衝撃時における二足歩行機械の順動力学モデルの構築* (関節角速度の増分の一計算法)

重松 洋一^{*1}, 嘉数 侑昇^{*2}

A Forward Dynamics Model of a Biped Walking Machine at the Impact of a Swing Leg with the Ground (A Method of Calculating the Increment of the Joint Angle Velocity)

Yoichi SHIGEMATSU and Yukinori KAKAZU

A method of calculating the increment of the joint angle velocity vector at the impact, $\Delta \dot{q}$, which is substantial to the forward dynamics is proposed using Newton-Euler equations. First, assuming that (1) a landing leg does not bounce, (2) the force and the torque vectors from the ground are delta functions of time t , and (3) the joint torque vector is piecewise continuous in t , we obtain the increment of the joint angle velocity of the joint i , $\Delta \dot{q}_i$, and the increments of the linear and angular velocities of the frame attached to the link i , Δv_i and Δw_i , as homogeneous linear equations with respect to the increments of the linear and angular velocities of the frame attached to the foot link 0, Δv_0 and Δw_0 , and the impulse force and torque from the ground to the foot link, δ_f and δ_n . Next, 14 homogeneous linear equations in $(\Delta w_0^s, \Delta v_0^s, \delta_f^s, \delta_n^s)_{s=r,l}$ (r : right, l : left) are derived recursively using the above equations from the foot link to the trunk link. Then, imposing the feet conditions to the linear system, we obtain all the unknowns including $\Delta \dot{q}$. A numerical experiment of the method applied to a 4-degree-of-freedom (dof) biped walking machine with stilt foot links shows (1) all the unknowns including $\Delta \dot{q}$ are obtained, and (2) the 14×12 system of linear equations to be solved in the method is of full rank in almost all the cases.

Key Words: Robotics, Simulation, Mechanics, Impact Model, Forward Dynamics Model, Biped Walking Machine, Increment of Joint Angle Velocity, Newton-Euler Equations, Impulse Force, Impulse Torque

1. はじめに

歩行機械において、各関節に加えるトルク・ベクトル $\tau(t)$ を与えて関節角ベクトル軌道 $q(t)$ を求める順動力学モデルは、歩行機械の設計におけるシミュレーションや歩行機械の最適制御⁽¹⁾における公称軌道計算に必要である。

遊脚着地瞬間に地面から受ける衝撃力により不連続になる関節角速度ベクトル $\dot{q}(t)$ などは四足歩行機械に関して解析されている⁽²⁾。そこでは矢状平面内にモデルを近似し、ラグランジュの衝撃方程式と脚の拘束条件を連立させて衝撃時の運動を解析している。

ラグランジュ方程式とニュートン・オイラー方程式は等価であるから、どちらの方法を用いても衝撃をモデル化できるが、ここではラグランジュ関数の導出が不要であり、中間変数が関節に働く力などの物理量であるニュートン・オイラー方程式を用い、遊脚着地瞬間の順動力学モデルを構築するために最も重要なものの一つである遊脚着地瞬間の関節角速度ベクトルの増分 $\Delta \dot{q} = \dot{q}(0_+) - \dot{q}(0_-)$ を求める一計算法を提案する。

ここで、添字 $-$, $+$ を付けたものはおのおの、遊脚着地直前、直後の量であり、以下、適宜、用いる。

また、ここでは簡単のために対象を二足に限定する。

2. 歩行機械のリンク機構としての定義

二足歩行機械は空間リンク機構として定義する。左右足リンクをおのおの、リンク $0l, 0r$ とし、胴体リンクに向かって順次、リンク番号を付ける。左右脚はおのおの、 n 個のリンクからなるとする。したがって、胴体リンクは nl かつ nr である。

図1に示すように、Denavit-Hartenberg 記法⁽³⁾を用いて各リンク il, ir ($i=0, \dots, n$) に固定した座標系^{'e}, ^{'e}を定義する。ここでは簡単のために関節はすべて回転形とする。4自由度の二足歩行機械におけるリンク座標系の例を図2に示す。

なお、リンク機構の記号は文献(3)にほぼ従うが、座標系^{'e}で表したベクトルは $A_i^0 v_i$ ではなく v_i で表すことにする。

3. リンク座標系の速度等の漸化式

リンク i の座標系^{'e}の速度 v_i , 角速度 w_i , 加速度 $\dot{v}_i$, 加速度 $\dot{w}_i$ はおのおの、次式のようにリンク $i-1$

* 原稿受付 平成3年2月4日。

^{*1} 正員, 北海道工業大学(〒006 札幌市手稲区手稲前田 419-2)。

^{*2} 正員, 北海道大学工学部(〒060 札幌市北区北13条西8丁目)。

の座標系 ${}^{i-1}e$ の速度ベクトルなどの漸化式にできる⁽³⁾。

$$w_i = A_i^{i-1}(w_{i-1} + z_0 \dot{q}_i) \dots\dots\dots (1)$$

$$v_i = A_i^{i-1}v_{i-1} + w_i \times p_i \dots\dots\dots (2)$$

$$\dot{w}_i = A_i^{i-1}(\dot{w}_{i-1} + w_{i-1} \times z_0 \dot{q}_i + z_0 \ddot{q}_i) \dots\dots\dots (3)$$

$$\dot{v}_i = A_i^{i-1}\dot{v}_{i-1} + \dot{w}_i \times p_i + w_i \times (w_i \times p_i) \dots\dots\dots (4)$$

ここで A_i^{i-1} は ${}^{i-1}e$ で表したベクトルを ie で表したベクトルに変換する 3×3 変換行列である。

4. リンクのニュートン・オイラー方程式

リンク i に関するニュートン方程式とオイラー方程式はおおの、次式のようになる⁽³⁾。

$$f_i - A_i^{i+1}f_{i+1} = m_i\{\dot{v}_i + \dot{w}_i \times s_i + w_i \times (w_i \times s_i)\} \dots\dots\dots (5)$$

$$n_i - A_i^{i+1}n_{i+1} + f_i \times p_i + s_i \times A_i^{i+1}f_{i+1} = J_i\dot{w}_i + w_i \times J_iw_i \dots\dots\dots (6)$$

ここで、 m_i 、 J_i はおおの、リンク i の質量、リンク i の重心まわりの慣性行列であり、 $p_i = p_i + s_i$ である。また、 f_i 、 n_i はおおの、リンク $i-1$ からリンク i に加わる力ベクトル、トルク・ベクトルである (図1)。

図1 リンクの各パラメータ

図2 4自由度二足歩行機械

5. 衝撃時における基本式の導出

式(1)～(6)を足リンク 0 から胴体リンク n に向かって順次、適用すると、 $i=0, 1, \dots, n$ において次式が成り立つことがわかる。証明は付録に示す。

$$A_{i-1}^i f_i = F_1^i \dot{w}_0 + F_2^i \dot{v}_0 + F_3^i f_0 + F_4^i n_0 + FQ_1^i \dot{q}_1 + \dots + FQ_{i-1}^i \dot{q}_{i-1} + CF^i \dots\dots\dots (7)$$

$$A_{i-1}^i n_i = N_1^i \dot{w}_0 + N_2^i \dot{v}_0 + N_3^i f_0 + N_4^i n_0 + NQ_1^i \dot{q}_1 + \dots + NQ_{i-1}^i \dot{q}_{i-1} + CN^i \dots\dots\dots (8)$$

$$\dot{w}_i = W_1^i \dot{w}_0 + W_2^i \dot{v}_0 + W_3^i f_0 + W_4^i n_0 + WQ_1^i \dot{q}_1 + \dots + WQ_{i-1}^i \dot{q}_{i-1} + CW^i \dots\dots\dots (9)$$

$$\dot{v}_i = V_1^i \dot{w}_0 + V_2^i \dot{v}_0 + V_3^i f_0 + V_4^i n_0 + VQ_1^i \dot{q}_1 + \dots + VQ_{i-1}^i \dot{q}_{i-1} + CV^i \dots\dots\dots (10)$$

ここで $(\dot{w}_0, \dot{v}_0, f_0, n_0)$ の係数 $F_k^i, N_k^i, W_k^i, V_k^i$ は 3×3 定数行列、 $\dot{q}_k$ の係数 $FQ_k^i, NQ_k^i, WQ_k^i, VQ_k^i$ ($k=1, \dots, i$) と定数項 CF^i, CN^i, CW^i, CV^i は3次元定数ベクトルである。以下の式における係数も適当な大きさの定数行列または定数ベクトルとする。

遊脚が着地する衝撃時における関節角速度の増分 $\Delta \dot{q}_i$ などの基本式を導出するために次の三つを仮定する。

(a) 遊脚は着地直後、地面から跳ね返らずに支持脚になる。

(b) 遊脚が着地する瞬間に遊脚が地面から受ける力とトルクは時間に関するデルタ関数とする。

(c) 関節トルクは時間に関するデルタ関数とはせず、区分的連続関数とする。

このとき、 $i=1, 2, \dots, n$ において次式が成立する。証明は付録に示す。

$$\Delta \dot{q}_i = DQ_1^i \Delta w_0 + DQ_2^i \Delta v_0 + DQ_3^i \delta_f + DQ_4^i \delta_n \dots\dots\dots (11)$$

$$\Delta w_i = DW_1^i \Delta w_0 + DW_2^i \Delta v_0 + DW_3^i \delta_f + DW_4^i \delta_n \dots\dots\dots (12)$$

$$\Delta v_i = DV_1^i \Delta w_0 + DV_2^i \Delta v_0 + DV_3^i \delta_f + DV_4^i \delta_n \dots\dots\dots (13)$$

ここで $\Delta \dot{q}_i$ は衝撃時における関節角速度 $\dot{q}_i$ の増分であり、次式で与える。

$$\Delta \dot{q}_i = \dot{q}_i(0_+) - \dot{q}_i(0_-) \dots\dots\dots (14)$$

同様に Δw_0 などは衝撃時における w_0 などの増分である。また、 δ_f, δ_n はおおの、衝撃時に足リンクが地面から受ける力 f_0 、トルク n_0 のデルタ関数であり、次式で与える。

$$\delta_f = \int_0^{0_+} f_0 dt \dots\dots\dots (15)$$

$$\delta_n = \int_0^{0_+} n_0 dt \dots\dots\dots (16)$$

式(11)～(13)より $(\Delta \dot{q}_i, \Delta w_i, \Delta v_i)$ はおのこの、足リンクの $(\Delta w_0, \Delta v_0, \delta_f, \delta_n)$ の同次一次式であることがわかる。

6. 胴体リンクにおける一次方程式の導出

前章で導出した $\{(A_{i-1}^i f_i, A_{i-1}^i n_i, \dot{w}_i, \dot{v}_i, \Delta w_i, \Delta v_i, \Delta \dot{q}_i)\}_i$ の基本式を用いて二足歩行機械と地面とで構成される閉ループ条件を書き下すと、 $\{(\Delta w_0^s, \Delta v_0^s, \delta_f^s, \delta_n^s)\}_{s=r, l}$ に関する同次一次方程式を得る。

まず、左右足リンク $0l, 0r$ から胴体リンク nl, nr に向かって順次、式(7)～(13)を計算すると次式を得る(図3)。

$$\begin{aligned} A_{n-1}^n f_n^s &= F_1^{n,s} \dot{w}_0^s + F_2^{n,s} \dot{v}_0^s + F_3^{n,s} f_0^s + F_4^{n,s} n_0^s \\ &+ FQ_1^{n,s} \dot{q}_1^s + \cdots + FQ_{n-1}^{n,s} \dot{q}_{n-1}^s + CF^{n,s} \end{aligned} \quad \cdots (17)$$

$$\begin{aligned} A_{n-1}^n n_n^s &= N_1^{n,s} \dot{w}_0^s + N_2^{n,s} \dot{v}_0^s + N_3^{n,s} f_0^s + N_4^{n,s} n_0^s \\ &+ NQ_1^{n,s} \dot{q}_1^s + \cdots + NQ_{n-1}^{n,s} \dot{q}_{n-1}^s + CN^{n,s} \end{aligned} \quad \cdots (18)$$

$$\begin{aligned} \dot{w}_n^s &= W_1^{n,s} \dot{w}_0^s + W_2^{n,s} \dot{v}_0^s + W_3^{n,s} f_0^s + W_4^{n,s} n_0^s \\ &+ WQ_1^{n,s} \dot{q}_1^s + \cdots + WQ_{n-1}^{n,s} \dot{q}_{n-1}^s + CW^{n,s} \end{aligned} \quad \cdots (19)$$

$$\begin{aligned} \dot{v}_n^s &= V_1^{n,s} \dot{w}_0^s + V_2^{n,s} \dot{v}_0^s + V_3^{n,s} f_0^s + V_4^{n,s} n_0^s \\ &+ VQ_1^{n,s} \dot{q}_1^s + \cdots + VQ_{n-1}^{n,s} \dot{q}_{n-1}^s + CV^{n,s} \end{aligned} \quad \cdots (20)$$

$$\Delta w_n^s = DW_1^s \Delta w_0^s + DW_2^s \Delta v_0^s + DW_3^s \delta_f^s + DW_4^s \delta_n^s \quad \cdots (21)$$

$$\Delta v_n^s = DV_1^s \Delta w_0^s + DV_2^s \Delta v_0^s + DV_3^s \delta_f^s + DV_4^s \delta_n^s \quad \cdots (22)$$

ここで $s=l$ は左脚を表し、 $s=r$ は右脚を表す。

左右脚おのこのから計算した胴体リンクの Δw_n^s ($s=l, r$) は等しいから、式(21)より次の一次方程式を得る。

$$\begin{aligned} DW_1^r \Delta w_0^r + DW_2^r \Delta v_0^r + DW_3^r \delta_f^r + DW_4^r \delta_n^r \\ = DW_1^l \Delta w_0^l + DW_2^l \Delta v_0^l + DW_3^l \delta_f^l + DW_4^l \delta_n^l \end{aligned} \quad \cdots (23)$$

図3 胴体リンクの各ベクトルの導出

同様に、胴体リンクの Δv_n^s ($s=l, r$) は等しいから、式(22)より次の一次方程式を得る。

$$\begin{aligned} DV_1^r \Delta w_0^r + DV_2^r \Delta v_0^r + DV_3^r \delta_f^r + DV_4^r \delta_n^r \\ = DV_1^l \Delta w_0^l + DV_2^l \Delta v_0^l + DV_3^l \delta_f^l + DV_4^l \delta_n^l \end{aligned} \quad \cdots (24)$$

一方、胴体リンクに関するニュートン方程式(5)に式(17)～(20)を代入し、衝撃瞬間 $[0-, 0+]$ で時間積分すると次式を得る。

$$\begin{aligned} \sum_{s=r, l} (C_1^s \Delta w_0^s + C_2^s \Delta v_0^s + C_3^s \delta_f^s \\ + C_4^s \delta_n^s CQ_1^s \Delta \dot{q}_1^s + \cdots + CQ_n^s \Delta \dot{q}_n^s) = 0 \end{aligned} \quad \cdots (25)$$

式(25)に式(11)を代入し $\Delta \dot{q}_i^s$ ($i=1, \dots, n$) を消去すると次の一次方程式を得る。

$$\begin{aligned} NE_1^r \Delta w_0^r + NE_2^r \Delta v_0^r + NE_3^r \delta_f^r + NE_4^r \delta_n^r \\ + NE_1^l \Delta w_0^l + NE_2^l \Delta v_0^l + NE_3^l \delta_f^l + NE_4^l \delta_n^l = 0 \end{aligned} \quad \cdots (26)$$

同様に、胴体リンクに関するオイラー方程式(6)より次の一次方程式を得る。

$$\begin{aligned} EU_1^r \Delta w_0^r + EU_2^r \Delta v_0^r + EU_3^r \delta_f^r + EU_4^r \delta_n^r \\ + EU_1^l \Delta w_0^l + EU_2^l \Delta v_0^l + EU_3^l \delta_f^l + EU_4^l \delta_n^l = 0 \end{aligned} \quad \cdots (27)$$

7. $\{\tau_i^s\}_{s=r, l}$ に関する一次方程式の導出

式(7)～(13)を導出する過程において、関節トルク $\{\tau_i^s\}_{s=r, l}$ の衝撃時間 $[0-, 0+]$ での時間積分が零になる条件を書き下すと $\{(\Delta w_0^s, \Delta v_0^s, \delta_f^s, \delta_n^s)\}_{s=r, l}$ に関する同次一次方程式を導出することができる。

まず式(8)より $i=1$ において次式が成立する。

$$\begin{aligned} A_0^1 n_1^s &= N_1^{1,s} \dot{w}_0^s + N_2^{1,s} \dot{v}_0^s + N_3^{1,s} f_0^s \\ &+ N_4^{1,s} n_0^s + CN^{1,s} \quad (s=r, l) \end{aligned} \quad \cdots (28)$$

関節トルク $\{\tau_i^s\}_{s=r, l}$ に関しては次式が成立する。

$$z_0^T \cdot A_0^1 n_1^s = \tau_1^s \quad (s=r, l) \quad \cdots (29)$$

式(28)を式(29)に代入し、 $[0-, 0+]$ で時間積分すると次式を得る。

$$\begin{aligned} \int_{0-}^{0+} z_0^T \cdot (N_1^{1,s} \dot{w}_0^s + N_2^{1,s} \dot{v}_0^s + N_3^{1,s} f_0^s \\ + N_4^{1,s} n_0^s + CN^{1,s}) dt \\ = \int_{0-}^{0+} \tau_1^s dt = 0 \quad (s=r, l) \end{aligned} \quad \cdots (30)$$

上式の各係数 $N_k^{1,s}, CN^{1,s}$ は時間に関して区分的に連続なので、それらを積分の外に出せる。したがって次の同次一次方程式を得る。

$$\begin{aligned} z_0^T \cdot (N_1^{1,s} \Delta w_0^s + N_2^{1,s} \Delta v_0^s + N_3^{1,s} \delta_f^s + N_4^{1,s} \delta_n^s) \\ = 0 \quad (s=r, l) \end{aligned} \quad \cdots (31)$$

8. 遊脚着地時の脚接地条件の設定

従来の歩行機械の動力学モデルでは、脚の接地条件

をホロノミックな制約条件とし、ペナルティ法⁽⁴⁾やラグランジュ乗数法⁽⁵⁾を用いてそれらの制約条件をモデルに取り込む必要があった。一方、本方法では6, 7章で示したように順動力学モデルが $\{(\Delta w_0^s, \Delta v_0^s, \delta_f^s, \delta_n^s)\}_{s=r,l}$ に関する同次一次方程式になるので、従来モデルより容易に脚接地条件をモデルに取り込むことができる。

脚接地条件を $\{(\Delta w_0^s, \Delta v_0^s, \delta_f^s, \delta_n^s)\}_{s=r,l}$ に関する一次方程式に限定するために、次を仮定する。

(d) 衝撃直前・直後において脚は滑らない。

(e) 足リンクは足先が地面と一点で接する竹馬形(stilt)とする。

仮定(a), (d), (e)より、脚接地条件は次の二ケースのいずれかになる。

(遊脚から支持脚になるケース)

着地衝撃はこのケースにより生じる。着地直後の図4より接地条件は次式になる。

$$v_0 = w_0 \times p_0 \quad (32)$$

(遊脚のままのケース2)

遊脚が地面から受ける力とトルクは存在しないので接

地条件は次式になる。

$$\delta_r = \delta_n = 0 \quad (33)$$

9. 関節角速度の増分 $\{\Delta \dot{q}_i^s\}_{i,s}$ の計算

胴体リンクに関する一次方程式(23), (24), (26), (27), および, $\{\tau_i^s\}_{s=r,l}$ に関する一次方程式(31)を, 左右脚の接地条件, 式(32)または(33)の下で連立して解くと, $\{(\Delta w_0^s, \Delta v_0^s, \delta_f^s, \delta_n^s)\}_{s=r,l}$ のうちの未知部分をすべて求められる。したがって式(11)~(13)より $\{(\Delta \dot{q}_i^s, \Delta w_i^s, \Delta v_i^s)\}_{i,s}$ をすべて求められる。 $\{\Delta \dot{q}_i^s\}_{i,s}$ の計算手順を図5に示す。

10. 計算機実験

提案した関節角速度の増分 $\{\Delta \dot{q}_i^s\}_{i,s}$ の計算法を評価するために、図2の形状と表1のパラメータをもつ歩行機械に対し計算機実験した。使用言語はFortran 77, 使用計算機はHITAC M682Hである。

図5における一次方程式の解 $\{(\dot{w}_0^s, \dot{v}_0^s, \delta_f^s, \delta_n^s)\}$ としては、Householderの列選択付きQR分解⁽⁶⁾を用いた単精度の方法, その倍精度版, 最小ノルムの最小2乗法LSMNS⁽⁷⁾の解のうちで、もとの一次方程式における相対誤差が最小のものを用いた。ここで単精度, 倍精度はおおの, 4バイト, 8バイトである。

歩行機械の姿勢は図6のように左脚を垂直な支持脚とし, 右脚のすねリンク $0r$ を垂直に保ったまま, 右

図4 支持脚の足リンクの各ベクトル

図5 関節角速度の増分 $\Delta \dot{q}$ の計算スキーム

表1 歩行機械の各パラメータ

link no.	m	l	I
0(foot)	0.39	0.5	diag(0.195, 8.125 × 10 ⁻³ , 8.125 × 10 ⁻³)
1(thigh)	0.234	0.3	diag(0.117, 1.755 × 10 ⁻³ , 1.755 × 10 ⁻³)
2(trunk)	0.234	0.3	diag(1.755 × 10 ⁻³ , 1.755 × 10 ⁻³ , 0.117)

remarks • m=mass(kg), l=length(m)

• I=principal moment of inertia, diag(I_{xx}, I_{yy}, I_{zz})(kgm²)

図6 実験における歩行機械の姿勢

図 7 地面からの力積の垂直成分

図 9 支持脚の関節角速度の増分

図 8 着地脚の関節角速度の増分

足先を地面に衝突させるものとする。衝突時の関節角速度は $\dot{q}_1^r = 10 \text{ deg/s}$ ($= -\dot{q}_2^r$) とする。

本計算法では地面からのトルク n_s^0 の時間積分 δn_s^0 も未知ベクトルにできるが、ここでは竹馬形足リンクを仮定しているので $\delta n_s^0 = 0$ ($s=r, l$) とする。したがって図 6 の姿勢の場合、未知ベクトルは $\{(w_s^0, \delta f_s^0)\}_{s=r, l}$ の 12 次元ベクトルになる。

関節角 q_1^r を -100 deg から -5 deg まで 5 度ごとに設定した場合の、 $\{(\delta f_x^s, \Delta \dot{q}_1^r, \Delta \dot{q}_2^r)\}_{i,s}$ のグラフをおの、図 7~9 に示す。ここで x は地面の法線方向である。また、図 7~9 において FC は胴体リンクの質量と主慣性モーメントに掛けるファクタである。これらの図より次のことがわかる。

(1) q_1^r が 0 deg に近づくとき $\delta f_x^s < 0$ となる。衝撃力 $f_x^s \geq 0$ と仮定すると式(15)より $\delta f_x^s \geq 0$ のはずだから、 $\delta f_x^s < 0$ の場合、仮定(a), (d)のいずれかが成立しないことになる。

(2) 胴体リンクの質量と主慣性モーメントに掛けるファクタ FC を大きくすると $\delta f_x^s < 0$ となる q_1^r が徐々に 0 deg に近づく。また δf_x^s のほうが δf_z^s よりも支配的になる。

(3) $\{\Delta \dot{q}_i^s\}_i$ は FC に比較的、依存せず、ほぼ一定

である。

(4) $\{\Delta \dot{q}_i^s\}_i$ は $q_1^r \cong -85 \text{ deg}$ でほぼ零になる。

なお、 $\{(w_s^0, \delta f_s^0)\}_{s=r, l}$ の一次方程式の大きさは 14×12 であり、実験では $q_1^r = 0 \text{ deg}$ 以外のすべての q_1^r でフルランクだった。また、一次方程式の 3 解法の相対誤差は三つとも同じオーダーであった。

11. おわりに

以上から次を結論する。

(1) 遊脚着地衝撃における二足歩行機械の順動力学モデルで重要な関節角速度の増分 $\{\Delta \dot{q}_i^s\}_{s,i}$ の一計算法を、仮定(a)~(e)の下で提案した。

(2) 本方法では、まずニュートン・オイラー方程式を衝撃瞬間 $[0-, 0_+]$ で時間積分することにより、 $\{(\Delta \dot{q}_i^s, \Delta w_i^s, \Delta v_i^s)\}_{s,i}$ を $\{(\Delta w_s^0, \Delta v_s^0, \delta f_s^0, \delta n_s^0)\}_s$ の同次一次方程式で表し、次に閉ループ条件などから導出された 14 本の一次方程式を脚接地条件の下で解くことにより、 $\{\Delta \dot{q}_i^s\}_{s,i}$ などを求める。

(3) 4 自由度の歩行機械に対する計算機実験により、本方法の有効性を確認した。 $q_1^r = 0 \text{ deg}$ 以外では解くべき一次方程式がフルランクであり、一次方程式の 3 解法は同じオーダーの相対誤差で解を得ることができた。

付 録

式(7)~(13)の証明

リンク i に関する帰納法で証明する。 $i=1$ で式(7)~(13)は明らかに成立する。いま、 $i=1, \dots, i$ で式(7)~(13)が成立するとして $i=i+1$ でもそれらが成立することを示す。

まず、リンク i に関するニュートン方程式(5)より次式が成立する。

$$A_i^{i+1} f_{i+1} = -m_i \dot{v}_i + f_i - m_i (w_i \times s_i) \quad \dots\dots\dots (34)$$

上式右辺の $f_i, \dot{v}_i$ におの、式(7), (10)を代入、整

理すると次のように $i=i+1$ での式(7)を得る。

$$\begin{aligned} A_i^{i+1} f_{i+1} = & -m_i (V_1^i \dot{w}_0 + V_2^i \dot{v}_0 + V_3^i f_0 + V_4^i n_0 \\ & + VQ_1^i \dot{q}_1 + \cdots + VQ_i^i \dot{q}_i + CV^i) \\ & + A_i^{i-1} (F_1^i \dot{w}_0 + F_2^i \dot{v}_0 + F_3^i f_0 + F_4^i n_0 \\ & + FQ_1^i \dot{q}_1 + \cdots + FQ_{i-1}^i \dot{q}_{i-1} + CF^i) - m_i (w_i \times s_i) \\ & \cdots \cdots \cdots (35) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} = & F_1^{i+1} \dot{w}_0 + F_2^{i+1} \dot{v}_0 + F_3^{i+1} f_0 + F_4^{i+1} n_0 \\ & + FQ_1^{i+1} \dot{q}_1 + \cdots + FQ_i^{i+1} \dot{q}_i + CF^{i+1} \cdots \cdots (36) \end{aligned}$$

同様にリンク i に関するオイラー方程式(6)より次式が成立する。

$$\begin{aligned} A_i^{i+1} n_{i+1} = & (-J_i + m_i [\times s_i]^2) \dot{w}_i + m_i [\times s_i] \dot{v}_i \\ & + [\times p_i] f_i + n_i - m_i s_i \times (w_i \times s_i) - w_i \times J_i w_i \\ & \cdots \cdots \cdots (37) \end{aligned}$$

ここで $[\times s_i]$ などは外積 $\times s_i$ の 3×3 行列形である。右辺の $f_i, n_i, \dot{w}_i, \dot{v}_i$ におおの、式(7)~(10)を代入、整理すると次のように $i=i+1$ での式(8)を得る。

$$\begin{aligned} A_i^{i+1} n_{i+1} = & N_1^{i+1} \dot{w}_0 + N_2^{i+1} \dot{v}_0 + N_3^{i+1} f_0 + N_4^{i+1} n_0 \\ & + NQ_1^{i+1} \dot{q}_1 + \cdots + NQ_i^{i+1} \dot{q}_i + CN^{i+1} \cdots \cdots (38) \end{aligned}$$

一方、式(3)より次式が成立する。

$$\dot{w}_{i+1} = A_{i+1}^i (\dot{w}_i + z_0 \dot{q}_{i+1} + w_i \times z_0 \dot{q}_{i+1}) \cdots \cdots (39)$$

右辺の $\dot{w}_i$ に式(9)を代入、整理すると次のように $i=i+1$ での式(9)を得る。

$$\begin{aligned} \dot{w}_{i+1} = & A_{i+1}^i (W_1^i \dot{w}_0 + W_2^i \dot{v}_0 + W_3^i f_0 + W_4^i n_0 \\ & + WQ_1^i \dot{q}_1 + \cdots + WQ_i^i \dot{q}_i + CW^i) \\ & + A_{i+1}^i (z_0 \dot{q}_{i+1} + w_i \times z_0 \dot{q}_{i+1}) \cdots \cdots (40) \\ = & W_1^{i+1} \dot{w}_0 + W_2^{i+1} \dot{v}_0 + W_3^{i+1} f_0 + W_4^{i+1} n_0 \\ & + WQ_1^{i+1} \dot{q}_1 + \cdots + WQ_{i+1}^{i+1} \dot{q}_{i+1} + CW^{i+1} \\ & \cdots \cdots \cdots (41) \end{aligned}$$

また、式(4)より次式が成立する。

$$\dot{v}_{i+1} = A_{i+1}^i \dot{v}_i + \dot{w}_{i+1} \times p_{i+1} + w_{i+1} \times (w_{i+1} \times p_{i+1}) \cdots \cdots (42)$$

右辺の $\dot{v}_i, \dot{w}_{i+1}$ に式(10)、(41)を代入、整理すると次のように $i=i+1$ での式(10)を得る。

$$\begin{aligned} \dot{v}_{i+1} = & A_{i+1}^i (V_1^i \dot{w}_0 + V_2^i \dot{v}_0 + V_3^i f_0 + V_4^i n_0 \\ & + VQ_1^i \dot{q}_1 + \cdots + VQ_i^i \dot{q}_i + CV^i) \\ & + [\times p_{i+1}] (W_1^{i+1} \dot{w}_0 + W_2^{i+1} \dot{v}_0 + W_3^{i+1} f_0 + W_4^{i+1} n_0 \\ & + WQ_1^{i+1} \dot{q}_1 + \cdots + WQ_{i+1}^{i+1} \dot{q}_{i+1} + CW^{i+1}) \\ & + w_{i+1} \times (w_{i+1} \times p_{i+1}) \cdots \cdots (43) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} = & V_1^{i+1} \dot{w}_0 + V_2^{i+1} \dot{v}_0 + V_3^{i+1} f_0 + V_4^{i+1} n_0 \\ & + VQ_1^{i+1} \dot{q}_1 + \cdots + VQ_{i+1}^{i+1} \dot{q}_{i+1} + CV^{i+1} \cdots (44) \end{aligned}$$

関節トルク τ_{i+1} は次式で与えられる。

$$\tau_{i+1} = z_0^T \cdot A_{i+1}^{i+1} n_{i+1} \cdots \cdots (45)$$

上式の $A_{i+1}^{i+1} n_{i+1}$ に式(8)を代入し、衝撃時間 $[0-, 0+]$ で積分すると次式を得る。

$$\begin{aligned} z_0^T \cdot (N_1^{i+1} \Delta w_0 + N_2^{i+1} \Delta v_0 + N_3^{i+1} \delta_f + N_4^{i+1} \delta_n \\ + NQ_1^{i+1} \Delta \dot{q}_1 + \cdots + NQ_i^{i+1} \Delta \dot{q}_i) = 0 \cdots \cdots (46) \end{aligned}$$

上式の $\Delta \dot{q}_k$ ($k=1, \cdots, i-1$) に式(11)を代入、整理すると、 $\Delta \dot{q}_i$ の式(11)を得る。

$$\begin{aligned} \Delta \dot{q}_i = & DQ_1^i \Delta w_0 + DQ_2^i \Delta v_0 + DQ_3^i \delta_f + DQ_4^i \delta_n \\ & \cdots \cdots \cdots (47) \end{aligned}$$

一方、式(1)、(2)より w_i, v_i の増分は次式になる。

$$\Delta w_i = A_i^{i-1} (\Delta w_{i-1} + z_0 \Delta \dot{q}_i) \cdots \cdots (48)$$

$$\begin{aligned} \Delta v_i = & A_i^{i-1} \Delta v_{i-1} + (A_i^{i-1} \Delta w_{i-1}) \times p_i \\ & + (A_i^{i-1} z_0) \times p_i \Delta \dot{q}_i \cdots \cdots (49) \end{aligned}$$

右辺の $\Delta \dot{q}_i, \Delta w_{i-1}, \Delta v_{i-1}$ に式(11)~(13)を代入、整理すると次のように $i=i$ での式(12)、(13)を得る。

$$\begin{aligned} \Delta w_i = & DW_1^i \Delta w_0 + DW_2^i \Delta v_0 + DW_3^i \delta_f + DW_4^i \delta_n \\ & \cdots \cdots \cdots (50) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta v_i = & DV_1^i \Delta w_0 + DV_2^i \Delta v_0 + DV_3^i \delta_f + DV_4^i \delta_n \\ & \cdots \cdots \cdots (51) \end{aligned}$$

以上より、式(7)~(13)すべてが $i=i+1$ で成立することが証明できた。

(証明終)

文 献

- (1) Wang, J. J., *Int. J. Robotics and Automation*, 4(1989), 27.
- (2) 佐野・ほか2名, 機論, 54-508, C(1988), 3022.
- (3) Luh, J. Y. S., ほか2名, *ASME J. Dynamic Systems, Measurement, Control*, 102(1980), 69-76.
- (4) Ito, M., ほか1名, *Advanced Robotics*, 1-2(1986), 165.
- (5) Hemami, H., ほか1名, *IEEE Trans. on Automatic Control*, AC-24(1979), 526.
- (6) 村田, 線形代数と線形計算法序説, (1988), 141, サイエンス社.
- (7) 二宮(監修), ライブラリープログラム利用の手引(数値計算編: NUMPAC Vol. 1), 名古屋大学大型計算機センター, (1988), 72.