ラプラス変換境界要素法による非定常動弾性問題の 解析精度に関する考察(二次元の場合)*

田中正隆^{*1}, 中村正行^{*1}, 青樹和彦^{*2}

A Study on Computational Accuracy of the Laplace Transform Boundary Element Method for Unsteady Elastodynamic Problems (Two-Dimensional Cases)

Masataka TANAKA, Masayuki NAKAMURA and Kazuhiko AOKI

In the Laplace transform boundary element analysis for unsteady elastodynamic problems, the inverse transform must be performed numerically. Computational accuracy and efficiency of the results are influenced by the computational conditions such as the sampling number and the number of boundary elements. This paper proposes a new procedure to determine the computational conditions for accurate and efficient analysis of the unsteady elastodynamic problems. The proposed procedure employs two techniques of the numerical inverse Laplace transform, that is, Hosono's technique for obtaining the reference results and Durbin's technique for main use in numerical analysis. Numerical computation is carried out for several two-dimensional problems to demonstrate the usefulness of the proposed procedure.

Key Words: Boundary Element Method, Computational Mechanics, Numerical Analysis, Transient Response, Elastic Wave

1. 緒 言

境界要素法を用いた非定常動弾性問題の解析においては、時間微分の取扱い方法により次の三種類のアプローチが考えられる⁽¹⁾。すなわち、(1)ラプラス変換またはフーリエ変換を用いる変換解法、(2)時間依存の基本解を用いる直接解法、(3)時間微分を時間ステップ近似する時間ステップ解法である。

著者らはこれまで、変換解法による非定常動弾性問題の境界要素解析を取り上げ、要素分割数やサンプリング点数などの計算精度への影響や、数値逆変換手法の違いによる計算時間の比較検討を行ってきた⁽²⁾⁽³⁾。

本研究では、数値ラプラス逆変換の手法として、逆変換の誤差を制御でき精度良い解を得ることが可能な細野の方法と、計算時間が短くて済むDurbinの方法を取り入れる。そして、この両者を組み合わせて効率的に精度良い解を得る手法を提案する。すなわち、細野の方法を用いて得られた結果を参照データとして、Durbinの方法による逆変換の誤差を小さくするための計算条件を決定する手法を提案する。この手法をい

くつかの二次元非定常動弾性問題に適用し、その有効性を確かめた結果について報告する。

2. ラプラス変換境界要素法

2・1 定式化 等方均質な線形弾性体に動的な力が作用する場合を考える。物体力が作用しないと仮定すると、この問題の支配微分方程式は次式のように表わすことができる⁽⁴⁾。

$$(C_1^2 - C_2^2)u_{i,j}(t) + C_2^2 u_{j,i}(t) = \ddot{u}_j(t) \cdots \cdots (1)$$

ただし、 $u_j(t)$ は時刻 t における物体のある点の変位を表し、 C_1 と C_2 は次式のように表される縦波と横波の伝播速度である。

$$C_1 = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}, C_2 = \sqrt{\mu/\rho} \cdots \cdots (2)$$

上式において ρ は物体の密度を表し、 λ と μ はLaméの定数であり、縦弾性係数 E とポアソン比 ν を用いて次式で与えられる。

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \cdots \cdots (3)$$

支配微分方程式(1)にラプラス変換を施し、初期条件をすべて零と仮定すると、ラプラス変換面での支配微分方程式が得られ次式ようになる。

$$(C_1^2 - C_2^2)\bar{u}_{i,j}(s) + C_2^2 \bar{u}_{j,i}(s) = s^2 \bar{u}_j(s) \cdots (4)$$

ここで、ラプラス変換を施した変数には上付きハット

* 原稿受付 平成3年4月1日。

^{*1} 正員, 信州大学工学部 (〒380 長野市若里500)。

^{*2} 学生員, 信州大学大学院。

($\hat{\cdot}$)を付けて表す。また、 s はラプラス変換パラメータを表す。

境界積分方程式の定式化は、得られたラプラス変換面での支配微分方程式(4)の両辺にこの問題に対応する基本解 $\hat{u}_{ji}^*$ をかけ、これを領域 Ω 全体について積分して得られる恒等式：

$$\int_{\Omega} [(C_{11}^2 - C_{22}^2) \hat{u}_{i,j}(s) + C_{22}^2 \hat{u}_{j,i}(s) - s^2 \hat{u}_j(s)] \hat{u}_{ji}^*(s) d\Omega = 0 \quad \dots\dots\dots (5)$$

から出発する。この式に Gauss の発散定理を適用し領域積分を境界積分に変換した後、考える点を境界 Γ 上にとると、ラプラス変換面での境界積分方程式が得られて次式となる⁽⁵⁾。

$$c_{ji} \hat{u}_j(s) + \int_{\Gamma} \hat{u}_j(s) \hat{p}_{ji}(s) d\Gamma = \int_{\Gamma} \hat{p}_{ji}(s) \hat{u}_{ji}^*(s) d\Gamma \quad \dots\dots\dots (6)$$

境界積分方程式(6)を境界要素法により離散化し、ラプラス変換した境界条件を適用することにより、境界上の未知節点量に関する代数方程式系が得られて次のようになる。

$$[A(s)]\{\hat{x}(s)\} = \{B(s)\} \quad \dots\dots\dots (7)$$

式(7)を解けば Laplace 変換面での境界上のすべての節点量を求めることができる。得られたラプラス変換面での諸量に数値ラプラス逆変換を施すことにより、時間依存の節点量を求めることができる。

2.2 数値ラプラス逆変換 数値ラプラス逆変換の方法としては Papoulis の方法⁽⁶⁾、Durbin の方法⁽⁷⁾、Krings-Waller の方法⁽⁸⁾、細野の方法⁽⁹⁾ など種々の方法が提案されている。本研究では高速フーリエ変換(FFT)を適用した Durbin の方法とオイラー変換を適用した細野の方法の2種類の数値ラプラス逆変換手法を用いて、効率的に精度の良い解を得る方法について検討を行う。二つの逆変換手法を要約すれば次のようになる。

Durbin の方法⁽⁷⁾ Durbin の方法では、いくつかのラプラス変換パラメータ s_n についてラプラス変換面での解 $\hat{f}(s_n)$ を求めて、次式により時刻 t_n における解 $f(t_n)$ を計算する。

$$f(t_n) = 2 \frac{\exp(6n\Delta t)}{T} \left[-\frac{1}{2} Re \left\{ \hat{f} \left(\frac{6}{T} \right) \right\} + Re \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} (A(k) + iB(k)) W^{nk} \right\} \right] \quad \dots\dots\dots (8)$$

ここで、

$$W = \exp \left(i \frac{2\pi}{N} \right) \\ s_n = \frac{6}{T} + i \frac{2n\pi}{T}$$

$$A(k) = \sum_{m=0}^M Re \left\{ \hat{f} \left(\frac{6}{T} + i(k + mN) \frac{2\pi}{N} \right) \right\} \\ B(k) = \sum_{m=0}^M Im \left\{ \hat{f} \left(\frac{6}{T} + i(k + mN) \frac{2\pi}{N} \right) \right\}$$

T は解析対象時間、 N はラプラス変換パラメータ s のサンプリング数、 M は級数の打ち切り項数である。また、 Δt は次式で表わされる。

$$\Delta t = T/N \quad \dots\dots\dots (9)$$

式(8)における計算においては、高速フーリエ変換(FFT)を適用し計算が高速に行えるよう工夫されている。

細野の方法⁽⁹⁾ α を任意の正数として次のような関数を定義する。

$$Eec(s, \alpha) = \exp(\alpha) / \{2 \cosh(\alpha - s)\} \quad \dots\dots\dots (10)$$

この関数は、

$$Eec(s, \alpha) = \exp(s) / [1 + \exp\{-2(\alpha - s)\}] \cdots (11)$$

と書くことができるので、

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} Eec(s, \alpha) = \exp(s) \quad \dots\dots\dots (12)$$

となることがわかる。したがって、 α を適切に選ぶことにより $Eec(s, \alpha)$ によって指数関数 $\exp(s)$ の良い近似が得られる。そこで、ラプラス逆変換式：

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{r-i\infty}^{r+i\infty} \hat{f}(s) \exp(st) ds \quad \dots\dots\dots (13)$$

の $\exp(st)$ を $Eec(st, \alpha)$ で置き換えて、Bromwich 積分を極のまわりの積分に変換しこれを解析的に計算すれば逆変換を精度良く行えることになる。細野の方法による時間依存の解 $f(t_n)$ は、変換面での解 $\hat{f}(s_m)$ をもとに次式で与えられる。

$$f(t_n) = \frac{\exp(\alpha)}{t_n} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m Im \left\{ \hat{f} \left(\frac{\alpha + i(m-0.5)\pi}{t_n} \right) \right\} \quad \dots\dots\dots (14)$$

3. 二種類の数値逆変換手法を利用した計算手法

3.1 新しい計算手法の提案

前章で述べた2種類の数値逆変換の特徴をあげると、Durbin の方法ではサンプリング点を決めて境界要素解析をそれぞれのサンプリング点について一回行うだけでよく、計算時間が短くて済む。しかし、計算精度が要素分割数やサンプリング数に影響され、解析解のわからない問題に対しては、得られた解の精度を保証することは困難である。細野の方法では、数値逆変換の誤差の制御が可能であるが、境界要素解析は考察時刻が異なるごとに必要回数を行わなければならないので、Durbin の方法よりはるかに計算時間がかかることになる⁽³⁾。本研究では、いくつかの時刻において細野の方法により計算された参照値を用いて、それらの評価時刻において

Durbin の方法によって得られる計算値との差が最小となるように最適な Durbin の方法の計算条件を決定し、これをもとに Durbin の方法により効率的に精度良い解を得る手法を提案する。本手法によれば、細野の方法だけを用いるよりは計算時間が大幅に短縮できることになる。

本手法による解析手順をまとめると以下のようになる。

(1) 数値逆変換手法に細野の方法を用いたラプラス変換境界要素法により、いくつかの時刻(評価時刻)における境界値を計算する。

(2) Durbin の方法を用いて、サンプリング数をいくつか変えて解析を行い、評価時刻における境界値を計算する。

(3) 評価時刻において、細野の方法を用いた時の値との差が最小となるサンプリング数を決定する。

(4) 求めた最適なサンプリング数を用いて Durbin の方法により計算を行う。

3・2 計算手法の検討 はじめに、本手法を用いて解析解が既知の問題を解析し、いくつかの評価時刻における誤差が最小となるように Durbin の方法のサンプリング数を決定したときに、全体の誤差も最小となることを示す。

まず、図 1 に示すような正方形板の x 軸方向に縦波が伝播する問題を解析する。二次元領域に対してポアソン比を零として得られる計算結果を一次元問題の解析解と比較する。図 1 の $H(t)$ は単位ステップ関数である。材料定数は、縦弾性係数を 196.3 GPa、密度を $7.85 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ と仮定して計算を行った。また、図 2 に示すような無限領域中の円孔に衝撃内圧が作用する問題と、図 3 に示すような厚肉円筒に衝撃内圧が作用する問題を検討する。材料定数はどちらの問題も縦弾性係数を 206 GPa、密度を $7.85 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ 、ポアソン比を 0.3 とし平面ひずみ状態を仮定して計算を行っ

た。厚肉円筒の問題に対しては松本らの解析解⁽¹⁰⁾ と境界要素法によって得られる計算値を比較する。

3・3 誤差評価のためのパラメータの導入 Durbin の方法を用いて問題を解析する場合、計算精度は要素分割数やサンプリング数によって影響を受ける。解の精度を検討するために次のようなパラメータを導入する。

$$x = \frac{C_1 \Delta t}{\Delta L} = \frac{\Delta t \text{ 時間の波の伝播距離}}{\text{節点間の最小距離}} \quad \dots\dots (15)$$

式(15)で定義される無次元数 x は、時間 Δt の間に波が伝播する距離と境界要素の節点間の最小距離との比を表す。この無次元数はクーラン数と呼ばれることもある。

また、それぞれの例題の誤差評価は、円孔の例題と厚肉円筒の例題に対しては、次のように定義される平均誤差を考える。すなわち、

円孔および厚肉円筒の例題に対する誤差評価式

$$Er = \frac{100}{N} \sum_{i=1}^N \frac{|P^i - P_{ex}^i|}{|P_{ex}^i|} \% \quad \dots\dots (16)$$

正方形板の例題に対する誤差評価式

$$Er = \frac{100}{N} \sum_{i=1}^N \frac{|P^i - P_{ex}^i|}{|P_{\max} - P_{\min}|} \% \quad \dots\dots (17)$$

ただし、 N : 計算点数

図 2 衝撃内圧が作用する無限領域中の円孔

図 3 衝撃内圧が作用する厚肉円筒

P^i : 計算値

P_{ex}^i : 解析解

P_{max} : 解析解の最大値

P_{min} : 解析解の最小値

式(16), (17)の $Er\%$ は相対誤差を解析時間内で平均した境界要素の一節点あたりの相対誤差をパーセントで表わしたものである。

3・4 解析結果 表1に正方形板の問題に対する3点の評価時刻における平均誤差と解析対象時間全体の平均誤差との関係を示す。上段が3点の評価時刻における平均誤差, 下段が解析対象時間全体の平均誤差を示している。着目した3点の評価時刻は, 要素数16のとき96, 144, 192 μsec . (解析対象時間は240 μsec .), 要素数24のとき64, 96, 128 μsec . (解析対象時間は160 μsec .), 要素数32のとき48, 72, 96 μsec . (解析対象時間は120 μsec .), 要素数40のとき, 40, 60, 80 μsec . (解析対象時間は100 μsec .)である。これらの評価時刻は解析対象時間内に等間隔に選んだものである。いずれの要素分割においても評価時刻における平均誤差が最小のとき, 解析対象時間全体の平均誤差が最小となっている。

次に, 表2に無限領域中の円孔の問題に対する, 評価時刻における平均誤差と解析対象時間全体の平均誤差との関係を示す。評価時刻は, 前の例題と同様に解析対象時間内に等間隔に3点選んだ。この場合も正方形板の問題と同様に評価時刻での平均誤差が最小のとき, 解析対象時間全体の平均誤差が最小となっている。

さらに, 表3に厚肉円筒の問題に対する評価時刻における平均誤差と解析対象時間全体の平均誤差との関

係を示す。評価時刻は, 解析対象時間内に等間隔に3点選んだ。この場合も正方形板と円孔の問題と同様に評価時刻での平均誤差が最小のとき, 解析対象時間内全体の平均誤差が最小となっている。以上の三つの例題の解析結果から, 解析解のわからない問題においても, いくつかの評価時刻において細野の方法によって得られた数値逆変換誤差を制御した計算値と, Durbinの方法によって得られた計算値との差が最小となるようにDurbinの方法におけるサンプリング数を決定すれば, 効率よく精度の良い解が得られると考えられる。

4. 任意の問題への適用結果

本手法を適用して任意の問題の非定常応答を解析した例を示す。図4に示すような一辺が固定された正方形板にステップ関数で表される衝撃力が作用する問題を解析する。固定辺ABの中心位置であるE点における表面力の時刻歴応答を計算した。図中の $H(t)$ は単位ステップ関数である。材料定数は, 縦弾性係数を210 GPa, ポアソン比を0.3, 密度を $7.85 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ とし, 平面ひずみ状態を仮定して計算を行った。サンプリン

表2 円孔の問題に対する平均誤差

NUMBER OF BOUNDARY ELEMENTS	$\kappa=1.0$ ($N=50$)	$\kappa=2.0$ ($N=25$)	$\kappa=3.2$ ($N=15$)
4	4.18	3.67	2.52
	4.41	4.05	3.66
6	0.91	0.58	1.29
	1.57	1.24	1.51
8	0.12	0.33	1.71
	0.50	1.04	1.67

UPPER ROW: AVERAGE ERROR OF THREE POINTS(%)
LOWER ROW: AVERAGE ERROR OF TOTAL POINTS(%)

表3 厚肉円筒の問題に対する平均誤差

NUMBER OF BOUNDARY ELEMENTS	$\kappa=1.0$ ($N=50$)	$\kappa=2.0$ ($N=25$)	$\kappa=3.2$ ($N=15$)
39	7.60	5.84	5.83
	47.73	24.42	22.22
52	9.99	9.68	9.70
	81.27	34.05	57.41

UPPER ROW: AVERAGE ERROR OF THREE POINTS(%)
LOWER ROW: AVERAGE ERROR OF TOTAL POINTS(%)

表1 正方形板の問題に対する平均誤差

NUMBER OF BOUNDARY ELEMENTS	$\kappa=1.0$ ($N=50$)	$\kappa=2.0$ ($N=25$)	$\kappa=3.2$ ($N=15$)	$\kappa=4.8$ ($N=10$)
16	3.65	0.96	—	3.90
	5.16	3.55	—	4.53
24	1.29	0.37	1.02	—
	4.39	2.38	3.70	—
32	0.98	0.09	—	2.35
	3.11	1.03	—	2.85
40	4.75	3.15	3.52	—
	1.65	0.61	0.86	—

UPPER ROW: AVERAGE ERROR OF THREE POINTS(%)
LOWER ROW: AVERAGE ERROR OF TOTAL POINTS(%)

グ数を 50 点として、全解析対象時間にわたって細野の方法を用いて計算した結果と、本論文で提案した手法により最適な計算条件を選定して計算した結果を表 4 にまとめる。解析対象時間は $100 \mu\text{sec.}$ とし、着目した評価時刻は、40, 60, $80 \mu\text{sec.}$ の 3 点とした。STEP 1 は細野の方法によって 3 点の時刻における値を計算する過程であり、STEP 3 は STEP 2 によって

得られた評価時刻での平均誤差を二次関数近似して誤差が最小となる x を選びそれに相当するサンプリング数(整数)により計算した結果である。また STEP 2 における計算結果を図 5～図 7 に示し、最も精度の良いと考えられる条件により計算した結果(STEP 3)を図 8 に示す。実線は細野の方法でサンプリング数 50 点で行った結果であり、図中のシンボルは Durbin の方

表 4 一辺が固定された正方形板の解析結果

	HOSONO'S TECHNIQUE	STEP 1 CALCULATION OF THREE POINTS	STEP 2			STEP 3
			$\kappa=0.7$ ($N=50$)	$\kappa=1.8$ ($N=20$)	$\kappa=3.6$ ($N=10$)	$\kappa=2.4$ ($N=15$)
AVERAGE ERROR OF THREE POINTS(%)	—	—	6.70	2.52	3.47	0.54
AVERAGE ERROR OF TOTAL POINTS(%)	—	—	7.53	3.06	2.41	1.81
CPU TIME(sec.)	1546	116.66	109.64	44.43	22.40	33.63
TOTAL CPU TIME(sec.)	1546	326.76

図 4 一辺が固定された正方形板

図 6 $\kappa=1.8$ における結果 図 5 $\kappa=0.7$ における結果 図 7 $\kappa=3.6$ における結果

図 8 $x=2.4$ における結果(最適な x による結果)

法による計算値である。これらの図と表から、提案した方法を用いると細野の方法だけを用いるときよりも $1/5$ の CPU 時間で計算できることがわかる。なお、表 4 の CPU 時間は、東京大学大型計算機センターの HITAC M-880/310 を使用した場合について示してある。

5. 結 言

本研究では、ラプラス変換境界要素法における数値

的逆変換手法として Durbin の方法と細野の方法を組み合わせて用い、適切な計算条件を選定して計算を行う方法を提案した。この手法によれば、計算時間が大幅に短縮されるうえ、計算精度の良い結果が得られることを、二次元問題の例について示した。提案した手法によれば、Durbin の方法の適切な計算条件がわかり、解析解のわからない問題に対して効率的で精度の良い計算結果を得ることができる。

文 献

- (1) 田中, 機械の研究, 37-9(1985), 1025.
- (2) 田中・中村・青樹, 日本機械学会機械力学講演論文集, 900-44, Vol. A(1990), 403.
- (3) 田中・中村・青樹, 境界要素法論文集, 7(1990), 99.
- (4) Achenbach, J. D., *Wave Propagation in Elastic Solids*, (1973), 79, North-Holland.
- (5) Brebbia, C. A., Telles, J. C. F. and Wrobel, L. C., (田中訳), 境界要素解析-理論と応用, (1984), 366, 丸善.
- (6) Papoulis, A., *Quart. Appl. Math.*, 14(1957), 405.
- (7) Durbin, F., *Comput. J.*, 17-4(1974), 371.
- (8) Krings, W. and Waller, H., *Int. J. Num. Math. Eng.*, 14(1979), 1183.
- (9) 細野, 電気学会論文誌, 99-A(1979), 494.
- (10) 松本・中原, 機論, 32-273(1966), 709.