多自由度非線形振動系の同定法*

(統計的手法の導入による精度向上の試み)

神谷 恵輔^{*1}, 安田 仁彦^{*2}

Identification of Nonlinear Multi-Degree-of-Freedom Systems (An Attempt to Improve Accuracy by Introducing a Statistical Method)

Keisuke KAMIYA and Kimihiko YASUDA

In previous papers, one of the authors proposed a new technique of identifying nonlinear multi-degree-of-freedom systems, and showed that the technique produces accurate results when the dynamic data are of good quality. However, it has been found that the accuracy of the identified results becomes worse rapidly as the dynamic data are polluted more. In this paper, as an attempt to improve the accuracy under noisy measurements, the previous method is revised by introducing a statistical method, the Lagrange multiplier method. Some numerical simulations are conducted, and it is shown that the revised technique significantly improves accuracy.

Key Words: Identification, Nonlinear Vibration, Multi-Degree-of-Freedom System, Lagrange Multiplier Method

1. ま え が き

機械や構造物の動特性を表現する数学モデルを作ること系を同定という。系を同定する実験的な方法としてモード解析法があり、広く用いられている。しかし現在のモード解析法は対象とする系を線形系として同定するものである。近年、機械や構造物の使用条件が厳しくなるにつれて非線形系の同定法が重要となっており、多くの研究者によって同定の方法が提案されている^{(1)~(14)}。著者の一人も前報^{(15)~(19)}において多自由度非線形振動系の同定法を提案した。しかしそこで提案した方法では、測定データに含まれるノイズが小さい場合には精度良く同定できるが、ノイズが大きくなるにつれて同定精度が急速に悪化することがわかった。

そこでこの報告では、測定データに含まれるノイズが比較的大きい場合でも精度の良い結果が得られる同定法の開発を目的として、統計的手法を導入して前報の方法の改良を試みる。基本的な検討を目的とするため、ここではノイズは正規分布をなすものとする。改

良した同定法の有効性を検討するため、いくつかの代表的な振動系を取り上げ、数値的に得た定常振動にノイズを加えたデータを実験データとみなして、提案した方法で同定を行う。

2. 同 定 法 の 提 案

2・1 前報の同定法の概要 本論に入る前に、前報⁽¹⁵⁾で提案した同定法の概要を、復元力に非線形性をもつ自由度 n の非線形振動系を例にして説明する。減衰力または復元力と減衰力の両方に非線形性があるような系も以下と同様に扱うことができる。

対象とする系に外力 $\{q\}$ を作用させるとき、運動方程式は

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} + \{N\} = \{q\} \quad \cdots (1)$$

となる。ここでマトリックス $[M]$, $[C]$, $[K]$ はそれぞれ慣性マトリックス, 減衰マトリックス, 剛性マトリックスを表し, ベクトル $\{N\}$ は非線形項を表す。

この系を同定するため、非線形項 $\{N\} = \{N_1, N_2, \dots, N_n\}^T$ は変位 $x_1, x_2, \dots$ の多項式

* 平成3年4月1日 第68期通常総会講演会において講演、原稿受付 平成3年3月28日。

^{*1} 准員, 名古屋大学大学院 (〒464-01 名古屋市千種区不老町)。

^{*2} 正員, 名古屋大学工学部。

$$\{N\} = \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ \vdots \\ N_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha_{11}x_1^2 + \alpha_{12}x_1x_2 + \cdots \\ + \beta_{11}x_1^3 + \beta_{12}x_1^2x_2 + \cdots \\ \alpha_{21}x_1^2 + \alpha_{22}x_1x_2 + \cdots \\ + \beta_{21}x_1^3 + \beta_{22}x_1^2x_2 + \cdots \\ \vdots \\ \alpha_{n1}x_1^2 + \alpha_{n2}x_1x_2 + \cdots \\ + \beta_{n1}x_1^3 + \beta_{n2}x_1^2x_2 + \cdots \end{Bmatrix} \cdots (2)$$

で近似されとする。こうすれば、この系を実験的に同定するとは、外力 $\{q\}$ とそれに対する応答 $\{x\}$ の実験データから、式(1)のマトリックス $[M]$, $[C]$, $[K]$ と式(2)の係数パラメータ α_{11} , α_{12} , $\cdots$ を定めることに帰着される。

同定のため、振動数 ω_i の周期外力 $\{q_i\} = \{q_{i1}, q_{i2}, \cdots, q_{in}\}^T$ を系に作用させることによって外力と同じ周期の定常振動 $\{x_i\} = \{x_{i1}, x_{i2}, \cdots, x_{in}\}^T$ を発生させ、 $\{q_i\}$, $\{x_i\}$ を測定する。これらはともに振動数 ω_i の周期関数であるから、それぞれ

$$\begin{aligned} \{q_i\} &= \{Q_{i0}\} \\ &+ \{Q_{i1}\} \cos \omega_i t + \{Q_{i2}\} \cos 2\omega_i t + \cdots \\ &+ \{Q_{i1}^*\} \sin \omega_i t + \{Q_{i2}^*\} \sin 2\omega_i t + \cdots \\ &\cdots \cdots \cdots (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{x_i\} &= \{X_{i0}\} \\ &+ \{X_{i1}\} \cos \omega_i t + \{X_{i2}\} \cos 2\omega_i t + \cdots \\ &+ \{X_{i1}^*\} \sin \omega_i t + \{X_{i2}^*\} \sin 2\omega_i t + \cdots \\ &\cdots \cdots \cdots (4) \end{aligned}$$

の形のフーリエ級数に展開できる。ここでフーリエ係数 $\{Q_{i0}\}$, $\{Q_{i1}\}$, $\cdots$, $\{X_{i0}\}$, $\{X_{i1}\}$, $\cdots$ は既知の量である。また式(2)の変位の二乗、三乗、 $\cdots$ の項を成分とするベクトル $\{x^2_i\} = \{x_{i1}^2, x_{i1}x_{i2}, \cdots\}^T$, $\{x^3_i\} = \{x_{i1}^3, x_{i1}^2x_{i2}, \cdots\}^T$, $\cdots$ も、それらのデータを $\{x_i\}$ のデータの演算によって作成することによって

$$\begin{aligned} \{x^2_i\} &= \{X^2_{i0}\} \\ &+ \{X^2_{i1}\} \cos \omega_i t + \{X^2_{i2}\} \cos 2\omega_i t + \cdots \\ &+ \{X^2_{i1}^*\} \sin \omega_i t + \{X^2_{i2}^*\} \sin 2\omega_i t + \cdots \\ \{x^3_i\} &= \{X^3_{i0}\} \\ &+ \{X^3_{i1}\} \cos \omega_i t + \{X^3_{i2}\} \cos 2\omega_i t + \cdots \\ &+ \{X^3_{i1}^*\} \sin \omega_i t + \{X^3_{i2}^*\} \sin 2\omega_i t + \cdots \\ &\vdots \\ &\cdots \cdots \cdots (5) \end{aligned}$$

の形のフーリエ級数に展開できる。ここでもフーリエ係数 $\{X^2_{i0}\}$, $\{X^2_{i1}\}$, $\cdots$ は既知の量である。

式(3), (4), (5)を式(1)に代入し、ハーモニクバランスの原理を用いて、両辺の定数項、調和成分を適当な打ち切り次数まで等しいとくと、

$$[A]\{S\} = \{Q\} \cdots \cdots \cdots (6)$$

の形の方程式を得る。ここで $[A]$ は式(4), (5)のフーリエ係数から決まる既知のマトリックス, $\{S\}$ は式(1)の $[M]$, $[C]$, $[K]$ の成分および非線形項(2)の係数パラメータ α_{11} , α_{12} , $\cdots$ を成分とする未知のベクトル, $\{Q\}$ は式(3)のフーリエ係数から決まる既知のベクトルである。いくつかの ω_i に対するデータから式(6)の形の方程式を作成し、全体として未知数の数よりも方程式の数が多くなるようにする。こうして得た方程式に最小二乗法を適用して未知パラメータを定める。

以上が前報で提案した同定法の概要である。

2.2 統計的手法の導入 上記の同定法では、測定データに含まれるノイズが小さい場合には精度良く同定できるが、ノイズが大きくなると同定精度が悪化することがわかった。そこで測定データに含まれる誤差が比較的大きくなっても精度の良い同定結果が得られるように、統計的手法を導入して上記の方法の改良を試みる。ここでも復元力に非線形性をもつ多自由度非線形振動系を例にして説明する。

統計的手法を導入する前に、前報の方法にいくらか変更を加えておく。前報では、式(5)のフーリエ級数 $\{X^2_{i0}\}$, $\{X^2_{i1}\}$, $\cdots$ を求めるのに、時間領域における $\{x_i\}$ のデータの演算から変位の二乗、三乗、 $\cdots$ の項のベクトル $\{x^2_i\}$, $\{x^3_i\}$, $\cdots$ を作り、それをフーリエ係数に展開する方法をとった。ここでは同じフーリエ係数を求めるのに、適当な次数で打ち切った式(4)のフーリエ級数の演算によって求める方法をとる。このようにすれば、式(6)のマトリックス $[A]$ は式(4)のフーリエ係数のみから決まることになる。

以上の準備をしておいて、前報の同定法に統計的手法を導入する。まず表記を簡単にするため、式(4)のフーリエ係数 $\{X_{i0}\}$, $\{X_{i1}\}$, $\cdots$ を合わせて応答ベクトル $\{X_i\}$ とする。いま、測定によって得られた振動データ $\{x_i\}$ のみに偶然誤差が混入しているものと仮定する。かりに振動数 ω_i の外力 $\{q_i\}$ に対する応答を無限回測定すると、誤差は偶然誤差のみであるので、 $\{x_i\}$ は正規分布になり⁽²⁰⁾、その $\{x_i\}$ から求めるフーリエ係数 $\{X_i\}$ も正規分布となる⁽²¹⁾。そこでその分布の母平均を $\{\bar{X}_i\}$ 、母分散を $\{\sigma^2_i\}$ とする。測定によって応答ベクトル $\{X_i\}$ が得られる確率密度 P_i は

$$P_i = \prod_{j=1}^n \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{ij}} \exp \left\{ -\frac{(X_{ij} - \bar{X}_{ij})^2}{2\sigma_{ij}^2} \right\} \right] \cdots (7)$$

となる⁽²²⁾。ここで X_{ij} , $\bar{X}_{ij}$, σ_{ij}^2 はそれぞれ $\{X_i\}$, $\{\bar{X}_i\}$, $\{\sigma^2_i\}$ の j 番目の成分を表している。

加振実験で、外力の振動数を ω_1 から ω_N まで変化させて応答ベクトル $\{X_1\}$, $\{X_2\}$, $\cdots$, $\{X_N\}$ が得られた

とすると、それらのデータが得られる確率密度 R は、式(7)の P_i の i を 1 から N まで変えた値を乗じた

$$R = \prod_{i=1}^N P_i = \prod_{i=1}^N \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{ij}} \exp \left\{ -\frac{(X_{ij} - \bar{X}_{ij})^2}{2\sigma_{ij}^2} \right\} \right) \quad \dots\dots\dots (8)$$

で与えられる。

簡単のため応答ベクトル $\{X_1\}, \{X_2\}, \dots, \{X_N\}$ を並べて得られるベクトルを $\{X\}$ と書くことにする。またこれに対応して $\{\bar{X}_1\}, \{\bar{X}_2\}, \dots, \{\bar{X}_N\}$ を並べて得られるベクトルを $\{\bar{X}\}$ と書く。応答ベクトルとして $\{X\}$ が得られた理由は、その測定時点において式(8)の確率密度 R が極大であったからと考えるのが妥当である。したがって得られた応答ベクトルから R を極大にするような $\{\bar{X}\}$ を求めれば、それは真の応答ベクトルとして最も良い推定値といえる。 R を極大にするには

$$T = \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=1}^m \frac{(X_{ij} - \bar{X}_{ij})^2}{2\sigma_{ij}^2} \right) \quad \dots\dots\dots (9)$$

を極小にすればよい。したがって T を極小にする $\{\bar{X}\}$ が応答ベクトルとして最も良い推定値である。

ところで $\{\bar{X}\}$ は制約条件として式(6)を満足しなければならない。この場合にマトリックス $[A]$ は $\{\bar{X}\}$ から定められるマトリックスである。したがって式(6)を満足し、かつ T を極小にする $\{\bar{X}\}, \{S\}$ を求めれば、応答ベクトル $\{X\}$ および系のパラメータ $\{S\}$ の最も良い推定値が得られたことになる。

以上のような $\{\bar{X}\}, \{S\}$ を求めるため、ラグランジュの乗数法を利用する⁽²³⁾⁽²⁴⁾。ラグランジュ乗数 $\{\zeta\}$ を導入して、ラグランジュ関数 U を

$$U = \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=1}^m \frac{(X_{ij} - \bar{X}_{ij})^2}{2\sigma_{ij}^2} \right) + \{\zeta\}^T ([A]\{S\} - \{Q\}) \quad \dots\dots\dots (10)$$

で定義する。 U を極小とするための条件は

$$\frac{\partial U}{\partial \bar{X}_{ij}} = \frac{\bar{X}_{ij} - X_{ij}}{\sigma_{ij}^2} + \{\zeta\}^T \left[\frac{\partial A}{\partial \bar{X}_{ij}} \right] \{S\} = 0 \quad \dots\dots\dots (11)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \{S\}} = [A]^T \{\zeta\} = \{0\} \quad \dots\dots\dots (12)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \{\zeta\}} = [A]\{S\} - \{Q\} = \{0\} \quad \dots\dots\dots (13)$$

である。ここで式(12), (13)の左辺は、 U を $\{S\}$ の各成分、 $\{\zeta\}$ の各成分でそれぞれ偏微分して得られるベクトルである。式(13)は制約条件(6)そのものである。このようにして、連立方程式(11), (12), (13)から $\{\bar{X}\}, \{S\}, \{\zeta\}$ を求めれば、それらは制約条件(6)を満足しながらラグランジュ関数 U を極小にすることがわかる。このときの $\{S\}$ が同定結果である。

減衰力に非線形性がある場合や復元力と減衰力の両方に非線形性がある系に対してもこれまでに述べたと同様にして同定できる。

2.3 非線形連立方程式の解法 方程式(11), (12), (13)はそれぞれ $\{\bar{X}\}, \{S\}, \{\zeta\}$ の成分の数と同数の方程式であるので、これらを合わせた連立方程式は原理的に解くことができる。しかしこの連立方程式は非線形連立方程式であり、しかも未知数が多いので、直接解くのは困難である。そこで以下に示すような反復法で解く⁽²⁴⁾。まず式(11)を次のように書き直す。

$$\{\bar{X}\} - \{X\} + [\sigma^2][B]^T \{\zeta\} = \{0\} \quad \dots\dots\dots (14)$$

ここでマトリックス $[B]$ は

$$\{b\}_{ij} = \{S\}^T \left[\frac{\partial A}{\partial \bar{X}_{ij}} \right]^T \quad \dots\dots\dots (15)$$

で与えられる行ベクトル $\{b\}_{ij}$ を並べてできるマトリックスであり、 $[\sigma^2]$ は母分散 σ_{ij}^2 を対角線上に並べ、それ以外の成分を零としたマトリックスである。

反復法で解くため、未知数 $\{\bar{X}\}, \{S\}$ の初期値として適当な $\{\bar{X}\}_0, \{S\}_0$ を与え、一回の計算における $\{\bar{X}\}$ の補正量を $\{\Delta \bar{X}\}$ とする。式(13), (14)において、 $\{\bar{X}\}$ を $\{\bar{X}\}_0 + \{\Delta \bar{X}\}$ と置き換え、 $\{\bar{X}\}_0$ の付近でテーラー展開し、 $\{\Delta \bar{X}\}$ の二乗以上の項を無視すると

$$[A]\{S\} - \{Q\} + [B]\{\Delta \bar{X}\} = \{0\} \quad \dots\dots\dots (16)$$

$$\{\bar{X}\}_0 + \{\Delta \bar{X}\} - \{X\} + [\sigma^2][B]^T \{\zeta\} = \{0\} \quad \dots\dots\dots (17)$$

を得る。ここでマトリックス $[A], [B]$ は初期値 $\{\bar{X}\}_0, \{S\}_0$ から定まるマトリックスである。式(17)を $\{\Delta \bar{X}\}$ について解き、式(16)に代入すると

$$[A]\{S\} - \{Q\} - [B](\{\bar{X}\}_0 - \{X\}) - [B][\sigma^2][B]^T \{\zeta\} = \{0\} \quad \dots\dots\dots (18)$$

を得る。この式を $\{\zeta\}$ について解くと

$$\{\zeta\} = ([B][\sigma^2][B]^T)^{-1} ([A]\{S\} - \{Q\} - [B](\{\bar{X}\}_0 - \{X\})) \quad \dots\dots\dots (19)$$

となり、これを式(12)に代入すると

$$[A]^T ([B][\sigma^2][B]^T)^{-1} [A]\{S\} - [A]^T ([B][\sigma^2][B]^T)^{-1} (\{Q\} + [B](\{\bar{X}\}_0 - \{X\})) = \{0\} \quad \dots\dots\dots (20)$$

を得る。式(20)を解けば補正後の $\{S\}$ が求められる。この $\{S\}$ を式(19)に代入すれば補正後の $\{\zeta\}$ が求められる。この $\{\zeta\}$ を用いれば、式(17)から補正後の $\{\bar{X}\} = \{\bar{X}\}_0 + \{\Delta \bar{X}\}$ が求められる。このようにして求めた $\{\bar{X}\}, \{S\}$ を新たな初期値として収束するまで以上の計算を繰返す。

反復計算を行う際に必要となる最初の初期値 $\{\bar{X}\}_0, \{S\}_0$ としては、それぞれ、実験によって得た変位データ $\{X\}$ 、前報の同定法によって得た $\{S\}$ を用いることができる。また母分散 $\{\sigma_{ij}^2\}$ の推定値としては、 m (m

>1) 回の測定で得られる $\{X_i\}_j$ ($j=1, 2, \dots, m$) の平均値 $\{X_i'\}$ を用いて算出される不偏分散

$$\{\sigma_i^2\} = \frac{\sum_{j=1}^m (\{X_i\}_j - \{X_i'\})^2}{m-1} \quad \dots\dots\dots (21)$$

を用いることができる。

数値シミュレーションの結果、繰返し計算の途中において、 $\{S\}, \{\bar{X}\}$ は正しい値付近で前後しながら正しい値に近づいていくことがわかった。そこでここでは次のようにして解の収束を加速した。 k 回目の反復計算によって得た $\{S\}, \{\bar{X}\}$ をそれぞれ $\{S\}_k, \{\bar{X}\}_k$ とし、そのときの補正量 $\{\Delta S\}_k, \{\Delta \bar{X}\}_k$ を

$$\{\Delta S\}_k = \{S\}_k - \{S\}_{k-1}, \quad \{\Delta \bar{X}\}_k = \{\bar{X}\}_k - \{\bar{X}\}_{k-1} \quad \dots\dots\dots (22)$$

とおく。 $(k-1)$ 回目と k 回目の補正量 $\{\Delta S\}_{k-1}, \{\Delta S\}_k$ を用いて

$$V = \{\Delta S\}_k^T \{\Delta S\}_{k-1} \quad \dots\dots\dots (23)$$

を計算する。 $V \geq 0$ ならば $\{S\}_k, \{\bar{X}\}_k$ をそのまま k 回目の計算によって得た値とし、 $V < 0$ ならば

$$\left. \begin{aligned} \{S\}_k &= \{\Delta S\}_k / 2 + \{S\}_{k-1} \\ \{\bar{X}\}_k &= \{\Delta \bar{X}\}_k / 2 + \{\bar{X}\}_{k-1} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (24)$$

を k 回目の計算によって得た値とする。

3. 数値シミュレーション

前章で提案した同定法の有効性を検討するため、数値シミュレーションを行った。

3・1 同定精度の評価法 まず同定結果の精度の評価法を定めておく。同定の対象とする系には、復元力や減衰力、あるいはその両方に非線形性をもつものなど種々あるので、同定結果の評価を慣性力、減衰力、復元力に区別して評価することが適当であると思われる。そこで、慣性力、減衰力、復元力のそれぞれに対して

$$\left. \begin{aligned} E_i &= \sqrt{\frac{\int (F_i - F_i')^2 dx}{\int F_i'^2 dx}} \\ E_d &= \sqrt{\frac{\int (F_d - F_d')^2 dx d\dot{x}}{\int F_d'^2 dx d\dot{x}}} \\ E_r &= \sqrt{\frac{\int (F_r - F_r')^2 dx d\ddot{x}}{\int F_r'^2 dx d\ddot{x}}} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (25)$$

で与えられる RMS 誤差によって同定結果を評価することにする。ここで F_i, F_d, F_r はそれぞれ正しい慣性力、減衰力、復元力であり、 F_i', F_d', F_r' はそれぞれ同定によって得られるパラメータから定まる慣性力、減衰力、復元力である。また上式における積分の範囲は同定に用いたデータの振幅などから適当に定める。

3・2 復元力に非線形性をもつ系 はじめに図 1

に示す一自由度系を取り上げる。この系の非線形項 N は

$$N = \beta x^3 \quad \dots\dots\dots (26)$$

のように、変位の三乗で与えられるとする。この系に外力 q を加えるとき、運動方程式は

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx + \beta x^3 = q \quad \dots\dots\dots (27)$$

となる。

数値的に振動データを求めるため、外力 q として

$$q = Q \cos \omega t \quad \dots\dots\dots (28)$$

の形の調和外力を加える。外力の大きさ Q と各パラメータの値を

$$Q=1, \quad m=1, \quad c=0.05, \quad k=1, \quad \beta=0.1 \quad \dots\dots\dots (29)$$

とし、外力の振動数と同じ周期の周期解になるまで数値的に積分を繰返した。このようにして一周期分のデータを時間軸上の離散点における値として求めた。これらの値に正規分布を成す乱数を加え、得られた結果をノイズを含む振動データと見なした。ノイズとして加えた乱数の標準偏差 σ は 0 から 0.3 までの間のいくつかの値に定めた。 $\sigma=0.2$ としたときの振動データの一例を図 2 に示す。

図 2 に示したようなデータを用いて、図 1 の系の同定を行った。同定にあたって非線形項 N を

$$N = \alpha x^2 + \beta x^3 \quad \dots\dots\dots (30)$$

の形においた。加える外力の振動数 ω は 0.6 から 2.4 の範囲に 11 点取り、フーリエ級数展開の打ち切り次

図 1 一自由度非線形系

図 2 振動データの例 ($\omega=1.4, \sigma=0.2$)

数は3とした。

同定によって得た未知パラメータの値の一例を表1に示す。表には振動データを得たもとの系のパラメータを合わせて示してある。表から、ここに示した σ の範囲内では、同定による各パラメータの値はいずれももとの系のパラメータに近い値となっていることがわかる。同定結果の精度を定量的に評価するため、 σ の各値に対し式(25)で定義したRMS誤差を求めたところ、図3に実線で示すような結果となった。比較のため、前報の方法によって得た同定結果に対して、同じようにRMS誤差を求め、破線で示した。図から、前報の方法による同定結果はノイズが大きくなるとともに精度が急速に悪化しているのに対し、本報告で提案した同定法では、ノイズが大きくなっても精度の良い同定結果が得られていることがわかる。ただし減衰力は

表1 同定結果

σ	0.1	0.2	0.3	Exact
m	1.000	1.000	1.001	1.00
c	0.050	0.049	0.049	0.05
k	1.004	1.007	1.011	1.00
α	0.001	0.003	0.004	0.00
β	0.099	0.099	0.098	0.10

図3 復元力に非線形性をもつ一自由度系の同定結果から求めたRMS誤差

関しては、前報で提案した同定法でもほとんど悪化していない。この傾向は二自由度系、三自由度系の場合も同様であった。

次に図4に示した二自由度系を取り上げる。三つのばねは同じ特性のもので、非線形性は変位 x に対し

$$N = \beta x^3 \dots\dots\dots (31)$$

で与えられるとする。この系に外力 $\{q\} = \{q_1, q_2\}^T$ を加えるとする、運動方程式は

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} + \{N\} = \{q\} \dots\dots (32)$$

となる。ここで $[M], [C], [K]$ は

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}, [C] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{12} & c_{22} \end{bmatrix}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (33)$$

の形のマトリックスである。なおマトリックス $[C], [K]$ の成分は c, k から決められる。またベクトル $\{N\}$ は

$$\{N\} = \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \beta x_1^3 + \beta(x_1 - x_2)^3 \\ \beta x_2^3 + \beta(x_2 - x_1)^3 \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (34)$$

で表される非線形項である。

数値的に振動データを得るため、各パラメータの値を

$$m_1 = m_2 = 1, c = 0.05, k = 1, \beta = 0.1 \dots\dots\dots (35)$$

とした。外力 $\{q\}$ として、質量 m_1 の物体にのみ大きさ1の調和外力作用させる

$$q_1 = \cos \omega t, q_2 = 0 \dots\dots\dots (36)$$

の場合と、質量 m_2 の物体にのみ大きさ1の調和外力作用させる。

$$q_1 = 0, q_2 = \cos \omega t \dots\dots\dots (37)$$

の場合とを考えた。両方の場合にそれぞれ数値的に定常振動 $\{x\}$ を求め、一自由度系の場合と同様に、これに正規分布を成す乱数を加え、実験データと見なした。

同定のためマトリックス $[M], [C], [K]$ を式(33)の形に、また非線形項 $\{N\}$ を

図4 二自由度非線形系

図5 復元力に非線形性をもつ二自由度系の同定結果から求めた復元力のRMS誤差

図6 減衰力に非線形性をもつ一自由度系の同定結果から求めたRMS誤差

の形においた。加える外力の振動数 ω は、式(36)および式(37)のそれぞれの場合に0.5から2.6の範囲で13点取り、フーリエ級数展開の打ち切り次数を3とした。

一自由度系の場合と同じように同定を行った。同定精度を見るため、ノイズとして加えた乱数の標準偏差 σ の各値に対しRMS誤差を求めた。例として復元力に対するRMS誤差を、前報の同定法によるRMS誤差と合わせて図5に示す。この図から、二自由度系に対しても、前報の結果と比較して精度の良い同定結果が得られていることがわかる。

さらに図4に示した二自由度系に、同じ特性のばね、ダンパおよび質量 m_3 の物体を加えてできた三自由度系を取り上げ、数値的に求めた定常振動に正規分布を成す乱数を加えて得たデータを実験データと見なしてこの系の同定を行った。非線形項を式(38)を三自由度に拡張した形におき、各物体を加振したデータを用いて数値シミュレーションを行った結果、この場合にも、前報の方法と比較して精度の良い同定結果が得られることがわかった。

3・3 減衰力に非線形性をもつ系 減衰力に非線形性をもつ一自由度系として、Van der Polの方程式で表される系を取り上げる。この系を支配する運動方程式は

$$m\ddot{x} - \varepsilon(1-x^2)\dot{x} + kx = q \dots\dots\dots (39)$$

となる。

数値的に振動データを求めるため、外力 q として

$$q = Q \cos \omega t \dots\dots\dots (40)$$

の形の調和外力を加え、外力の大きさ Q と各パラメータの値を

$$Q=1, m=1, k=1, \varepsilon=0.01 \dots\dots\dots (41)$$

とした。このときには、外力の振動数 ω が約0.8から1.2の範囲で外力と同じ振動数の定常振動が発生することがわかったので、この範囲で ω を5点取り、各 ω

図7 防振器

について一周分定の定常振動を数値的に求め、正規分布を成す乱数を加えて実験データと見なした。

同定のため、減衰力を表す項 N を

$$N = (\alpha + \beta x + \gamma x^2) \dot{x} \quad \dots\dots\dots (42)$$

の形においた。フーリエ級数展開の打ち切り次数を 3 とした。

復元力に非線形性をもつ系の場合と同じように同定を行い、得られた結果の RMS 誤差を前報の方法によるものとあわせて図 6 に示す。図から、この場合にも前報の方法による結果より精度が改善されていることがわかる。

次に二自由度系の例として、図 7 に示す防振器を取り上げる。図中の N は非線形性をもつ自励力を表す部分であり、

$$N = -c_1 \dot{x}_1 + e x_1^2 \dot{x}_1 \quad \dots\dots\dots (43)$$

で与えられるとする。この系の運動方程式は

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} + \{N\} = \{q\} \quad \dots\dots\dots (44)$$

となる。

数値的に振動を求めるため、質量 m_1 の物体にのみ調和外力

$$q_1 = Q \cos \omega t \quad \dots\dots\dots (45)$$

を作用させ、外力の大きさおよび各パラメータの値を

$$Q=1, \quad m_1=1, \quad m_2=0.1, \quad k_1=1, \quad k_2=0.1 \\ c_1=0.02, \quad c_2=0.01, \quad e=0.02 \quad \dots\dots\dots (46)$$

とし、数値的に定常振動 $\{x\}$ を求め、これに正規分布を成す乱数を加え、外力とあわせて実験データと見なした。

同定のため、マトリックス $[M]$, $[C]$, $[K]$ を式(33)

図 8 減衰力に非線形性をもつ二自由度系の同定結果から求めた減衰力の RMS 誤差

の形に、また非線形項 $\{N\}$ を

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= \{ \alpha_{11} x_1 + \alpha_{12} x_2 + \alpha_{13} x_1^2 \\ &\quad + \alpha_{14} x_1 x_2 + \alpha_{15} x_2^2 \} \dot{x}_1 \\ N_2 &= \{ \alpha_{21} x_1 + \alpha_{22} x_2 + \alpha_{23} x_1^2 \\ &\quad + \alpha_{24} x_1 x_2 + \alpha_{25} x_2^2 \} \dot{x}_2 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (47)$$

の形においた。外力の振動数 ω を 0.6 から 1.4 の範囲で 9 点取り、フーリエ級数展開の打ち切り次数を 3 とした。

同定によって得られた結果に対し、特に減衰力の RMS 誤差を前報の方法によるものと合わせて示すと、図 8 のようになる。図からわかるように、この場合も前報の方法に比較して精度が改善されている。

3.4 復元力と減衰力に非線形性をもつ系 最後に復元力と減衰力の両方に非線形性をもつ一自由度系を考える。取り上げる系は、復元力に変位の三乗の非線形性を持ち、さらに減衰力に Van der Pol の方程式で支配される系と同じ非線形性をもつものとする。この系の運動方程式は

$$m \ddot{x} - \epsilon_1 (1 - x^2) \dot{x} + kx + \epsilon_2 x^3 = q \quad \dots\dots\dots (48)$$

となる。

数値的に振動データを求めるため、外力 q として

$$q = Q \cos \omega t \quad \dots\dots\dots (49)$$

の形の調和外力を加え、外力の大きさ Q と各パラメ

図 9 復元力と減衰力に非線形性をもつ一自由度系の同定結果から求めた RMS 誤差

ータの値を

$$Q=1, \quad m=1, \quad k=1, \quad \varepsilon_1=0.01, \quad \varepsilon_2=0.1$$

……………(50)

とした。この場合、外力の振動数 ω が約 0.9 から 1.4 の範囲で外力と同じ振動数の定常振動が発生することがわかったので、この範囲で ω を 6 点取り、各 ω について一周期分の定常振動を数値的に求め、正規分布を成す乱数を加えて実験データと見なした。

同定のため、減衰力を表す項 N_d を

$$N_d = (\alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2) \dot{x} \quad \text{……………(51)}$$

の形に、また復元力を表す項 N_r を

$$N_r = \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3 \quad \text{……………(52)}$$

の形においた。フーリエ級数展開の打ち切り次数を 3 とした。

同定によって得た結果に対し、RMS 誤差を前報の方法によるものと合わせて示すと図 9 のようになる。この図から、本報告の方法による RMS 誤差は、前報の方法によるものより改善されていることがわかる。

4. ま と め

この報告では、測定データに含まれるノイズが比較的大きい場合でも精度の良い結果が得られる同定法の開発を目的として、ラグランジュの乗数法を導入して、前報で提案した多自由度非線形系の同定法を改良した。復元力に非線形性をもつ系、減衰力に非線形性をもつ系、復元力と減衰力の両方に非線形性をもつ系を取り上げて数値シミュレーションを行い、改良した同定法が、データに含まれるノイズが比較的大きい場合でも有効であることを確認した。

文 献

- (1) Ibanez, P., Identification of Dynamic Parameters of Linear and Nonlinear Structural Models from Experimental Data, *J. Nucl. Eng. Des.*, **25**(1973), 30.
- (2) Ibrahim, S. R. and Mikulcik, E. C., The Experimental Determination of Vibration Parameters from Time Responses, *Shock Vib. Bull.*, **46-5**(1976), 187.
- (3) Masri, S. F. and Caughey, T. K., A Nonparametric Identification Technique for Nonlinear Dynamic Prob-

- lems, *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, **46-2**(1979), 433.
- (4) Udawadia, F. E. and Kuo, Chin-Po, Non-Parametric Identification of a Class of Non-Linear Close-Coupled Dynamic Systems, *Earthqu. Eng. Struct. Dyn.*, **9**(1981), 385.
- (5) Stephan, C. U. and Ivan, E. M., *ASME Paper*, 82-DET-138(1982).
- (6) Okubo, N., The Effect of Non-Linearity on Transfer Function Measurement, *Sound Vib.*, **16-11**(1982), 34.
- (7) Kirshenboim, J. and Ewins, D. J., A Method for Recognizing Structural Nonlinearities in Steady-State Harmonic Testing, *Trans. ASME, J. Vib. Acoust. Stress Reliab. Des.*, **106-1**(1984), 49.
- (8) 渡部・佐藤, 多自由度非線形系の周波数応答解析, 機論, **51-467**, C(1985), 1765.
- (9) 大久保・山本・仁礼, ヒルベルト変換を用いた非線形振動解析—モーダルアナリシスの基礎と応用に関する研究, 精密工学会誌, **52-3**(1986), 485.
- (10) Stanway, R., Sproston, J. L. and Stevens, N. G., A Note on Parameter Estimation in Non-Linear Vibrating Systems, *Proc. Instn. Mech. Eng.*, **199-C**, 1(1985), 79.
- (11) Yongxin, Y. and Ibrahim, S. R., A Nonparametric Identification Technique for a Variety of Discrete Nonlinear Vibrating Systems, *Trans. ASME, J. Vib. Acoust. Stress Reliab. Des.*, **107-1**(1985), 60.
- (12) 渡部・佐藤, 非線形ビルディングブロック法の応用に関する研究, 機論, **52-481**, C(1986), 2397.
- (13) Busby, H. R., Nopporn, C. and Singh, R., Experimental Modal Analysis of Non-Linear Systems: A Feasibility Study, *J. Sound Vib.*, **180-3**(1986), 415.
- (14) 佐藤・岩田・内潟, 一自由度非線形系のパラメータ同定法, 機論, **54-497**, C(1986), 87.
- (15) 安田・河村・渡辺, 多自由度非線形系の同定法 (第 1 報, 同定法の提案), 機論, **53-495**, C(1987), 2191.
- (16) 安田・河村・渡辺, 多自由度非線形系の同定法 (第 2 報, ノイズのある場合の同定), 機論, **54-500**, C(1988), 816.
- (17) 安田・河村, クーロン摩擦の作用する多自由度系の同定法, 機論, **54-504**, C(1988), 1708.
- (18) 安田・河村, 非線形振動系のノンパラメトリック同定法 (第 1 報, 方法の提案と一自由度系への応用), 機論, **54-507**, C(1988), 2550.
- (19) 安田・渡辺, 多自由度非線形系の同定法 (第 3 報, 同定システムの開発), 機論, **55-512**, C(1989), 833.
- (20) 粟屋, データ解析, (1983), 37, 学会出版センター.
- (21) 日野, スペクトル解析, (1977), 172, 朝倉書店.
- (22) 吉本, 確率統計工学, (1976), 24, 共立出版.
- (23) 近藤, 最適化法, (1984), 44, コロナ社.
- (24) 大熊・長松, 特性行列の実験的決定による系の同定 (第 2 報, 誤差を含むデータに対する同定法), 機論, **52-478**, C(1986), 1742.