質量感応法による振動モード形の簡易測定法*

山口 秀 谷*¹A Simple Technique of Analyzing Vibration Mode Shapes
by the Mass Response Method

Hideya YAMAGUCHI

In this paper, a new approach to obtaining mode shapes is proposed. The method analyzes mode shapes from the variation of the natural frequencies of the structure when an additional concentrated mass is attached. Although the method is unable to acquire high accuracy, such as the experimental modal analysis method based on curve fitting, and its application is confined to flexible structure, the method is simply and quickly achieved by using the frequency data only.

Key Words: Vibration, Mode shape, Natural Frequency, Modal Analysis, Eigenvalue, Eigenvector, Mass Response Method

1. 緒 言

振動モード形を求める手段として、加振機により定常振動させて応答を測定する方法⁽¹⁾が古くから使われており、近年になって実験モード解析法⁽²⁾が発展してきた。とくに実験モード解析法はモード特性を算出することによって動特性が理解しやすくなった。さらに最近特性行列を直接同定して⁽³⁾ FEM と一体化するとともに、感度解析⁽⁴⁾や最適化手法⁽⁵⁾により設計変更後の動特性予測も行われている。また逆に感度解析を用いて振動モデルの同定を行う方法⁽⁶⁾も提案されている。このように振動解析手法は飛躍的に発展してきたが、これらはいずれも多数点の応答を計測する必要がある。また加振装置、2 CH の FFT や解析装置などの十分な振動計測設備を必要とする。一方、固有振動数のみの測定は節以外の任意の一点の応答を計測するだけの簡単な測定装置で比較的容易に行うことができる。

そこで本研究では振動数のみから簡便にモード形を求める新しい手法を提案し、その有効性を確認する。

本手法は感度解析法の一つである多自由度質量感応法⁽⁷⁾を応用して、振動系に既知の質量を付加した場合の固有振動数の変化より振動モード形を求める方法である。本手法の適用対象は柔軟な構造物に限られ、また実験モード解析法のように精度良く求めることは困難であるが簡便にモード形あるいは節と腹の位置を知りたい場合には有効な手段であると考えられる。

2. 理論解析

多自由度質量感応法は文献(7)で提案されているが、まず概略について述べる。 N 自由度非減衰振動系の運動方程式は、振動数を Ω とすれば

$$(K - \Omega^2 M) \mathbf{y} = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここに $\mathbf{y} = \{y_1, y_2, \dots, y_N\}^T$ は変位ベクトル、 M は質量マトリックス、 K は剛性マトリックスである。式(1)を満足する N 個の固有振動数を Ω_n ($n=1 \sim N$)、固有ベクトルを $\phi_n = \{\phi_{1n}, \phi_{2n}, \dots, \phi_{Nn}\}^T$ とする。ここに ϕ_{rn} の添字 r , n は質量の番号およびモードを示し、上添字 T は転置を意味する。固有ベクトルの直交性より

$$\phi_n^T M \phi_s = \begin{cases} 0 & (s \neq n) \\ M_n \neq 0 & (s = n) \end{cases} \quad \dots\dots\dots (2)$$

ここに M_n はモード質量である。ここで r 番めの質量に付加質量 Δm_r を取付けた場合の変位ベクトル $\mathbf{y}$ を

* 平成2年9月24日 第68期全国大会講演会において講演、原稿受付 平成3年1月30日。

*¹ 正員、防衛大学校 (〒239 横須賀市走水1-10-20)。

ϕ_n の線形結合

$$y = \delta_1 \phi_1 + \cdots + \delta_N \phi_N = \Phi \delta \quad (3)$$

として表す。ここに δ はモード座標ベクトルであり

$$\Phi = [\phi_1, \cdots, \phi_N], \delta = \{\delta_1, \cdots, \delta_N\}^T \quad (4)$$

また質量マトリックスが

$$M + \begin{bmatrix} 0 & & 0 \\ & \ddots & \\ & & \Delta m_r & \\ & & & 0 \\ & & & & \ddots \\ 0 & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

となることと式(2)を考慮して式(1)を変形すると、付加質量取付け後の運動方程式は

$$(P - \omega^2 \Delta m_r Q) \delta = 0 \quad (6)$$

ここに $Q = \phi_r \phi_r^T$, P は $P_n = (\Omega_n^2 - \omega^2) M_n$, ($n=1 \sim N$) を対角要素とする対角マトリックス, また ω は付加質量取付け後の振動数である。式(6)が零でない δ について成立するためには

$$\det(P - \omega^2 \Delta m_r Q) = 0 \quad (7)$$

式(7)を展開し, r 点に付加質量取付け後の n 次の固有振動数 $\omega = \omega_m$ に注目すると

$$\sum_{s=1}^N b_{ns}^r d_{rs} = a_n^r \quad (8)$$

ここに

$$b_{ns}^r = \frac{1}{\Omega_s^2 - \omega_m^2}, d_{rs} = \frac{\phi_{rs}^2}{M_s}, a_n^r = \frac{1}{\omega_m^2 \Delta m_r} \quad (9)$$

式(8)を $n=1 \sim N$ についてマトリックス式で整理すると

$$B_r d_r = a_r \quad (10)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} B_r &= [b_{ns}^r], (n, s=1, \cdots, N) \\ d_r &= [d_{rs}], (r=1, \cdots, N) \\ a_r &= [a_n^r], (n=1, \cdots, N) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

r 点に付加質量 Δm_r を取付けた前後の固有振動数 Ω_s および ω_m が得られれば式(10)のマトリックス B_r , a_r が決定されるので

$$d_r = B_r^{-1} a_r \quad (12)$$

が得られる。文献(7)では実験モード解析などにより最大振幅点を求め、この位置に付加質量を取付けて式

(12)より得られた M_r を動吸振器の設計に利用している。

本研究では、逆に式(12)を用いて振動モードの絶対値が得られることを示す。すなわち付加質量取付け点を次々と変えて $r=1 \sim N$ について d_r を求め、これらのベクトルで構成されたマトリックスを

$$D = \begin{bmatrix} d_1^T \\ \vdots \\ d_N^T \end{bmatrix} = [d_{rs}], (r, s=1, \cdots, N) \quad (13)$$

とする。この場合、マトリックス D の s 列

$$(d_{1s}, \cdots, d_{Ns})^T = \left\{ \frac{\phi_{1s}^2}{M_s}, \cdots, \frac{\phi_{Ns}^2}{M_s} \right\}^T \quad (14)$$

は s 次モードベクトルを2乗したものであり, $\sqrt{d_{rs}}$, ($r=1 \sim N$) より s 次モード形の相対大きさの絶対値が得られる。なお式(8)において N^*+1 次以上のモード s の振動数が $\Omega_s^2 \gg \omega_m^2$ の場合には, N^*+1 次以上の項を無視して N^* 次までのモードを対象にして式(10)~(14)の解析を行うことができる。さらにこの場合には解析するモードの数と固有ベクトルの要素数が等しくなくともよいので、連続体の場合にも任意の R 個の点を選択して R 個の点における N^* 次までの固有ベクトルの絶対値が得られる。

さて本手法では本質的に位相情報が得られていないため、直接には絶対値しか得られないが、図1のような離散系の場合には以下に述べるように固有ベクトルの直交性を利用して質量, ばね定数を求めて固有ベクトルを逆算できる。すなわち、式(2)より

$$\sum_{r=1}^N m_r \frac{\phi_{rn}^2}{M_n} = \sum_{r=1}^N d_{rn} m_r = 1 \quad (15)$$

これを $n=1 \sim N$ についてマトリックス式で整理すると

$$D m = 1 \quad (16)$$

ここに $m = [m_1, \cdots, m_N]^T$, また 1 は全要素が1の列ベクトルである。よって $m = D^{-1} 1$ より r 点の質量 m_r が求まる。次に $\sqrt{m_n}$, ($n=1 \sim N$) を対角要素とする対角マトリックスを R とし,

$$M = R^T R \quad (17)$$

$$\phi_n^* = \frac{1}{\sqrt{M_n}} R \phi_n \quad (18)$$

とにおいて n 次モードに注目すると、式(1)は

$$(K R^{-1} - \Omega_n^2 R^T) \phi_n^* = 0 \quad (19)$$

式(19)に前から $(R^T)^{-1}$ を乗じると

$$(E - \Omega_n^2 I) \phi_n^* = 0 \quad (20)$$

ここに I は単位マトリックスであり

$$E = (R^T)^{-1} K R^{-1} \quad (21)$$

$n=1 \sim N$ について式(20)をまとめて表すと

図1 N 自由度振動系

$$E\Phi^* = \Phi^* \lambda \quad \dots\dots\dots (22)$$

ここに λ は Ω_n^2 , ($n=1 \sim N$) を対角要素とする対角マトリックス, また

$$\Phi^* = [\phi_1^*, \phi_2^*, \dots, \phi_N^*] \quad \dots\dots\dots (23)$$

式(21), (22)より

$$K = R^T \Phi^* \lambda \Phi^{*-1} R \quad \dots\dots\dots (24)$$

さらに Ω_n , ($n=1 \sim N$) を対角要素とする対角マトリックスを Ω として $\lambda = \Omega^T \Omega$ とおき, $\Phi^{*T} \Phi^* = I$ の関係から $\Phi^{*-1} = \Phi^{*T}$ となることを考慮すると式(24)は

$$K = G^T G \quad \dots\dots\dots (25)$$

ここに $G = \Omega \Phi^{*T} R \quad \dots\dots\dots (26)$

式(25)より K の対角要素 k_{rr} は

$$k_{rr} = m_r^2 \sum_{n=1}^N \frac{\Omega_n^2 \phi_{rn}^2}{M_n} = m_r^2 \sum_{n=1}^N \Omega_n^2 d_{rn} \quad \dots\dots\dots (27)$$

一方, 図1の振動系では

$$K = \begin{bmatrix} k_1 + k_2, & -k_2, & 0, & \dots & 0 \\ -k_2, & k_2 + k_3, & -k_3, & 0, & \dots & 0 \\ 0, & -k_3, & \dots & & & \\ \dots & \dots & \dots & & & \\ & & & k_{N-1} + k_N, & -k_N & \\ 0, & \dots & & & -k_N, & k_N \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (28)$$

したがって K の対角要素が決定されると図1のばね

表1 3自由度系の固有振動数 (Hz)

	1st (n=1)	2nd (n=2)	3rd (n=3)
Without additional mass	15.22	42.72	67.55
Additional mass at m_1 (r=1)	15.05	40.04	65.49
Additional mass at m_2 (r=2)	14.66	41.93	63.01
Additional mass at m_3 (r=3)	14.32	41.60	67.16

図2 3自由度系のモード形

定数 $k_1 \sim k_N$ が得られる。このようにして得られた m_r , k_r を式(1)に代入して固有ベクトルを求めると, モード形の符号が求められる。

3. 実験および数値計算結果

2枚のりん青銅製平行板ばねで連結された3個の質量より成る3自由度系の場合について実験を行った。

質量およびばね定数の測定値は

$$m_1 = 80.7 \text{ g}, \quad k_1 = 4.0 \times 10^3 \text{ N/m}$$

$$m_2 = 68.7 \text{ g}, \quad k_2 = 4.7 \times 10^3 \text{ N/m}$$

$$m_3 = 97.9 \text{ g}, \quad k_3 = 3.9 \times 10^3 \text{ N/m}$$

である。この3自由度系の固有振動数, および付加質量 $\Delta m_r = 20.2 \text{ g}$ を質量 m_1 から m_3 まで順番に取付けた場合の振動数の測定結果を表1に示す。なお本実験では衝撃力を与えた後の自由振動波形を光学式変位計により検出し, マイコンに入力してFFT処理を行って振動数を求めた。図2に本解析法によって得られた1次, 2次および3次の振動モード形を○印で, また

表2 2自由度系の固有振動数 (rad/sec)

	1st (n=1)	2nd (n=2)
Without additional mass	$\Omega_1 = 135.9$	$\Omega_2 = 381.5$
Additional mass at m_1 (r=1)	$\omega_{11} = 130.0$	$\omega_{12} = 378.3$
Additional mass at m_2 (r=2)	$\omega_{21} = 134.1$	$\omega_{22} = 359.0$

図3(a) 振幅比の誤差

加振機を用いて1次から3次の共振振動数で定常振動させ変位を直接測定して求めたモード形を×印で示す。両者はよく一致している。また式(16)、(27)で逆算された質量、ばね定数は

$$\begin{aligned} m_1 &= 83.2 \text{ g}, & k_1 &= 4.2 \times 10^3 \text{ N/m} \\ m_2 &= 70.1 \text{ g}, & k_2 &= 4.2 \times 10^3 \text{ N/m} \\ m_3 &= 100.9 \text{ g}, & k_3 &= 4.2 \times 10^3 \text{ N/m} \end{aligned}$$

となり、直接測定された値と差がある。これはFFT専用装置のように振動数が精度良く得られなかったためと考えられる。そこで $m_1=68.7 \text{ g}$, $m_2=97.9 \text{ g}$, $k_1=4.65 \times 10^3 \text{ N/m}$, $k_2=3.89 \times 10^3 \text{ N/m}$ の2自由度系について、表2に示す付加質量 $\Delta m_r=11 \text{ g}$ 取付前後の振動数の変化 $\Omega_n - \omega_{rn}$ に誤差が生じた場合の影響を数値計算により調べた。図3(a)は式(14)で計算した質量 m_1 , m_2 の振幅比の絶対値の誤差を示す。図(a)~(d)において太い実線 ($r=n$, $n=1$), 細い実線 ($r=2$, $n=1$), 破線 ($r=1$, $n=2$) および一点鎖線 ($r=2$, $n=2$) はそれぞれ質量 m_r に付加質量取付後の n 次の振動数に誤差が生じた場合を表す。1次モード ϕ_{11}/ϕ_{21} は付加質量取付位置 $r=1, 2$ のいずれの場合にも1次モードの固有振動数 ($n=1$) の誤差が大きく影響し、2次モードの固有振動数 ($n=2$) の誤差にはあまり影響されない。逆に2次モード ϕ_{22}/ϕ_{12} は2次モードの固

図 3(b) 質量誤差

図 3(c) ばね定数誤差

図 3(d) 再計算後の振幅比誤差

図 4 片持ばり

図5 片持ばりのモード形

有振動数の誤差が大きく影響している。図3(b), (c)は逆算された質量およびばね定数の誤差を示す。質量の誤差は $r=1$, $n=1$ および $r=2$, $n=2$ の場合、すなわち各モードで振幅最大の位置に付加質量を取付た場合の振動数の変化が小さく見積もられた場合に大きく、またばね定数の誤差はいずれの振動数の誤差にも大きく影響される。図3(d)は逆算された質量およびばね定数を用いて再計算された固有ベクトルを示す。再計算された固有ベクトルは、式(14)によって得られる振幅比の絶対値の場合よりも著しく振動数の誤差に影響される。次に図4に示すような長さ540 mm, 幅80 mm, 厚さ3.1 mm, 質量1 052 gのスチール製片持

ばりについて実験を行った。片持ばりのみの振動数を求め、次に77.7 gの付加質量を先端から順番に25 mm間隔で位置を変えて取付けた場合の振動数を求めて解析を行った。なお振動数はやはり先端に取付けた質量約0.3 gの加速度センサで検出した自由振動波形より求めた。式(14)より得られた1次から5次までの振動モード形を図5に●印で示す。図5において横座標 x は支持部からの長さをより全長で割った無次元長さである。また太い実線は片持ばりの理論式より求めた振動モードを示し、その絶対値を細い実線で示す。なおこの片持ばりをばねで連結された5個の質量より成る5自由度系と考え、代表点を5個選択して式(16), (27)より質量およびばね定数を求めモードの符号を求めてみたが、良い結果が得られなかった。

4. 結 言

多自由度質量感応法を応用した振動モード形の簡易測定法を提案し、実験および数値計算により有効性を確認した。得られた結果を要約すると、

- (1) 振動モードの絶対値は多自由度系および無限自由度系いずれの場合も良好な結果が得られる。
- (2) ほぼ有限自由度とみなせる場合には、ばね定数、質量を逆算して振動モードの符号を求めることができるが、無限自由度系の場合には困難である。実用上は簡単に節と腹の位置をつかめるだけでも、振動状況を把握する際に有益であると考えられる。

文 献

- (1) 日本機械学会編, 振動・騒音計測技術, (1985), 108, 朝倉書店.
- (2) 長松, モード解析, (1985), 99, 培風館.
- (3) 大熊・長松, 機論, 51-464, C (1985), 719.
- (4) 萩原・永淵, 機論, 54-497, C (1988), 124.
- (5) 大熊・ほか3名, 機論, 54-504, C (1988), 1753.
- (6) 藤川・ほか3名, 機論, 52-476, C (1986), 1224.
- (7) 背戸・ほか3名, 機論, 53-485, C (1982), 52.