多入力線形デジタル制御系に対する 固定終端レギュレータの新しい最適性の条件*

近藤 英二^{*1}, 清田 高德^{*1}, 須永 照雄^{*1}

New Condition of Optimality for Multi-Input Linear Digital Regulator with Fixed Terminal State

Eiji KONDO, Takanori KIYOTA and Teruo SUNAGA

This paper discusses the regulator problem with the fixed terminal state for multi-input linear digital systems. First, for the general additive performance index, the fundamental structure of the regulator which drives the state to zero within a finite time is obtained. This problem is divided into three phases: the new free terminal state problem in the first phase, the new free terminal state problem for the time-variant system with the time-variant structure of the new input in the second phase, and the constant gain special deadbeat control in the third phase. That is, the new condition of optimality of the regulator problem with the fixed terminal state is expressed by the special deadbeat control and the induced regulator problem with the free new terminal state. The new solution of the deadbeat linear-quadratic optimal control problem is obtained to show the effectiveness of the new condition of optimality

Key Words: Automatic Control, Digital Regulator, Condition of Optimality, Optimal Control, Fixed Terminal State

1. ま え が き

高精度レギュレータの目的の一つは、有限の制御時間で状態を零にすることである。しかし、終端状態が零に固定される最適レギュレータ問題（以後、固定終端レギュレータ問題と呼ぶ）は、評価関数の具体的な形が与えられても、それらを数値的あるいは解析的に解くことは、終端状態が自由な自由終端レギュレータ問題より一般に難しいとされている⁽¹⁾。また、二次形式評価関数に対しても、制御対象の初期状態に依存しない有界なゲインによる状態フィードバック形式の最適解を求めることは難しいとされていた⁽¹⁾。著者らは、一入力および多入力線形デジタル制御系に対し、零終端状態を満足する入力の一般形⁽²⁾⁽³⁾を用いて、入力エネルギーや二次形式評価関数を最小化する固定終端レギュレータ問題を解いた^{(2)(4)~(6)}。さらに、一入力線形デジタル制御系に対しては、一般の加法性評価関数に対する固定終端レギュレータ問題の基本構造を明らかにし、新しい最適性の条件を求めた⁽⁷⁾。一入力固定終端レギュレータ問題は、一定ゲインのデッドビート制御^{(8)~(11)}と新しく誘導された自由終端レギュレー

タ問題の解により表現される。しかし、多入力線形デジタル制御系に対しては、一般の加法性評価関数に対する固定終端レギュレータの基本構造や、新しい最適性の条件は求まっていない。

本論文では、多入力線形デジタル制御系において、一般の加法性評価関数に対する固定終端レギュレータの基本構造を明らかにし、新しい最適性の条件を求める。さらに、その有効性を明らかにするために、二次形式評価関数に対する固定終端レギュレータ問題（以後、デッドビート LQ 最適制御⁽⁵⁾⁽⁷⁾と呼ぶ）の新解法を示す。

2. 固定終端レギュレータ問題

制御対象として、次の可到達な多入力線形定常離散時間系を考える。

$$\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \dots\dots\dots (1)$$

ここで、 $\mathbf{x}(t)$ は $n \times 1$ 状態ベクトル、 $\mathbf{u}(t)$ は $m \times 1$ 入力ベクトル、 $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ はそれぞれ $n \times n$ と $n \times m$ の定数行列とし、 t は零または正の整数とする。なお、 $\mathbf{B}$ は最大階数 m を持つと仮定するが、 $\mathbf{A}$ の正則性は仮定しない。

このとき、固定終端レギュレータは、終端状態固定条件

* 原稿受付 平成3年1月23日。

*¹ 正員、九州大学工学部（〒812 福岡市東区箱崎6-10-1）。

$$\mathbf{x}(\tau)=0 \quad \cdots \cdots \cdots (2)$$

を満足しなければならない。

まず, Luenberger の可到達正準形に関する補題を述べる。

[補題] 可到達性と B が最大階数 m を持つという仮定より, A と B が与えられると, 可到達指数の族と呼ばれる m 個の正の整数が一意的に定まる。この不変量を順序付けして n_i ($i=1, \dots, m$) とする。すなわち,

$$n_1 + \dots + n_m = n \quad \cdots \cdots \cdots (3)$$

$$n \geq n_1 \geq \dots \geq n_m \geq 1 \quad \cdots \cdots \cdots (4)$$

とする。さらに, 式(1)は, 適当な座標変換

$$\mathbf{x}(t) = S_1 \bar{\mathbf{x}}(t), \quad \mathbf{u}(t) = S_2 \bar{\mathbf{u}}(t) \quad \cdots \cdots \cdots (5)$$

により, 次の Luenberger の可到達正準形に変換することができる。

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{x}}(t+1) &= \bar{A} \bar{\mathbf{x}}(t) + E \bar{\mathbf{u}}(t) \\ &= (J_0 + EA^*) \bar{\mathbf{x}}(t) + E \bar{\mathbf{u}}(t) \quad \cdots \cdots \cdots (6) \end{aligned}$$

ここで, J_0 は m 個の $n_i \times n_i$ ベキ零ジョルダン細胞 $J(n_i)$ からなる次の $n \times n$ ベキ零ジョルダン行列である。

$$J_0 = \text{block diag} [J(n_1), \dots, J(n_m)] \quad \cdots \cdots \cdots (7)$$

$$J(n_i) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \cdot & \cdot & 0 \\ & & \cdot & \cdot \\ 0 & & & 1 \\ & & & & 0 \end{bmatrix} \quad \cdots \cdots \cdots (8)$$

また, E は第 $(n_1 + \dots + n_i, i)$ 成分 ($i=1, \dots, m$) のみが 1 で, ほかは零なる $n \times m$ 行列である。さらに, A^* は A, B, S_1 および S_2 が与えられれば定まる $m \times n$ 定数行列である。

したがって, 式(6)の Luenberger の可到達正準形を用いても一般性を失うことなく議論できるので, 以後これを用いる。

ところで, 終端状態固定条件式(2)が成立するためには, 終端時刻 τ は,

$$\tau \geq n_1 \quad \cdots \cdots \cdots (9)$$

でなければならない⁽⁹⁾。そこで, 終端時刻 τ を

$$\tau = n_1 + q \quad (q \text{ は零または正の整数}) \quad \cdots \cdots \cdots (10)$$

とおくと, 固定終端レギュレータ問題は次のように表わされる。

[固定終端レギュレータ問題] 式(6)の制御対象に対し, 終端状態固定条件

$$\bar{\mathbf{x}}(n_1 + q) = 0 \quad \cdots \cdots \cdots (11)$$

のもとで, 半正定の加法的評価関数

$$\left. \begin{aligned} J(n_1 + q) &= \sum_{t=0}^{n_1+q-1} h(\bar{\mathbf{x}}(t), \bar{\mathbf{u}}(t)) \\ h(\bar{\mathbf{x}}(t), \bar{\mathbf{u}}(t)) &\geq 0 \\ (\bar{\mathbf{x}}(t) \neq 0, \bar{\mathbf{u}}(t) \neq 0 \text{ のとき}) \\ h(0, 0) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \cdots \cdots \cdots (12)$$

を最小にする最適入力 $\bar{\mathbf{u}}^*(t)$ ($t=0, \dots, n_1+q-1$) を求めよ。

3. 基本構造と新しい最適性の条件

この固定終端レギュレータ問題に, ラグランジュの未定乗数法を適用する。 n_1+q 個の $n \times 1$ 未定乗数ベクトル $\bar{\lambda}(t)$ ($t=1, \dots, n_1+q$) を用いると, ラグランジュ関数 L は

$$\begin{aligned} L &= J(n_1 + q) + \sum_{t=0}^{n_1+q-1} \bar{\lambda}'(t+1) [\bar{A} \bar{\mathbf{x}}(t) \\ &\quad + E \bar{\mathbf{u}}(t) - \bar{\mathbf{x}}(t+1)] \quad \cdots \cdots \cdots (13) \end{aligned}$$

となる。ここで, ' は転置を表わす。よって, 式(6)と

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}(t) &= \bar{A}' \bar{\lambda}(t+1) + \frac{\partial h}{\partial \bar{\mathbf{x}}(t)} \\ (t &= 1, \dots, n_1+q-1) \quad \cdots \cdots \cdots (14) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{\partial h}{\partial \bar{\mathbf{u}}(t)} + E' \bar{\lambda}(t+1) \\ (t &= 0, \dots, n_1+q-1) \quad \cdots \cdots \cdots (15) \end{aligned}$$

なる二点境界値問題が得られる。ここで, 境界条件は初期状態 $\bar{\mathbf{x}}(0)$ と零終端状態式(11)である。なお, h は式(12)の $h(\bar{\mathbf{x}}(t), \bar{\mathbf{u}}(t))$ を簡略化した表現であり, 以後同様とする。このとき, 次の関係が成立する。

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{x}}(t)' \bar{\lambda}(t) - \bar{\mathbf{x}}(t+1)' \bar{\lambda}(t+1) \\ = \bar{\mathbf{x}}(t)' \frac{\partial h}{\partial \bar{\mathbf{x}}(t)} + \bar{\mathbf{u}}(t)' \frac{\partial h}{\partial \bar{\mathbf{u}}(t)} \quad \cdots \cdots \cdots (16) \end{aligned}$$

これらの条件が固定終端レギュレータの今までの最適性の条件であるが, 加法的評価関数の具体的な形が与えられても, それらを数値的あるいは解析的に解くことは, 一般に自由終端レギュレータの場合よりも難しい⁽¹⁾。そこで, 次に, 固定終端レギュレータが特別な構造を持つことを明らかにし, 新しい最適性の条件を求める。

ここでは, 文献(3)と同様の手法を用いて, この問題が三つの区間に分けられることを示す。まず, $\bar{\mathbf{u}}(t)$ を次のように変換しても, 設計の自由度は変わらない。

$$\bar{\mathbf{u}}(t) = -A^* \bar{\mathbf{x}}(t) + \bar{\mathbf{v}}(t) \quad \cdots \cdots \cdots (17)$$

ここで, $\bar{\mathbf{v}}(t)$ は $m \times 1$ ベクトルである。式(17)を式(6)に代入すると

$$\bar{\mathbf{x}}(t+1) = J_0 \bar{\mathbf{x}}(t) + E \bar{\mathbf{v}}(t) \quad \cdots \cdots \cdots (18)$$

を得る。式(18)より, $\bar{\mathbf{x}}(n_1+q)$ は

$$\bar{\mathbf{x}}(n_1 + q) = J_0^{n_1} \bar{\mathbf{x}}(q)$$

$$+ [E J_0 E \cdots J_0^{n_1-1} E] \begin{bmatrix} \bar{v}(n_1+q-1) \\ \vdots \\ \bar{v}(q) \end{bmatrix} \cdots (19)$$

と表わされる。ここで、 J_0 のベキ零ジョルダン細胞の最大次数は n_1 であるから、

$$J_0^{n_1} = 0 \cdots \cdots (20)$$

となり、式(19)、(20)を終端状態固定条件式(11)に代入すれば、連立一次方程式

$$[E J_0 E \cdots J_0^{n_1-1} E] \begin{bmatrix} \bar{v}(n_1+q-1) \\ \vdots \\ \bar{v}(q) \end{bmatrix} = 0 \cdots \cdots (21)$$

が得られる。このとき、 E と J_0 の性質より、 $q \leq t \leq n_1 + q - 1$ なる t に対して、式(21)は n_1 個の連立一次方程式

$$J_0^{n_1+q-1-t} E \bar{v}(t) = 0 \cdots \cdots (22)$$

に分離される。これら n_1 個の連立一次方程式は、 t の値によって一般に次の二つの場合に分けることができる。なお、 $0 \leq t \leq q-1$ なる t に対しては、 $\bar{v}(t)$ が任意となることは明らかである。

(1) $n_1 - n_m + q \leq t \leq n_1 + q - 1$ のとき、 $n \times m$ 行列 $J_0^{n_1+q-1-t} E$ は最大階数となり、

$$\bar{v}(t) = 0 \cdots \cdots (23)$$

となる。よって、式(17)より

$$\bar{u}(t) = -A^* \bar{x}(t) \cdots \cdots (24)$$

となる。

(2) $q \leq t \leq n_1 - n_m + q - 1$ のとき、 $\bar{v}(t)$ の第 i 成分を $\bar{v}_i(t)$ とおくと、

$$\bar{v}_i(t) = \begin{cases} \text{任意} & (q \leq t \leq n_1 + q - n_i - 1) \\ 0 & (n_1 + q - n_i \leq t \leq n_1 + q - n_m - 1) \end{cases} \cdots \cdots (25)$$

となる。よって、 $\bar{u}(t)$ の第 i 成分を $\bar{u}_i(t)$ とおくと、式(17)より

$$\bar{u}_i(t) = \begin{cases} \text{任意} & (q \leq t \leq n_1 + q - n_i - 1) \\ -e_m(i) A^* \bar{x}(t) & (n_1 + q - n_i \leq t \leq n_1 + q - n_m - 1) \end{cases} \cdots \cdots (26)$$

となる。ここで、 $e_m(i)$ は第 i 成分のみが 1 で他は零なる $1 \times m$ 単位ベクトルである。

すなわち、固定終端レギュレータ問題は、その性質により第一相 ($t=0, \dots, q-1$)、第二相 ($t=q, \dots, n_1 - n_m + q - 1$)、第三相 ($t=n_1 - n_m + q, \dots, n_1 + q - 1$) なる三つの区間に分けて考えることができる。なお、以後簡単のため

$$n_1 - n_m + q - 1 = p \cdots \cdots (27)$$

とおく。

3.1 $t=p+1, \dots, n_1+q-1$ のとき (第三相) 式

(24) より、この区間の最適入力、

$$\bar{u}^*(t) = -A^* \bar{x}(t) \cdots \cdots (28)$$

なる一定ゲインの状態フィードバックで表現できるが、これはデッドビート制御^{(8)~(11)}の特別なゲインである。このとき、

$$\bar{x}(t+1) = J_0 \bar{x}(t) \cdots \cdots (29)$$

$$\bar{x}(t) = J_0^{t-p-1} \bar{x}(p+1) \cdots \cdots (30)$$

$$\bar{u}^*(t) = -A^* J_0^{t-p-1} \bar{x}(p+1) \cdots \cdots (31)$$

となる。すなわち、この区間の最適フィードバックゲインは一定で、評価関数に依存しない。しかし、中間状態 $\bar{x}(p+1)$ はそれ以前にどのような入力加わったかにより変化するので、この区間の最適入力 $\bar{u}^*(t)$ は評価関数に依存する。

3.2 中間条件 $\bar{\lambda}(p+1)$ ここでは、第二相と第三相の接続関係を示す中間条件 (すなわち、第二相の境界条件) $\bar{\lambda}(p+1)$ を求める。式(16)の左辺の $p+1$ から n_1+q-1 までの総和は、式(11)の条件より

$$\sum_{t=p+1}^{n_1+q-1} [\bar{x}(t)' \bar{\lambda}(t) - \bar{x}(t+1)' \bar{\lambda}(t+1)] = \bar{x}(p+1)' \bar{\lambda}(p+1) \cdots \cdots (32)$$

となる。一方、対応する式(16)の右辺の総和は、式(30)、(31)より次のようになる。

$$\begin{aligned} & \sum_{t=p+1}^{n_1+q-1} \left[\bar{x}(t)' \frac{\partial h}{\partial \bar{x}(t)} + \bar{u}(t)' \frac{\partial h}{\partial \bar{u}(t)} \right] \\ &= \bar{x}(p+1)' \sum_{t=p+1}^{n_1+q-1} (J_0^{t-p-1})' \cdot \left[\frac{\partial h}{\partial \bar{x}(t)} - (A^*)' \frac{\partial h}{\partial \bar{u}(t)} \right] \cdots \cdots (33) \end{aligned}$$

よって、任意の $\bar{x}(p+1)$ に対し、中間条件 $\bar{\lambda}(p+1)$ は、

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}(p+1) &= \sum_{t=p+1}^{n_1+q-1} (J_0^{t-p-1})' \cdot \left[\frac{\partial h}{\partial \bar{x}(t)} - (A^*)' \frac{\partial h}{\partial \bar{u}(t)} \right] \cdots \cdots (34) \end{aligned}$$

となる。

3.3 $t=q, \dots, p$ のとき (第二相) 式(26)より、

$\bar{u}(t)$ に含まれる任意入力の数 m_t とすると、この区間の $\bar{u}(t)$ は

$$\bar{u}(t) = F(t) \bar{x}(t) + W_t(t) \bar{v}_t(t) \cdots \cdots (35)$$

$$F(t) = - \begin{bmatrix} e_m(1) \\ \vdots \\ e_m(m-m_t) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} A^* \cdots \cdots (36)$$

$$W_i(t) = \begin{bmatrix} e_m(m-m_i-1) \\ \vdots \\ e_m(m) \end{bmatrix} \dots\dots\dots (37)$$

と書き表わすことができる。ここで、 $F(t)$ は $m \times n$ 行列、 $W_i(t)$ は $m \times m_i$ 行列、 $\bar{v}_i(t)$ は $m_i \times 1$ 任意入力である。なお、 $\bar{v}_i(t)$ と $W_i(t)$ の次元は時変となり、

$$\text{rank } W_i(t) = m_i (\text{最大階数}) \dots\dots\dots (38)$$

となる。式(35)を式(6)に代入すると、新しい制御対象は

$$\bar{x}(t+1) = \bar{A}(t)\bar{x}(t) + \bar{B}_i(t)\bar{v}_i(t) \dots\dots\dots (39)$$

となり、この区間の評価関数 $J_2(n_1+q)$ は式(12)より、新しい加法性評価関数

$$\begin{aligned} J_2(n_1+q) &= \sum_{t=q}^p h(\bar{x}(t), \bar{u}(t)) \\ &= \sum_{t=q}^p \bar{h}(\bar{x}(t), \bar{v}_i(t)) \dots\dots\dots (40) \end{aligned}$$

に変換される。ここで、 $n \times n$ 行列 $\bar{A}(t)$ と $n \times m_i$ 行列 $\bar{B}_i(t)$ は、それぞれ

$$\bar{A}(t) = J_0 + E[A^* + F(t)] \dots\dots\dots (41)$$

$$\bar{B}_i(t) = E W_i(t) \dots\dots\dots (42)$$

である。よって、この区間は、式(39)と

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}(t) &= \bar{A}(t)' \bar{\lambda}(t+1) + \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}(t)} \\ (t=q+1, \dots, p) \dots\dots\dots (43) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{v}_i(t)} + \bar{B}_i(t)' \bar{\lambda}(t+1) \\ (t=q, \dots, p) \dots\dots\dots (44) \end{aligned}$$

なる二点境界値問題を初期状態 $\bar{x}(q)$ と新しい終端条件 $\bar{\lambda}(p+1)$ のもとで解く、新しい終端状態が自由な問題（誘導された自由終端レギュレータ問題）となる。ここで、 $\bar{h}$ は式(40)の $\bar{h}(\bar{x}(t), \bar{v}_i(t))$ を簡略化した表現であり、以後同様とする。すなわち、この区間の最適入力、ある成分はデッドビート制御の特別なゲインによる状態フィードバックとなり、ほかの成分は誘導された自由終端レギュレータ問題を解いて求められる。

3・4 $t=0, \dots, q-1$ のとき（第一相） 3・3節の二点境界値問題を解いて得られる $\bar{\lambda}(q)$ が第一相と第二相の中間条件（すなわち、第一相の境界条件）となる。よって、この区間は式(6)と

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}(t) &= \bar{A}' \bar{\lambda}(t+1) + \frac{\partial h}{\partial \bar{x}(t)} \\ (t=1, \dots, q-1) \dots\dots\dots (45) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial h}{\partial \bar{u}(t)} + E' \bar{\lambda}(t+1) \\ (t=0, \dots, q-1) \dots\dots\dots (46) \end{aligned}$$

なる二点境界値問題を初期状態 $\bar{x}(0)$ と新しい終端条件 $\bar{\lambda}(q)$ のもとで解く、誘導された自由終端レギュレ

ータ問題となる。

以上の議論より、一般の加法性評価関数に対する固定終端レギュレータの基本構造が明らかになった。すなわち、固定終端レギュレータの最適性の条件は、特別なデッドビート制御と誘導された自由終端レギュレータの最適性の条件で表現される。なお、同一の評価関数に対する固定終端レギュレータ問題と終端状態 $\bar{x}(n_1+q)$ が自由な自由終端レギュレータ問題の比較は、一入力系の場合⁽⁷⁾を少し修正すればよく、同様の性質が成り立つ。

なお、これ以上の式の展開を行うためには評価関数を具体的に決めなければならないので、次章では二次形式評価関数に対する固定終端レギュレータ問題の新解法を述べ、新しい最適性の条件の有効性を示す。

4. デッドビート LQ 最適制御の新解法

すでに、デッドビート LQ 最適制御（二次形式評価関数を最小化する固定終端レギュレータ問題）は、零終端状態を満足する入力の一般形を用いることにより解かれている⁽⁶⁾。本章では、この問題に対し、3章で求めた最適性の条件を用いた新解法を示す。すなわち、式(12)において

$$h(\bar{x}(t), \bar{u}(t)) = \frac{1}{2} [\bar{x}(t)' \bar{Q} \bar{x}(t) + \bar{u}(t)' \bar{R} \bar{u}(t)] \dots\dots\dots (47)$$

なる二次形式評価関数を考える。ここで、 $\bar{Q}$ は $n \times n$ 半正定対称行列、 $\bar{R}$ は $m \times m$ 正定対称行列とする。

この問題にラグランジュの未定乗数法を適用すると、式(6)と

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}(t) &= \bar{A}' \bar{\lambda}(t+1) + \bar{Q} \bar{x}(t) \\ (t=1, \dots, n_1+q-1) \dots\dots\dots (48) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{R} \bar{u}(t) &= -E' \bar{\lambda}(t+1) \\ (t=0, \dots, n_1+q-1) \dots\dots\dots (49) \end{aligned}$$

なる二点境界値問題が得られる。ここで、境界条件は初期状態 $\bar{x}(0)$ と零終端状態式(11)である。

4・1 $t=p+1, \dots, n_1+q-1$ のとき（第三相） この区間の最適入力は、式(28)となる。

4・2 中間条件 $\bar{\lambda}(p+1)$ 式(34)より、中間条件は

$$\bar{\lambda}(p+1) = \bar{P}(p+1) \bar{x}(p+1) \dots\dots\dots (50)$$

$$\begin{aligned} \bar{P}(p+1) &= \sum_{i=p+1}^{n_1+q-1} (J_0^{t-p-1})' \\ &\cdot [\bar{Q} + (A^*)' \bar{R} A^*] J_0^{t-p-1} \dots\dots\dots (51) \end{aligned}$$

となる。明らかに、 $\bar{P}(p+1)$ は半正定対称行列となる。

4・3 $t=q, \dots, p$ のとき（第二相） 式(40)の $\bar{h}$ は

$$\begin{aligned} \bar{h} = & \frac{1}{2} [\bar{x}(t)' \bar{Q}(t) \bar{x}(t) \\ & + 2\bar{x}(t)' \bar{S}_t(t) \bar{v}_t(t) + \bar{v}_t(t)' \bar{R}_t(t) \bar{v}_t(t)] \\ & \dots\dots\dots (52) \end{aligned}$$

$$\bar{Q}(t) = \bar{Q} + F(t)' \bar{R} F(t) \dots\dots\dots (53)$$

$$\bar{S}_t(t) = F(t)' \bar{R} W_t(t) \dots\dots\dots (54)$$

$$\bar{R}_t(t) = W_t(t)' \bar{R} W_t(t) \dots\dots\dots (55)$$

となるので、二点境界値問題は、式(39)と

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}(t) = & \bar{A}(t)' \bar{\lambda}(t+1) + \bar{Q}(t) \bar{x}(t) + \bar{S}_t(t) \bar{v}_t(t) \\ & (t=q+1, \dots, p) \dots\dots\dots (56) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 = & \bar{R}_t(t) \bar{v}_t(t) + \bar{S}_t(t)' \bar{x}(t) + \bar{B}_t(t)' \bar{\lambda}(t+1) \\ & (t=q, \dots, p) \dots\dots\dots (57) \end{aligned}$$

となる。明らかに、 $\bar{Q}(t)$ は $n \times n$ 半正定対称行列、 $\bar{S}_t(t)$ は $n \times m_t$ 行列であり、式(38)より $\bar{R}_t(t)$ は正則な $m_t \times m_t$ 正定対称行列である。式(50)、(51)の中間条件がこの区間の境界条件となるので、二点境界値問題は $n \times n$ 対称行列 $\bar{P}(t)$ を用いたリカッチ変換

$$\bar{\lambda}(t) = \bar{P}(t) \bar{x}(t) \dots\dots\dots (58)$$

により解くことができる。すなわち、リカッチ方程式

$$\begin{aligned} \bar{P}(t) = & \bar{Q}_0(t) + \bar{A}_0(t)' \bar{P}(t+1) \bar{A}_0(t) \\ & - \bar{A}_0(t)' \bar{P}(t+1) \bar{B}_t(t) [\bar{R}_t(t) \\ & + \bar{B}_t(t)' \bar{P}(t+1) \bar{B}_t(t)]^{-1} \bar{B}_t(t)' \bar{P}(t+1) \bar{A}_0(t) \\ & \dots\dots\dots (59) \end{aligned}$$

$$\bar{Q}_0(t) = \bar{Q}(t) - \bar{S}_t(t) \bar{R}_t(t)^{-1} \bar{S}_t(t)' \dots\dots\dots (60)$$

$$\bar{A}_0(t) = \bar{A}(t) - \bar{B}_t(t) \bar{R}_t(t)^{-1} \bar{S}_t(t)' \dots\dots\dots (61)$$

の半正定対称解 $\bar{P}(t)$ を用いると、最適入力

$$\bar{u}^*(t) = F(t) \bar{x}(t) + W_t(t) \bar{v}^*(t) \dots\dots\dots (62)$$

$$\begin{aligned} \bar{v}^*(t) = & -[\bar{R}_t(t) + \bar{B}_t(t)' \bar{P}(t+1) \bar{B}_t(t)]^{-1} \\ & \cdot [\bar{B}_t(t)' \bar{P}(t+1) \bar{A}(t) + \bar{S}_t(t)'] \bar{x}(t) \\ & \dots\dots\dots (63) \end{aligned}$$

となる。

4・4 $t=0, \dots, q-1$ のとき (第一相) この区間では、式(6)と

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}(t) = & \bar{A}' \bar{\lambda}(t+1) + \bar{Q} \bar{x}(t) \\ & (t=1, \dots, q-1) \dots\dots\dots (64) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{R} \bar{u}(t) = & -E' \bar{\lambda}(t+1) \\ & (t=0, \dots, q-1) \dots\dots\dots (65) \end{aligned}$$

なる二点境界値問題となり、初期状態 $\bar{x}(0)$ と第二相の二点境界値問題を解いて得られる

$$\bar{\lambda}(q) = \bar{P}(q) \bar{x}(q) \dots\dots\dots (66)$$

が境界条件となる。よって、この二点境界値問題も式(58)のリカッチ変換により解くことができる。すなわち、リカッチ方程式

$$\begin{aligned} \bar{P}(t) = & \bar{Q} + \bar{A}' \bar{P}(t+1) \bar{A} - \bar{A}' \bar{P}(t+1) E \\ & \cdot [\bar{R} + E' \bar{P}(t+1) E]^{-1} E' \bar{P}(t+1) \bar{A} \dots\dots\dots (67) \end{aligned}$$

の半正定対称解 $\bar{P}(t)$ を用いると、最適入力

$$\begin{aligned} \bar{u}^*(t) = & -[\bar{R} + E' \bar{P}(t+1) E]^{-1} E' \bar{P}(t+1) \bar{A} \bar{x}(t) \\ & \dots\dots\dots (68) \end{aligned}$$

となる。

明らかに、本解法による結果は文献(6)の結果と一致し、評価関数の最小値 $J^*(n_1+q)$ は

$$J^*(n_1+q) = \frac{1}{2} \bar{x}(0)' \bar{P}(0) \bar{x}(0) \dots\dots\dots (69)$$

となる。

なお、多入力系の場合も、一入力系の場合⁷⁾と同様にしてデッドビート LQ 最適制御の十分性を証明することができる。

このように、二次形式評価関数に対する固定終端レギュレータ問題に新しい最適性の条件を適用することにより、その解析的な最適解を求めることができた。しかし、このような場合はまれであり、一般の評価関数に対する最適制御問題では、制御の全区間にわたり数値的なオープンループ形式の最適解しか求めることができない場合が多い。これに対し、加法的評価関数に対する固定終端レギュレータ問題では、新しい最適性の条件より、たとえ制御区間の前半は数値的なオープンループ形式の最適解しか求まらなくても、制御区間の後半は必ずデッドビート制御の特別なゲインによるフィードバック形式となることが明らかとなった。なお、このゲインは評価関数に依存しない。さらに、前半は誘導された自由終端レギュレータ問題となるので、オープンループ形式の最適解の求解も容易となる。

5. あ と が き

本論文では、多入力線形デジタル制御系に対する固定終端レギュレータ問題について述べた。まず、一般の加法的評価関数に対し、有限の制御時間で状態を零にする固定終端レギュレータが満足すべき基本構造を明らかにした。この問題は三つの区間に分かれ、第一相では新しい終端が自由な誘導された自由終端レギュレータ問題、第二相では新しい制御対象と評価関数、および入力の構造が時変となるような誘導された自由終端レギュレータ問題となり、第三相では評価関数に依存しないデッドビート制御の特別なゲインをもつフィードバック制御となる。すなわち、固定終端レギュレータの最適性の条件は、特別なデッドビート制御と誘導された自由終端レギュレータの最適性の条件で表現される。したがって、評価関数が具体的に与えられても解が解析的に求まらないような場合でも、後半は必ずデッドビート制御の特別なゲインによるフィードバック形式となり、そのゲインは評価関数に依存しない。

い。

なお, Luenberger の可到達正準形を経由しない新しい最適性の条件を求めることが今後の課題である。

文 献

- (1) 計測自動制御学会編, 自動制御ハンドブック基礎編, (1983), 497, オーム社.
- (2) 近藤・清田・須永・菊池, 一入力デッドビート原理とその入力エネルギー最小化への応用, 機論, 54-505, C (1988), 2125.
- (3) 近藤・清田・菊池・須永, 多入力線形定常離散時間系のデッドビート原理, 機論, 55-514, C (1989), 1372.
- (4) 近藤・清田・須永・川口, 終端状態固定条件付レギュレータ問題の入力エネルギー最小化 (多入力線形定常離散時間系の場合), 機論, 56-527, C (1990), 1762.
- (5) 近藤・清田・須永, 1 入力線形定常離散時間系のデッドビート LQ 最適制御, 計測自動制御学会論文集, 25-11 (1988), 1245.
- (6) 清田・近藤・須永・井崎, 多入力多出力デッドビートサーボ系の LQ 最適制御, 機論, 57-536, C (1991), 1254.
- (7) 近藤・清田・須永, 一入力高精度デジタルレギュレータの基本構造とデッドビート LQ 最適制御の新解法, 機論, 57-537, C (1991), 1610.
- (8) Kalman, R. E., On the General Theory of Control Systems, *Proc. of IFAC*, 1 (1960), 481, Moscow.
- (9) O'Reilly, J., The Discrete Linear Time Invariant Time-optimal Control Problem—An Overview, *Automatica*, 17-2 (1981), 363.
- (10) 今井, デッドビート制御, 計測と制御, 22-7 (1983), 606.
- (11) 近藤・武内・須永・清田, 状態デッドビート制御器の体系的設計法, 機論, 53-492, C (1987), 1782.