区分的線形振動系における一般解の大域表現と標準形* (非線形性が不連続な場合)

今 村 仁^{*1}, 鈴木 浩 平^{*2}

Global Representation of General Solution and Canonical forms for Piecewise Linear Oscillators (The Case of a Discontinuous Nonlinearity)

Hitoshi IMAMURA and Kohei SUZUKI

In this paper, we describe a construction method of global representation of a general solution and Poincaré mapping (or phase return mapping) from local exact solutions (or half return maps) for piecewise linear oscillators with discontinuous nonlinearity by using a pseudo-feedback approach. It is shown that for some piecewise linear systems, a general solution can be global represented by the form of superposition of linear system response and pseudo-feedback responses. Based on these global representations, we propose canonical forms of general solutions, steady states and Poincaré mapping. According to this formulation, phase return mapping can be expressed in a global analytical form depending on return time parameters. Finally, numerical simulations are performed, and the validity of the presented approach can be confirmed.

Key Words: Nonlinear Vibration, Piecewise Linear Systems, General Solution, Pseudo-Feedback Form, Global Representation, Canonical Form, Poincaré Mapping, Setup Spring, Coulomb's Friction

1. 緒 言

すべての非線形系に、普遍的に成り立つ性質を明らかにし、できるだけ広範な系に適用できる方法論を確立することは、非線形振動論における究極のテーマであり、機械・構造物の動的挙動を把握し、設計への明確な指針を与える上でも重要な課題である。特に、その実現が待たれている系の一つに区分線形振動系(以下、単に区分線形系と略記)がある。区分線形系は、一般の非線形特性の折れ線関数による近似系とみなされるのみならず、ガタや摩擦のような強い非線形性の簡潔なモデルとしても重要である。また、名領域ごとに一般解が厳密に求められ、局所的には線形系に対する解析法が適用可能であるため、従来、非線形振動系のなかでも特異なクラスとして位置付けられ、Duffing系やVan der Pol系などよりも解析しやすい対象とみなされてきた⁽¹⁾。そのため、分岐現象やカオスの存在条件に関する、厳密な解析の可能性も指摘され、自律系においては一定の成果を収めている⁽²⁾。

このような期待にもかかわらず、区分線形系の解析は、非自律系においては、必ずしも目立った進展をみていないように思われる。その理由の第一は、疑いなく、いわゆる「切り換え時間の問題」、すなわち「局所解が各領域の境界を通過する時間が、陰関数によって定義され、これを求めるためには超越方程式を解かなければならない」点にあると言える⁽³⁾。したがって、これまで区分線形系の解析では、局所解が厳密に求められることのみが強調され、「解全体がどのような構造になるのか」という大局的視点から一般解を考察した研究は、著者らの知る限り見当たらない。また、近年著しい発展を遂げている力学系理論は、そのほとんどが、十分に滑らかな特性を有する非線形系を主な研究対象としてきた背景から⁽⁴⁾、Duffing系などの解析に通常用いられる数学的手法の適用が、区分線形系に対しては一般に困難である。このような基礎理論の不備が、区分線形系の解析の立ち遅れを助長してきた第二の要因と考えられる。このことから、区分線形系の解析を、非線形振動現象一般の解明へ向けての一つの突破口とするためには、上記の諸問題をいかに克服するかが、最大の課題となっている。

本論文において著者らは、従来の接合法とは全く異なる区分線形系の一般解の表記法を提案し、これを基

* 平成2年12月12日 第40回応用力学連合講演会において講演、原稿受付 平成3年2月19日。

^{*1} 正員、茨城大学工学部 (〒316 日立市中成沢町4-12-1)。

^{*2} 正員、東京都立大学工学部 (〒192-03 八王子市南大沢1-1)。

に非線形振動論における新たな方法論の展開を試みる。特に、非線形性が不連続な場合を考察することにより、線形系の応答と、非線形性に依存して決まる仮想的なフィードバック系列による応答との重ね合わせによって、一般解が大域的に表現できることを明らかにする⁽⁵⁾。また、この表現から、定常状態や Poincaré 写像に解析的表現を与える標準形を導き、計算機シミュレーションによって理論の有効性を検証した。

2. 区分線形系の記述と問題提起

2.1 系の記述 本論文では、式(1)の形の運動方程式で表される非線形振動系を考察する。

$$\ddot{x} + g(\dot{x}) + f(x) = u(t) \quad \dots\dots\dots (1)$$

$f(x)$, $g(\dot{x})$ は区分線形関数で、 $u(t)$ は周期的な外力であり、ここでは正弦波であるとしておく。上式は、以下のように一階正規形で表現できる。

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \quad \dot{y} = -f(x) - g(y) + u \\ \dot{u} &= -\omega u, \quad \dot{v} = \omega u \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (2)$$

ここに、

$$u = B \cos \omega t, \quad v = B \sin \omega t$$

特に、領域の境界で $f(x)$, $g(y)$ が不連続になる場合を考える。このような非線形性で表わされる最も基本的なモデルには、図1(a)のように、初期たわみ d による圧縮を受けた1自由度ばね・質点系がある。この系は図1(b)に示すような復元力特性 $F(Z)$ を有し、正弦波外力が作用する場合の運動方程式は、次式となる。

$$mZ'' + cZ' + F(Z) = A \cos \omega_f \tau \quad \dots\dots\dots (3)$$

ここで、 $(\)'$ は時間 τ での微分である。以下のように無次元化することにより、このモデルは式(1)の系に帰着できる。

$$\omega = \omega_f / \sqrt{k/m}, \quad t = \tau \sqrt{k/m}, \quad (\dot{\ }) = d/dt(\)$$

$$B = A/(kd), \quad x = Z/d$$

また、図2(a)のようなクーロン摩擦系の、停滞を伴わない場合の運動方程式は、

$$mZ'' + G(Z') + kZ = A \cos \omega_f \tau \quad \dots\dots\dots (4)$$

ここに $G(Z')$ は図2(b)のような動摩擦係数 μ_k の非線形摩擦力である。以下の無次元化によって、このモデルも式(1)の系に帰着することができる⁽⁶⁾(図1の系と重複するものは省略した)。

$$B = A/(\mu_s mg), \quad x = KZ/(\mu_s mg), \quad \mu = \mu_k/\mu_s$$

2.2 接合法による一般解の局所表現

接合法とは、局所にのみ真の解と一致する部分解をつなぎ合せて、一般解を表記するものであり、区分線形系の解を表す手段として現在までに知られている唯一の方法である。図1の系の場合、 $x > 0$ である領域を X_+ で表すことにすると、 $x(t_0) > 0$, $\dot{x}(t_0)$, または $x(t_0) = 0$, $\dot{x}(t_0) > 0$, を初期値とし、次に領域境界 $x = 0$ を通過するまでの区間 $t \in [t_0, t_1]$ に成り立つ解は、次式のよう求められる⁽⁷⁾。

$$\begin{aligned} x_{0,1}(t) &= \exp(-\zeta(t-t_0)) [C_1^+ \cos(\Omega(t-t_0)) \\ &\quad + C_2^+ \sin(\Omega(t-t_0))] + \Gamma \cos(\omega t + \alpha) - 1 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (5)$$

ここで記号は、

$$\zeta = c/(2\sqrt{km}), \quad Q = \sqrt{(1-\omega^2)^2 + (2\zeta\omega)^2}$$

$$\Omega = \sqrt{1-\zeta^2}, \quad \Gamma = \frac{B}{Q}, \quad \alpha = \tan^{-1} \left[\frac{-2\zeta\omega}{1-\omega^2} \right]$$

$$x_0 = x(t_0), \quad y_0 = y(t_0), \quad C_1^+ = x_0 + 1 - \Gamma c_0$$

$$C_2^+ = \frac{1}{\Omega} \{ \zeta(x_0 + 1) + y_0 + \Gamma(\omega s_0 - \zeta c_0) \}$$

$$c_0 = \cos(\omega t_0 + \alpha), \quad s_0 = \sin(\omega t_0 + \alpha)$$

また、 $x < 0$ である領域を X_- で表わすと、 $x(t_1) < 0$, $\dot{x}(t_1)$, または $x(t_1) = 0$, $\dot{x}(t_1) < 0$, を初期値とし、次に領域境界を通過するまでの区間 $t \in [t_1, t_2]$ に成り立つ解は、

$$\begin{aligned} x_{1,2}(t) &= \exp(-\zeta(t-t_1)) [C_1^- \cos(\Omega(t-t_1)) \\ &\quad + C_2^- \sin(\Omega(t-t_1))] + \Gamma \cos(\omega t + \alpha) + 1 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (6)$$

のように書ける。ここで記号は、

$$x_1 = x(t_1), \quad y_1 = y(t_1), \quad C_1^- = x_1 - 1 - \Gamma c_1$$

図1 初期圧縮ばね・質点系

図2 クーロン摩擦振動系

$$C_2 = \frac{1}{\Omega} \{ \zeta(x_1 - 1) + y_1 + F(\omega s_1 - \zeta c_1) \}$$

$$c_1 = \cos(\omega t_1 + \alpha), \quad s_1 = \sin(\omega t_1 + \alpha)$$

特に, $x_{0,1}(t_1) = x_{1,2}(t_1) = 0$, $\dot{x}_{0,1}(t_1) = \dot{x}_{1,2}(t_1)$ であるとすれば, 図3に示すように, $x_{0,1}(t)$ と $x_{1,2}(t)$ を局所的につなぎ合わせた解として, $x_{0,2}(t)$ が求められたことになる。

2.3 問題の設定 区分別形系において解が厳密に求められるというのは, 切換え時点での系の状態を初期条件とする局所的な解が, 式(5), (6)のような形で個別に求められることを意味している。言うまでもなく, 解 $x_{0,1}(t)$, $x_{1,2}(t)$ は, それぞれ区間 $t \in [t_0, t_1]$, $t \in [t_1, t_2]$ でのみ真の解と一致する。よって, ここから得られるのは常にローカルな情報のみであり, 隣接する軌道相互の関係, さらに, 解全体の構造については何の情報も与えない。また, 切換え時点ごとに各局所解の終端条件と初期条件とを符合させることにより, 原理的にはいくらでも解を延長していくことができるが, この表現方法に従う限り, 切換え時間の問題による拘束から逃れることは明らかに不可能である。

Chua らは, 電子回路における非線形素子のモデリングの一つである区分別形化法に関連して, 系の非線形性を近似する区分別形特性を, 一つの関数で簡潔に記述できる標準形を導いた⁽⁶⁾。これは, 振動系で言えば, 運動方程式における非線形項を表す区分別形関数の大域表現に該当する。それでは, 「区分別形系の一般解に対し, これに相当する大域表現は可能であろうか」と考えてみることができる。しかしながら, 一般解の大域表現は, 局所解のすべての切換え時間が既知でないかぎり厳密には不可能である。そこで, 本論文では, 「可能な限り効率の良い数値的アルゴリズムによって, すべての切換え時間が既知となったとき, 一般解が大域的にどのような表現となるか」という問題を提起する。これは, これまで取り上げられることのなかった視点である。

図3 一般解の局所解による表現

また, 力学系理論では, 連続力学系は Poincaré 写像によって離散力学系へ変換して研究されるのが一般的である。線形系の場合, 一般解を外力の周期 $T_\omega (= 2\pi/\omega)$ ごとにサンプリングすることによって, Poincaré 写像が厳密に得られることが知られている⁽⁴⁾。そこで, もし一般解の大域表現が求められたならば, 区分別形系においても Poincaré 写像を陽に表わせるのではないかと予想される。これらの問題に解答を与えることが本論文の目的である。

3. 一般解の大域表現と標準形

3.1 擬フィードバック形式による区分別形系の形式的線形化 以下では, 非線形性はすべて一価関数で表されるとし, (摩擦振動系の停滞を伴う解のように) 仮想的に時間を逆転したとき, 解が一意に特定できない場合を“退化した場合”として, 当面の考察から除外する。この前提の下では, $f(x)$, $g(y)$ はおのおの, 次式のように線形部分と非線形部分の和に分解できる(図4参照)。

$$\begin{aligned} f(x) &= \bar{f}(x) + \tilde{f}(x), \quad \bar{f}(x) = x, \dots\dots\dots (7) \\ g(y) &= \bar{g}(y) + \tilde{g}(y), \quad \bar{g}(y) = 2\zeta y \end{aligned}$$

これらは, どこを線形領域とするかに依存して決まり, その意味で任意性があるので, 系の種類に応じて適宜選択するものとする。ここで, 系の非線形項 $\tilde{f}(x)$, $\tilde{g}(y)$ を仮想的な外力とみなし, 図5のような形式へ系を変換することを考える。この表記法そのものは目新しいものではなく, アナログ計算機で区分別形系をシミュレートする場合に等価的にこの表現が使われる。この表現では, 非線形性は状態に依存してフィードバックされる外力に変換され, 系は形式的に線形化される。また, 系の応答が周期解であれば, フィードバック信号も周期列になり, 応答がカオス解になれば, カオスの信号列がフィードバックされる。この表記法には特に呼び名はないようであるので, 以後, 便宜的に, “擬フィードバック形式(pseudo-feedback form)”と呼ぶことにする。

3.2 初期圧縮ばね・質点系 説明の便宜のため, まず, 図1の振動系について, 大域表現の誘導過程を

図4 区分別形関数の線形要素と非線形要素への分解

示す。この場合、系の非線形性は、次式のような区分線形関数の極限で表される。

$$\begin{aligned}\tilde{f}(x) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\left| \frac{x+\varepsilon}{2\varepsilon} \right| - \left| \frac{x-\varepsilon}{2\varepsilon} \right| \right] \\ &= \text{sgn}(x) \dots\dots\dots (8)\end{aligned}$$

今、 $x(t_0)$, $\dot{x}(t_0)$ を初期値とする解が、図6に示すように、時間 $t_1, t_2, \dots, t_n$ で順次、領域境界である $x=0$ を通過する状況を考える。以後、切換え時間、すなわち解が領域の境界に再び戻ってくる時間を再帰時間と呼ぶことにする。2・2節で言及したように、従来、区分線形系の局所解は、おおむね式(5)、(6)のように

図5 擬フィードバック形式による区分線形振動系のブロック線図

図6 標準形の誘導過程

過渡応答を正弦波と余弦波の一次結合の形で表記するのが普通である。しかし、この表記法では、初期値応答、初期入力応答、および非線形性の影響が混在しており、見通しの良い表現ではない。そこで、理論を明解にし、計算の手間を軽減するために、状態遷移作用素 $\mathcal{T}_{j,i}(t)$ と、外力による定常応答 $u(t)$ を以下に導入する。

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{j,i}(t) &\equiv e^{-\zeta(t-t_j)} \{ \cos(\Omega(t-t_j)) \\ &\quad + \frac{\zeta}{\Omega} \sin(\Omega(t-t_j)) \}, t \in [t_j, t_i] \dots\dots\dots (9)\end{aligned}$$

$$u(t) \equiv \Gamma \cos(\omega t + a) \dots\dots\dots (10)$$

状態遷移作用素には、次の関係式が成り立つ。

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{k,i}(t) &= \mathcal{T}_{j,i}(t) \mathcal{T}_{k,j}(t_j) - \dot{\mathcal{T}}_{j,i}(t) \mathcal{T}_{k,j}(t_j) \\ \dot{\mathcal{T}}_{k,i}(t) &= \mathcal{T}_{j,i}(t) \dot{\mathcal{T}}_{k,j}(t_j) - \mathcal{T}_{j,i}(t) \ddot{\mathcal{T}}_{k,j}(t_j) \dots\dots\dots (11)\end{aligned}$$

また、時間 t_0 の直後に、変位 $x(t)$ が X_+ , X_- のどちらの領域に存在すべきかを決定するために、一般化された符号関数 σ を導入する。

$$\sigma(x, \dot{x}, t) \equiv \sum_{i=0}^2 \left[\prod_{j=0}^{i-1} \delta(x^{(j)}(t)) \right] \text{sgn}(x^{(i)}(t)) \dots\dots\dots (12)$$

また、次の略号を採用する。

$$\sigma_0 \equiv \sigma(x_0, y_0, t_0) \dots\dots\dots (13)$$

ここで、各記号関数は、以下のように定める。

$$\begin{aligned}\text{sgn}(t) &\equiv \begin{cases} +1; (t > 0) \\ 0; (t = 0) \\ -1; (t < 0) \end{cases} \\ s(t) &\equiv \begin{cases} 1; (t \geq 0) \\ 0; (t < 0) \end{cases} = \frac{1 + \text{sgn}(t) + \delta(t)}{2} \\ \delta(t) &\equiv \begin{cases} 1; (t = 0) \\ 0; (t \neq 0) \end{cases} = 1 - (\text{sgn}(t))^2\end{aligned}$$

また、総和および積の記号と添字との関係は、次の規約に従うものとする。

$$\sum_j = 0, \prod_j = 1$$

上記の記法を使って、 $f(x) = \tilde{f}(x)$ とした線形系の応答は次式のように、初期値応答、初期入力応答、外力による定常応答の和で表せる。

$$\begin{aligned}\bar{x}_{0,i}(t) &= \mathcal{T}_{0,i}(t) [x_{0,i}(t_0) - u(t_0)] \\ &\quad - \dot{\mathcal{T}}_{0,i}(t) [\dot{x}_{0,i}(t_0) - \dot{u}(t_0)] + u(t) \dots\dots\dots (14)\end{aligned}$$

以上の準備のもとに、区間 $t \in [t_0, t_1]$ での局所解は、擬フィードバック形式の観点から、線形系の応答 $\bar{x}_{0,1}(t)$ と、非線形性 $\tilde{f}(x)$ により、変位 $x_{0,1}(t)$ の正負に応じてフィードバックされる単位ステップ入力によるインディシャル応答との和で表される。

$$x_{0,1}(t) = \bar{x}_{0,1}(t) - \sigma_0 s(t - t_0) \{1 - \mathcal{T}_{0,1}(t)\} \dots (15)$$

式(14), (15)は, 状態を推移させる作用素として一般解を捉えた表記法である。同様に, 区間 $t \in [t_1, t_2]$ での部分解は,

$$x_{1,2}(t) = \bar{x}_{1,2}(t) + \sigma_0 s(t-t_1) \{1 - \mathcal{J}_{1,2}(t)\} \dots (16)$$

のように表される。式(15)の t_1 での値を式(16)の初期値へ代入して, 式(11), (14)の関係式を利用して変形・整理することにより, 区間 $t \in [t_0, t_2]$ における解の表現が得られる。

$$x_{0,2}(t) = \bar{x}_{0,2}(t) - \sigma_0 s(t-t_0) \{1 - \mathcal{J}_{0,1}(t)\} + 2\sigma_0 s(t-t_1) \{1 - \mathcal{J}_{1,2}(t)\} \dots (17)$$

上式の第3項の係数が2倍されているのは, t_0 で発生したステップ入力を打ち消し, さらに新しい領域へ解を移行させるために, 時間 t_1 では, 二つのフィードバックが同時に作用しなければならないためと解釈できる。

この操作を, 順次 t_2 から t_n まで繰返すことにより, 区間 $t \in [t_0, t_n]$ での一般解は, 次式の形式で書くことができる。

$$x_{0,n}(t) = \bar{x}_{0,n}(t) - \sigma_0 s(t-t_0) \{1 - \mathcal{J}_{0,n}(t)\} + 2\sigma_0 \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} \cdot s(t-t_k) \{1 - \mathcal{J}_{k,n}(t)\} \dots (18)$$

式(18)は, 一般解を作用素としての機能で分解した表現であり, 退化した場合を除いて, この系に存在し得るすべての解の形式を, 領域によらず大域的に決定することを主張するものである。本論文ではこれを“大域標準形”, または“大域正準形”と呼ぶことにする。この標準形は切換え時点での系の速度を陽に含んでいない。接合法では再帰時間がすべて既知になった後でも, 解を一意に特定するためには, 局所解の初期値として, 再帰時間とその速度の2種の情報を必要とした。しかし, 一般に振動系の解は, 初期値が与えられれば一意的に決まり, 特に区分線形系では, 途中の領域通過時間さえ特定できれば, そのときの速度は計算できるはずである。したがって標準形では, 解を決定するために要するパラメータの数を, 接合法に比較して半減できることがわかる。

また, 大域標準形においては, 解が領域境界を通過する場合と, 接する場合とは明確に区別される。すなわち解が境界を通過せずに接する場合, 解の切換えは起こらず, したがって擬フィードバックも発生しない。

3.3 クーロン摩擦系 停滞を伴わない場合は, 系の非線形性は動摩擦力 $\bar{g}(y)$ のみとなり, 次式のよ

うな区分線形関数の極限で表せる。

$$\bar{g}(y) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{y+\varepsilon}{2\varepsilon} - \frac{y-\varepsilon}{2\varepsilon} \right] = \text{sgn}(y) \dots (19)$$

速度が反転する瞬間の時間の系列 $t_i (i=1, 2, \dots, n)$ を再帰時間とし, さらに, 次の条件の成立を仮定する。

$$|x(t_i) - B \cos(\omega t_i)| > 1 \dots (20)$$

また, 時間 t_0 の直後に解が正負どちらの向きに運動すべきかを定める符号関数 ρ を,

$$\rho(\dot{x}, t) \equiv \sum_{i=1}^2 \left[\prod_{j=1}^{i-1} \delta(x^{(j)}(t)) \right] \cdot \text{sgn}(x^{(i)}(t)) \dots (21)$$

と定義し, 次の略号を用いる。

$$\rho_0 \equiv \rho(y_0, t_0) \dots (22)$$

3.2節で求められた結果において σ を $\mu\rho$ と読み替えることにより, 無停滞振動に関する一般解の標準形として,

$$x_{0,n}(t) = \bar{x}_{0,n}(t) - \mu\rho_0 s(t-t_0) \{1 - \mathcal{J}_{0,n}(t)\} + 2\mu\rho_0 \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} \cdot s(t-t_k) \{1 - \mathcal{J}_{k,n}(t)\} \dots (23)$$

が得られる。また, 次章以降のすべての結果において, 同様の読み替えによりクーロン摩擦系に関する標準形を誘導できるので, 以下では初期圧縮ばね・質点系についての結果のみを示す。

以上の2種の系において, 標準形の第2項, 第3項である擬フィードバック系列による応答の総和項は非線形性による影響分を表し, 系が線形系からどれだけ離れているかを定量化したものと考えられる。よって, この項は非線形性を表わす関数の特性の違いを反映しており, 区分線形系の解の統一的な分類の指標を与えていると言える。

4. 正準定常応答と正準 Poincaré 写像

4.1 正準定常応答 3章では, 任意の初期値から出発する解を大域的に表す標準形が求められたわけであるが, 実用上は, 十分に時間が経過した後に系がいき着く, 定常応答の表示式が必要とされることも多い。系の無限時間後の状態を誘導するためには, 標準形の初期値が無限の過去に存在すると考えれば良いはずである。そこで, 式(18)の初期条件を擬フィードバック応答列へ順次変換することによって, 初期時間を t_0 から t_{-m} へ変更し, ここの目的に都合の良い形に整理すると, 区間 $t \in [t_{-m}, t_n]$ における標準形が得られる。

$$x_{-m,n}(t) = \bar{x}_{-m,n}(t) - \sigma_0 [(-1)^{-(m-1)} s(t-t_{-m}) \{1 - \mathcal{J}_{-m,n}(t)\}]$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{k=-m}^{n-2} (-1)^k \{s(t-t_k) - s(t-t_{k+1})\} \\
& + 2 \sum_{k=-m}^{n-1} (-1)^{k-1} s(t-t_k) \mathcal{J}_{k,n}(t) \\
& + (-1)^{n-1} s(t-t_{n-1}) \dots\dots\dots (24)
\end{aligned}$$

式(24)の第2項は、初期フィードバックによる過渡成分を表わしており、その影響は $m \rightarrow \infty$ の極限では零にできる。また、第5項は解の切換えに応じて符号を反転する擬フィードバックによる定在項であり、 $n \rightarrow \infty$ により無限の未来に先送りできる。このようにして、初期値の直接の影響を抹消することにより、定常状態を表す標準形〔式(25)〕が求められる。

$$\begin{aligned}
x(t) = & \mathcal{U}(t) - \sigma_0 \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} [\{s(t-t_{2k}) - 2s(t-t_{2k+1}) \\
& + s(t-t_{2k+2})\} - 2\{s(t-t_{2k})\mathcal{J}_{2k}(t) \\
& - s(t-t_{2k+1})\mathcal{J}_{2k+1}(t)\}] \dots\dots\dots (25)
\end{aligned}$$

この表現は、一見すると初期条件の影響が完全に消去されているかに見える。しかし、一般に非線形系においては、初期条件の相違によって異なる複数の定常状態が共存し得ることを考慮すると、単一の初期値を可算無限個の再帰時間系列へ分解したものと、解釈すべきであることがわかる。以下では、これを“定常正準形”(steady canonical form)、または“正準定常応答”(canonical steady response)と呼ぶことにする。正準定常応答は、周期解のみならず、カオスをも統一的に表していると考えられる。局所解をベースにした接合法では、定常状態を直接誘導することは不可能であることは、特筆に値する。

4.2 Poincaré写像の解析表現 Poincaré写像とは、系がある状態変数に関して同相になるごとに状態変数をサンプリングすることにより、 n 次元力学系を $n-1$ 次元力学系に帰着させる手法である⁽⁴⁾。そのような状態変数の集合を Poincaré セクション Σ と呼び、これは一般に $n-1$ 次元超曲面になる。Duffing 系

をはじめとするほとんどの非線形強制振動系は、系があらかじめ定められた外力の位相 ϕ_0 と同相になる状態点の集合

$$\Sigma^T \equiv \{(x, y, \phi) \in R^2 \times S^1 | \phi = \phi_0 \in (0, T_\omega)\}$$

を Poincaré セクションとして、外力の周期 T_ω ごとに状態変数

$p_n \equiv (x_n, y_n) = (x(\phi_0 + nT_\omega), y(\phi_0 + nT_\omega)) \in \Sigma^T$ をサンプリングする写像 T によって解析されるのが普通である〔図7(b)〕。すなわち、

$$P_{n+1} = T(p_n), T: \Sigma^T \rightarrow \Sigma^T \dots\dots\dots (26)$$

これは、単に Poincaré 写像と呼ばれることが多いが、以下では「位相再帰写像(phase return map)」と呼んでおく。

一方、Shaw, Holmes による衝突振動系のカオスの研究⁽⁹⁾以降、区分別形系に関する一連の論文は、ほとんど例外なく、領域境界

$$\Sigma_+ \equiv \{(x, y, \phi) \in R \times R^+ \times S^1 | x=0, y>0\}$$

$$\Sigma_- \equiv \{(x, y, \phi) \in R \times R^- \times S^1 | x=0, y<0\}$$

を Poincaré セクションとし、再帰時間ごとに状態変数

$$q_n \equiv (y_n, \phi_n) \in \Sigma_+, q_{n+1/2} \in \Sigma_-, \phi_n \equiv t_n \bmod T_\omega$$

をサンプリングする写像 P を Poincaré 写像とするのが慣例となっている。すなわち、領域境界を通過する瞬間の解を次の再帰時間へ写す写像

$$q_{n+1/2} = P_+(q_n), P_+: \Sigma_+ \rightarrow \Sigma_- \dots\dots\dots (27)$$

$$q_{n+1} = P_-(q_{n+1/2}), P_-: \Sigma_- \rightarrow \Sigma_+ \dots\dots\dots (28)$$

を「半再帰写像(half return map)」と定義し、その合成写像としての「一巡再帰写像(full return map)」

$$q_{n+1} = P(q_n) = P_- \circ P_+(q_n), P: \Sigma_+ \rightarrow \Sigma_+ \dots\dots\dots (29)$$

が、Poincaré 写像の定義とされてきた〔図7(a)〕。これは通常、Poincaré return map と呼ばれることが多いが、 T との差別化を明確にするために、「境界再帰写像」と呼ぶことにする。このように、区分別形系の Poincaré 写像として P が利用されてきたのは、 T を計算するためには原義的に P_+, P_- を計算しなければならないこと、また、特にカオスの場合、一周期間の解の境界通過回数が多くなるため、 T よりも短時間にアトラクタの概形が得られることが主な理由と考えられる。しかし、 T, P はそれぞれ、解の周期、境界通過回数に関する情報を与えることや、特に P では、アトラクターに見かけの分裂が生じることなどの理由から、これらは区分別形系においては相補的性格のものとして位置付けるのが妥当である。そこで、本論文の次なる目標は、これらの Poincaré 写像の統一的な扱いを可能にする大域的表現を誘導することである。ま

図7 Poincaré 写像の定義

ず再帰時間関数 ψ を次式で定義する。

$$\psi_+(x_k, y_k, t_k) = \inf\{t > t_k | x(t; p_k, t_k) = 0\}$$

$$\sigma_k = \pm 1, \sigma_{k+1} = \mp 1\} : \text{複号同順} \dots\dots\dots (30)$$

$$t_{k+1} = \begin{cases} \psi_+(x_k, y_k, t_k); \sigma(x_k, y_k, t_k) = +1 \\ \psi_-(x_k, y_k, t_k); \sigma(x_k, y_k, t_k) = -1 \end{cases}$$

$$= \psi_{\sigma(x_k, y_k, t_k)}(x_k, y_k, t_k) \dots\dots\dots (31)$$

ψ の実際の値は超越方程式の根として数値的に計算される。また、以下の簡略記法を用いる。

$$\psi(p_n) = \psi_{\sigma(p_n, \phi_0)}(p_n, \phi_0) \dots\dots\dots (32)$$

$$\psi(q_k) = \psi_{\sigma(0, q_k)}(0, q_k) \dots\dots\dots (33)$$

再帰時間関数と大域標準形から、半再帰写像 P_+ , P_- と、一巡再帰写像 P は、それぞれ

$$P_{\sigma(q_k)}(q_k) = [\psi_{\sigma(q_k)}(q_k), \bar{y}(\psi_{\sigma(q_k)}(q_k); q_k) + \sigma(q_k) \mathcal{J}(\psi_{\sigma(q_k)}(q_k) - t_k)] \dots\dots\dots (34)$$

$$P(q_k) = [\psi_-(\psi_+(q_k)), \bar{y}(\psi_-(\psi_+(q_k)); q_k) + \mathcal{J}[\psi_-(\psi_+(q_k)) - t_k] - 2\mathcal{J}[\psi_-(\psi_+(q_k)) - \psi_+(q_k)]] \dots\dots\dots (35)$$

と書くことができる。

従来の部分解による方法では、 T , P から互いに他を求めるためには、実際に P の合成写像を順次計算していく以外に方法がなかった。したがって、位相再帰写像 T は図8に示すように、 P の合成写像としてのみ表現できる。一方、大域正準形によれば、解の区間 $\phi \in [\phi_0, \phi_0 + T_\omega]$ で境界通過回数を N とするとき、外力の周期 T_ω で一般解をサンプリングするだけで、次式のように直接 T を表現できることがわかる。

$$x(\phi_{n+1}; p_n) = \bar{x}(\phi_n + T_\omega; p_n) - \sigma_n \{ [1 - \mathcal{J}(T_\omega)] - 2 \sum_{k=1}^{N(p_n)} (-1)^{k-1} [1 - \mathcal{J}(T_\omega - (\phi_k - \phi_0))] \} \dots\dots\dots (36)$$

$$y(\phi_{n+1}; p_n) = \bar{y}(\phi_n + T_\omega; p_n) + \sigma_n \{ \mathcal{J}(T_\omega) + 2 \sum_{k=1}^{N(p_n)} (-1)^{k-1} \mathcal{J}(T_\omega - (\phi_k - \phi_0)) \} \dots\dots\dots (37)$$

式(34)～(37)は、Poincaré 写像の解析的表現を与えており、これらを正準 Poincaré 写像(Canonical

図8 境界再帰写像 P と位相再帰写像 T の関係

Poincaré mapping) と呼ぶことにする。接合法による局所表現のみでは、特に、一巡再帰写像と、位相再帰写像の解析的表現は不可能であることに留意されたい。

また、標準形によって、境界再帰写像と、位相再帰写像に、

「 $P_{\sigma(q_k)}$: 新しい擬フィードバック応答の生成」

「 T : 外力の1周期間に生成される擬フィードバック応答列の総和」。

という解釈を与えることができる。

4.3 計算機シミュレーション 前節までの理論の有効性を明らかにするために、特に、計算機シミュレーションによって数値的に求めた再帰時間系列から、4.2節で述べた方法により Poincaré 写像を再構成した結果の一例を図9に示す。図9(a)は式(35)による境界再帰写像 P , 図9(b)は式(36), (37)による位相再帰写像 T の正準 Poincaré 写像である。図示のように、カオス的アトラクタは完全に再現されており、境界再帰写像をもとにシミュレーションから直接求めたアトラクタの形状との差異は、図からは認められなかった。ただし、写像 T の計算は、丸め誤差の累積を

(a) 境界再帰写像 P

(b) 位相再帰写像 T

図9 正準 Poincaré 写像によるカオス的アトラクタの再構成

$\beta=1.2, \omega=0.5, \zeta=0.05$

避けるため、初期値からのすべての再帰時間系列を使って応答を求める代わりに、 T_0 時間ごとに初期値を更新する方法を採った。以上の結果から、区分線形系では、再帰時間の系列こそが最も基本的な状態量であり、位相再帰写像などは、これを用いて容易に構成できることがあらためて明らかになった。

5. 結 言

本研究では、従来の接合法に代わる新しい区分線形系の一般解の表記法を提案し、以下の知見を明らかにした。

(1) 非線形性が不連続である区分線形系の一般解は、線形系の応答と、非線形性に依存して決まる仮想的なフィードバック系列による応答との重ね合わせによって大域的に表現できる。

(2) この大域表現は、退化した場合を除く一般解のあらゆる形式を、再帰時間のみをパラメータとして完全に決定するという意味で標準形と言える。初期圧縮ばね・質点系とクーロン摩擦系について、その具体的な表示式を提示した。

(3) 標準形における擬フィードバック応答列の総和項は、非線形性の影響により、系が線形系からどれだけ離れているかを定量化したものと考えられ、これは区分線形系の解の統一的な分類のためのクライテリアを与えている。

(4) 標準形から初期値の直接の影響を抹消することにより、定常状態の正準系が導かれた。

(5) 区分線形系では、再帰時間をパラメータとすることにより、Poincaré 写像を標準形によって解析的に表現できる。

本論文において誘導した各種の標準形は、区分線形系に対する新しい解析の可能性を与えることが期待される。例えば、周期解が実現している場合には、正準形の第2(第3)項は周期的なフィードバック応答列にな

り、これを定量的に評価すれば、定常周期解が得られるはずである。著者らは、現在この観点に立って、正準定常応答からの周期解の新しい解法の可能性を検討している。その具体的な求解手順などについては、別報で詳しく扱っていく予定である。また、衝突振動系の場合にも、本論文の手法がそのまま適用できることがわかっており、標準形も既に誘導しているが、紙数の関係から続報で詳細を明らかにする。さらに、非線形性が領域境界で不連続とは限らない、より一般的な区分線形系の場合と、停滞を伴うクーロン摩擦系の詳細な解析については、今後の課題としたい。

最後に、本研究を遂行するにあたって、終始、暖かい激励をいただいた、茨城大学工学部・浅野直輝教授、並びに、玉川大学工学部・矢ヶ崎一幸講師に厚くお礼申し上げる。

文 献

- (1) 樫木, 非線形振動論, 応用力学講座, (1958), 共立出版.
- (2) Chua, L. O., Komuro, M. and Matsumoto, T., The Double Scroll Family-Part I: Rigorous Proof of Chaos, *IEEE Trans., CAS-33*(1986), 1072-1118.
- (3) 清水, 非線形振動論, (1965), 培風館.
- (4) Wiggins, S., *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*, (1990), Springer.
- (5) 今村・鈴木, Unified Cell Mapping による区分線形系の Global Analysis, 第 67 期通常総会講演会講演論文集, (1990), 203-205.
- (6) Shaw, S. W., On the Dynamic Response of a System With Dry Friction, *J. Sound and Vibr.*, **108**(1986), 305-325.
- (7) Shaw, S. W. and Tung, P. C., The Dynamic Response of a System With Preloaded Compliance, *Trans. ASME, Ser. E*, **110** (1988), 278-283.
- (8) Chua, L. O. and Kang, S. M., Section-Wise Piecewise-Linear Functions: Canonical Representation, Properties, and Applications, *Proc. IEEE*, **65-6**(1977), 915-929.
- (9) Shaw, S. W. and Holmes, P. J., A Periodically Forced Piecewise Linear Oscillator, *J. Sound and Vibr.*, **90** (1983), 129-155.