を式(11)の前から作用されると、

$$-\omega^2 \{\sum M_{ib}\}^T [L_{\omega_i}] \{\sum M_{ib}\} u_{b0} = \text{Im} \sum F_b \quad \cdots \cdots (17)$$

となり、式(13)と同様にして解くことができる。このようにして、一点に統合された $\{\sum M_{ib}\}$ を求めたのち、個々の $\{F_b\}$ について、以下の式を解いて、 $[M_{ib}]$ を求む。

$$-\omega^2 [M_{ib}]^T [L_{\omega_i}] \{\sum M_{ib}\} u_{b0} = \text{Im} \{F_b\} \quad \cdots \cdots (18)$$

2・3 回転自由度に対する取扱い さて、ここで問題となるのは、加振方向として回転方向の一定加振が現実的に難しいため、 $[M_{bi}]$ の回転成分が求まらないことである。そこで回転成分については並進方向の加振時に生ずるモーメント反力を用いて、以下の同定法を試みる。並進成分について $[M_{bi}]$ を求めたものを式(7)に代入してモーダル自由度 $\{q_i\}$ の応答値を求める。求まった $\{q_i\}$ のやはり虚数成分を式(9)の回転成分に代入する。ここで並進方向の加振によって、加振時のモーメントを加振周波数 ω でそれぞれ測定して、

$$[M_{bi}] \omega^2 \text{Im} \{q_i\} = \text{Im} \{F_b\} \quad \cdots \cdots (19)$$

を解く。この場合も共振点近傍の周波数が有効である。

3. 定常応答波形を用いた反力の同定

ここでは正弦波加振による定常応答波形を用いて、提案した同定を実施することを試みる。

最初に全体のパラメータ同定の流れを図1のフローチャートに示し以下個々の項目について説明する。

3・1 非線形最小二乗による関数あてはめ 測定された応答波形は定常の正弦波であるはずであるから、これに非線形最小二乗法による関数あてはめを用いる。本方法は正弦波加振であるため基準となる関数が明確であり関数あてはめにむいている。

非線形最小二乗法によるあてはめ法は以下のように行う。正弦波加振による振動応答の測定値 y を以下の関数値とみなす。

$$y = A \sin(\omega t + \phi) + C \quad \cdots \cdots (20)$$

この関数に対して、その振幅の複素表示を行うと、

$$\text{Im} |y| = A \sin \phi, \text{Re} |y| = A \cos \phi \quad \cdots \cdots (21)$$

とすることができる。式(20)を求めれば虚数域での応答を同定することができる。

ここでは、Levenberg-Marquardt法を非線形最小二乗法のあてはめに用いた。このような関数あてはめを用いれば定常応答波を同定するのに統計的な有意性を持たせることができる。

3・2 減衰の測定 本方法はモーダル減衰 b_i を与える必要があるが、供試体の減衰が小さいため共振周波数の自由減衰波形を1自由度の減衰波形と近似し、近傍のモードの影響を無視して b_i を求めることとした。共振周波数での加振状態からの急停止による自由減衰データに対して、前記3・1節の方法がそのまま利用できる。この場合のあてはめ関数は以下のようなる。

$$y = A e^{-\zeta \omega t} \sin(\omega t + \phi) + C \quad \cdots \cdots (22)$$

図2に計測波形の例を定常および減衰の場合をまと

図1 同定フローチャート

めて示す。

3.3 波形分解による方法 3.1節では時刻歴の応答波形に関数あてはめを用いたが、もう一つの方法として、測定波形に対して加振波形を基準とした周波数分解によって応答力を位相とともに得ることができる。これはトラッキングフィルタやFFTを用いて実現できる。この方法は繰り返し計算の必要もなく有利な点もあるが、出力の力の波形に式(20)のバイアス C がある場合や波形ひずみが顕著な場合の取扱いなどに工夫が必要になる。いずれにせよ装置の選択や精度の検討を含め正確な波形の位相と振幅が計測できる方法を選べばよい。

3.4 試験系および供試体 今回使用した計測系を図3に示す。加振点の加速度と力を同時計測し、加振周波数と基準波形を加振加速度より得る。これにより同時取り込みのデータに関して加振正弦波を基準とした位相を求める。

試験供試体は図4に示すようにアルミ板を用いた単純な構成とした。

図2 測定波形(力センサ出力)

4. 試験結果および考察

提案した方法を用いて結合部パラメータ $[M_{bi}]$ の同定を行う。まず最初に手法の検討のため、加振反力をFEMによって解析的に求めてこれを反力データとし、本解析法に代入して同定を実施した。結果を表1に示す。加振反力は前記したように位相の反転する共振周波数近傍での値を用いる。また、 X 方向のパラメータの同定には X 方向に励起されるモードを用いるのがよい。表1における五次モードのような非常に小さな成分のパラメータは、ここで用いたような加振方法では本来励起されないモードであるため同定精度は劣化する。FEMを用いて解析的に式(1)を構成し、質量マトリックスを縮退して求めたパラメータと比較すると、本方法で同定したパラメータとはよく一致する。

次に、試験データによる同定値との比較を表2にまとめる。試験データによる同定値も解析値と同様に満足のいく結果を得ている。以上のように、力の正確な

図3 計測系

図4 供試体の構成

測定が可能であれば、結合パラメータを安定して求めることができる。求めたパラメータによって修正した式(3)の特性方程式から逆に与えられる加振反力の周波数応答値を図5に示す。これはFEMで求めた構造の応答特性とよく一致しており、式(3)の拘束モード

で表現したモデルは部分構造物が振動入力によって応答する反力特性を正確に再現できる。すなわち、部分構造として動特性を十分に表現していることになる。

もうひとつの適用例として二点支持の場合について述べる。この場合も前記一点支持の場合と同様に、最初に解析的に得られた加振力を用いてパラメータを同定する。結果を表3に示す。これからわかるように、逆符号成分で加振方向に統合されると相殺される表3のモード1は、 X 方向の加振ではそもそも励起されないモードと考えられるため、別の方向の加振によって同定する必要がある。この場合は Z 方向。同様にモード2は X 方向の加振がよい。さて実験ではすべての方向の加振力を測定することに難しさもあるため、ここでは Z 方向の加振を行い、加振力の測定によって同定されたパラメータの値を表4に示す。

また、関数あてはめとトラッキングフィルタによる周波数分解を比較したが、本試験ではさほど差はなかった。トラッキングフィルタによる出力を周波数に関して連続的にスイープした場合の加振反力を図6の下側に示す。比較として、図5と同様に加振反力の同定

表1 同定法とFEMによるパラメータの比較
(解析反力使用、一点支持)

Mib PARAMETER EXTRACTION (EXCITED DIRECTION)			
	FREQUENCY (Hz)	FEM	EXTRACTED PARAMETER
1	13.04577	3.4559-03	3.4559-03
2	25.05267	3.0083-03	3.0083-03
3	84.16137	1.6382-03	1.6383-03
4	85.66913	1.0348-03	1.0347-03
5	92.60954	1.9075-06	1.0790-05
Mib PARAMETER EXTRACTION (ROTATIONAL DIRECTION)			
1	13.04577	9.0566-01	9.0610-01
2	25.05267	5.3263-01	5.3351-01
3	84.16137	1.1464-01	1.1450-01
4	85.66913	7.0094-02	7.2218-02
5	92.60954	8.7521-02	7.3069-04

表2 同定法とFEMによるパラメータの比較
(実験計測値による、一点支持)

PARAMETER COMPOSED BY FEM			
MODE	FREQUENCY (Hz)	M _{ib} (TRANS)	M _{ib} (ROT)
1	13.04577	3.4559-03	9.0566-01
2	25.05267	3.0083-03	5.3263-01
EXPERIMENTAL PARAMETER EXTRACTION			
1	12.47	3.3295-03	9.0791-01
2	24.07	2.9228-03	5.6112-01

表3 同定法とFEMによるパラメータの比較(解析反力使用、二点支持)

		MODE 1		MODE 2		
		FEM	EXTRACTED PARAMETER	FEM	EXTRACTED PARAMETER	
PARAMETER DIRECTION	GRID 1	X	4.0796-03	4.0807-03	1.9372-03	1.9369-03
		Y	5.1533-15	-	-9.1546-13	-
		Z	1.6821-03	1.6817-03	-1.2035-03	-1.1909-03
		RX	3.1701-13	-	3.8539-11	-
		RY	5.3311-02	5.3291-02	9.3394-02	9.3430-02
		RZ	-3.7524-14	-	-1.8208-12	-
	GRID 2	X	-4.0795-03	-4.0808-03	1.9291-03	1.9287-03
		Y	4.0909-15	-	-9.2380-13	-
		Z	1.6843-03	1.6831-03	1.2187-03	1.2061-03
		RX	6.1129-13	-	3.8851-11	-
		RY	-5.3276-02	-5.3265-02	9.3290-02	9.3323-02
		RZ	-5.3785-14	-	1.8005-12	-

図5 同定パラメータによる加振反力の応答関数
(一点支持)

結果を図6に上側に示す。共振点ではスイープ速度と表示間隔の影響でピークを逃すため、再度共振点近傍で極低速でスイープし、表示分解能を細かくしたものを図7に示すが、その結果実験と解析は非常によく一致した。本方法は共振点近傍の定常応答の特性を用いて同定を行う方法であることから、もし連続的な周波数支配の関数を利用する場合にはスイープ速度やサンプリング間隔などに十分注意する必要がある。

以上の結果から本方法は定常状態の応答値を正確に

表4 同定法とFEMによるパラメータの比較
(実験計測値による、二点支持)

PARAMETER COMPOSED BY FEM		
M_{ib1}	1.6821-03	FREQUENCY 55.34382 Hz
M_{ib2}	1.6843-03	
ΣM_{ib}	3.3664-03	
EXPERIMENTAL PARAMETER EXTRACTION		
M_{ib1}	1.61-03	FREQUENCY 55.66 Hz
M_{ib2}	1.64-03	
ΣM_{ib}	3.25-03

図6 同定パラメータによる加振反力の応答関数
と掃引試験による加振反力の応答関数(二点支持)

複素分離して測定することができれば、その虚数域のデータのみから、コンポーネントモードの結合部特性を簡単かつ有効に表現できることを示している。

5. 結 論

モード合成法に用いる部分構造物の結合パラメータを実験的に同定する方法を提案した。本方法は振動試験時に結合点に生ずる反力の測定から直接結合パラメータを求める方法であって、加速度計測によるモード形状の同定や特性行列の同定の必要はない。また、結合時に力の伝わる接合点の加振反力からパラメータを同定するため、結合時に加わる力に対する応答を正確に数学モデルに反映できる点でも優れている。同定の対象としたのは拘束モード形の数学表現であり、本報で同定した質量結合パラメータ以外は既存の方法で求めることができる。また、同定した質量結合パラメータは、部分構造物の固有モードの加振応答特性を支配する重要なパラメータであり、実験で同定できたことの意味は大きい。さらに、本方法における測定データは結合点の加振による共振点近傍での加振反力の応答波形のみであって、一般の同定法のような大量な測定データを必要とはしない。

付 録

(1) 剛性の非対角項 $[K_{ib}] = [K_{bi}] = 0$ の証明

式(1)で定義された変換マトリックスを剛性行列の前からその転置を、後ろからそれを作用させると以下のようなになる。

$$\begin{bmatrix} \Phi^T & 0 \\ G^T & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{aa} & K_{ab} \\ K_{ba} & K_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi & G \\ 0 & I \end{bmatrix} \dots\dots\dots (23)$$

これを解くと、

図7 極低速掃引試験による共振点近傍の
加振反力の応答関数(二点支持)

$$\begin{bmatrix} \Phi^T K_{aa} \Phi & \Phi^T K_{aa} G + \Phi^T K_{ab} \\ G^T K_{aa} \Phi + K_{ab}^T \Phi & G^T K_{aa} G + G^T K_{ab} + K_{ba} G + K_{bb} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (24)$$

となり、これに式(2)を代入すると、非対角項は明らかに、

$$\begin{bmatrix} k_i & -\Phi^T K_{aa} K_{aa}^{-1} K_{ab} + \Phi^T K_{ab} \\ -K_{ab}^T K_{aa}^{-1} K_{aa} \Phi + K_{ab}^T \Phi & G^T K_{aa} G + G^T K_{ab} + K_{ba} G + K_{bb} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi^T K_{aa} \Phi & 0 \\ 0 & \bar{K}_{bb} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (25)$$

となる。

(2) 剛体モードの定義と $[B_{ib}]\{u_b\}=0$ の評価

台加振の場合は接合点は加振台に剛に留められており、接合点の運動は代表される一点運動と置き換えられる。接合点 b を代表点 r とそれ以外 m に分ける。

$$\{u_b\} = \begin{Bmatrix} u_m \\ u_r \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (26)$$

剛性マトリックスを分けて表示すると、

$$\begin{bmatrix} K_{aa} & K_{ab} \\ K_{ba} & K_{bb} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{aa} & K_{am} & K_{ar} \\ K_{ma} & K_{mm} & K_{mr} \\ K_{ra} & K_{rm} & K_{rr} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (27)$$

となる。ここで接合点の変位を点 r で代表して、

$$\begin{Bmatrix} u_a \\ u_m \\ u_r \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & I \\ \vdots & \vdots \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_a \\ u_r \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (28)$$

とする。 I は 6×6 の単位マトリックス。 E は a の自由度の単位マトリックス。この変換によって剛性マトリックスを縮退する。

$$\begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & I \\ \vdots & \vdots \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} K_{aa} & K_{am} & K_{ar} \\ K_{ma} & K_{mm} & K_{mr} \\ K_{ra} & K_{rm} & K_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & I \\ \vdots & \vdots \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{aa} & \sum_{j=1}^m K_{aj} + K_{ar} \\ \sum_{j=1}^m K_{ja} + K_{ra} & \sum_{j=1}^m \sum_{l=1}^m K_{jl} + \sum_{j=1}^m K_{jr} + \sum_{j=1}^m K_{rj} + K_{rr} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (29)$$

基準点 r は一点で 6×6 の自由度。

拘束のない系では剛性は6自由度の特異性をもつため、6自由度(一点)の変位を単位変位として与えれば、式(29)より、反力を生じない系の変位は、

$$\begin{bmatrix} K_{aa} & \sum_{j=1}^m K_{aj} + K_{ar} \\ \sum_{j=1}^m K_{ja} + K_{ra} & \sum_{j=1}^m \sum_{l=1}^m K_{jl} + \sum_{j=1}^m K_{jr} + \sum_{j=1}^m K_{rj} + K_{rr} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \psi_a \\ I \end{Bmatrix} \{u_r\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (30)$$

として得られる。この「拘束のない系の一点に単位変位を与えた時に励起される反力を生じない系の変位」を剛体モードと定義する。すなわち、式(30)より、

$$\begin{Bmatrix} \psi_a \\ I \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{aa}^{-1} \left(\sum_{j=1}^m K_{aj} + K_{ar} \right) \\ I \end{bmatrix} \dots\dots\dots (31)$$

を剛体モードとする。このモードによる変位には変形を起こすような外力が働いていないので、内点間の相対変位はないはずである。そのため粘性減衰効果はない。

さて、式(2)の静的変形モード $[G]$ は、

$$[G] = [K_{aa}]^{-1} [K_{ab}] = [K_{aa}]^{-1} [K_{am} \ K_{ar}] \dots\dots (32)$$

となるが、台加振では、 m と r は同じ動きをするので静的変形モード $[G]$ によって励起される変位を、 $\{u_r\}$

で表現すれば、式(28)と同様に、

$$\{\bar{u}_a\} = [G]\{u_b\} = [K_{aa}]^{-1} \left[\sum_{j=1}^m K_{aj} + K_{ar} \right] \{u_r\} \quad (33)$$

となり、これは剛体モードによる変位になる。すなわち、台加振で励起される静的変形モード $[G]$ は、たとえば、 b 点を多点とし、6自由度以上で定義しても結果的に剛体変位以外は励起しないことがわかる。

この剛体変位には、相対変位成分はないので、減衰の非対角成分は、

$$[B_{ib}]\{\dot{u}_b\} = [\Phi]^T [B_{aa}, B_{ab}] \begin{Bmatrix} \psi_a \\ I \end{Bmatrix} \{\dot{u}_r\} = 0 \dots\dots\dots (34)$$

として省略できる。

文 献

- (1) Goldenberg, S. and Shapiro, M., *NASA CR*, 112252, (1973).
 - (2) 長松, モード解析, (1985), 178, 培風館.
 - (3) Caesar, B. and Peter, J., *AIAA J.*, 25-11(1987), 1494.
 - (4) 安井・八坂, 機論, 55-511, C(1989), 517.
 - (5) Benfield, W. C., and Huruda, R. F., *AIAA J.*, 9-7(1971), 1255.
 - (6) 安井・八坂, 機論, 56-522, C(1990), 368.
-