電磁場の有限要素解析と渦電流の最適制御*

多田 幸生^{*1}, 川上 益史^{*2}Finite Element Analysis of Electromagnetic Fields
and Optimal Control of Eddy Currents

Yukio TADA and Masufumi KAWAKAMI

This paper describes finite element analysis of electromagnetic fields and optimization of eddy current densities. First, we derive the state equations by using finite element method. Eddy current densities are represented by derivatives of the state variable $x(t)$. A linear quadratic performance index is introduced so that eddy current densities will track desired functions. We obtain an optimal control law from the stationary conditions of the performance function. Optimal inputs are expressed by the solutions of two differential equations. Finally, we show numerical examples.

Key Words: Finite Element Method, Galerkin's Method, Electromagnetic Fields, Eddy Current Density, Optimal Control, Linear Quadratic Performance Index

1. 緒 言

近年、磁気軸受、リニアモータなどに代表されるように機械要素の多くが、無接触で制御がしやすく高度の機能化が可能な電気・磁氣的要素に置き換わりつつある⁽¹⁾。現在、有限要素法や境界要素法による電磁場の数値解析が幅広く行われており⁽²⁾、これらの数値解析技術を電気・電子機器の設計に応用しようという試みが数多くなされている⁽³⁾。ところが、電磁場の数値解析が単に正確にできるだけでは、それを設計に反映させるのは、必ずしも容易なことではない。電気・電子機器の設計には電磁場の最適設計あるいは最適制御といった技術の開発が不可欠である。本論文では、有限要素法により電磁場の解析を行い、渦電流密度を最適に誘導するような強制電流密度を、誤差汎関数の停留化により求める方法を提案する。

2. 電磁場の支配方程式

準静的な場合、電磁場は、次の Maxwell の方程式によって表される。

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J}_o + \mathbf{J}_e \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\text{rot } \mathbf{E}_e = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0 \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$\text{div } \mathbf{E}_e = 0 \quad \dots\dots\dots (4)$$

ここで、 $\mathbf{B}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{E}$, $\mathbf{J}$ はそれぞれ、磁束密度、磁界の強さ、電束密度、電界の強さ、電流密度を、 ρ は電荷密度を表している。また、添え字の“e”は渦電流によるものを、添え字の“o”は強制電流によるものを表している。さらに、 $\mathbf{B}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{E}$, $\mathbf{J}$ の間には次の関係がある。

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad \dots\dots\dots (7)$$

ただし、 μ , ϵ , σ はそれぞれ媒質の透磁率、誘電率、導電率である。

式(3)により次に示す磁気ベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$ が導入できる。

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} \quad \dots\dots\dots (8)$$

式(8)を用いると、式(2)は次のようになる。

$$\text{rot } \mathbf{E}_e = -\frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \mathbf{A} \quad \dots\dots\dots (9)$$

任意のスカラー関数 ϕ について、常に

* 平成3年3月18日 関西支部第66期定時総会講演会において講演、原稿受付 平成3年3月27日。

^{*1} 正員、神戸大学工学部 (〒657 神戸市灘区六甲台町1-1)。

^{*2} 学生員、神戸大学大学院。

$$\text{rot grad } \phi = 0 \quad \dots\dots\dots (10)$$

が成り立つから、式(9)より

$$\mathbf{E}_e = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \text{grad } \phi \quad \dots\dots\dots (11)$$

が導かれる。式(8)、式(11)を式(1)に代入して整理すると次式が得られる。

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\mu \mathbf{J}_o + \text{grad div } \mathbf{A} + \mu\sigma \text{grad } \phi \quad \dots\dots\dots (12)$$

式(12)より $\mathbf{A}$, ϕ を求めることができれば、式(8)、式(11)より磁束密度、渦電流密度を求めることができる。ところが、未知変数の数のほうが方程式の数よりも多いため、 $\mathbf{A}$, ϕ を一意に求めることはできない。そこで、適当なゲージ条件を課して $\mathbf{A}$, ϕ を一意に求めることを考える。例えば、次の Lorentz ゲージを課す。

$$\text{div } \mathbf{A} + \mu\sigma \phi = 0 \quad \dots\dots\dots (13)$$

このとき、式(12)は次のようになる。

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\mu \mathbf{J}_o \quad \dots\dots\dots (14)$$

$\mathbf{A}$, ϕ を求めるためには、式(13)、式(14)を連立させて $\mathbf{A}$, ϕ について解けばよい。

特に、2次元場の場合、支配方程式は、

$$\nabla^2 A_z - \mu\sigma \frac{\partial A_z}{\partial t} = -\mu J_z \quad \dots\dots\dots (15)$$

$$\phi = 0 \quad \dots\dots\dots (16)$$

となる。ここで、 A_z , J_z は、それぞれ、 $\mathbf{A}$, $\mathbf{J}_o$ の z (場に垂直な方向) 成分である。また、渦電流密度は、

$$\mathbf{E}_e = -\frac{\partial \mathbf{A}_z}{\partial t} \quad \dots\dots\dots (17)$$

で表される。同様に $\mathbf{E}_e$ も z 方向成分である。以下の議論はこの2次元場について行う。

3. 有限要素解析

本研究では、いくつかの三角形要素にのみ強制電流を流し、それらの要素内では電流値は一樣であると仮定する。

$A_z(x, y, t)$ を次のように変数分離形で仮定する。

$$A_z(x, y, t) = \sum_{i=1}^N N_i(x, y) \psi_i(t) \quad \dots\dots\dots (18)$$

式(15)を重み付き残差法 (Galerkin 法) により離散化すると次のように表される。

$$\mathbf{K}\Psi(t) + \mathbf{C} \frac{d\Psi(t)}{dt} = \mathbf{FJ}(t) \quad \dots\dots\dots (19)$$

ここで、 $\Psi(t)$ は節点における A_z の値 $\psi_i(t)$ を並べたベクトルである。また、 $\mathbf{J}(t)$ は、強制電流を与える要素ごとの電流密度の値を並べたベクトルである。本論文では導体内に誘導される渦電流を扱うため、導体内のポテンシャルのみに関する方程式を導いておく。 Ψ_1

を導体内の節点のポテンシャルを並べたベクトル、 Ψ_2 を絶縁空間内の節点のポテンシャルを並べたベクトルとして、式(19)を次のように分割して書く。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\Psi}_1 \\ \dot{\Psi}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 \end{bmatrix} [\mathbf{J}] \quad \dots\dots\dots (20)$$

式(20)から Ψ_2 を消去し、さらに、

$$x(t) = \Psi_1(t) \quad \dots\dots\dots (21)$$

$$u(t) = \mathbf{J}(t) \quad \dots\dots\dots (22)$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{C}_{11}^{-1} (\mathbf{K}_{12} \mathbf{K}_{22}^{-1} \mathbf{K}_{21} - \mathbf{K}_{11}) \quad \dots\dots\dots (23)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{C}_{11}^{-1} (\mathbf{F}_1 - \mathbf{K}_{12} \mathbf{K}_{22}^{-1} \mathbf{F}_2) \quad \dots\dots\dots (24)$$

のように変数の置き換えをすれば、次に示す状態方程式が得られる。ただし、以下で現われる行列 $\mathbf{A}$ は式(8)で定義したポテンシャルとは異なり、式(23)で定義した行列を表す。また、同様に行列 $\mathbf{B}$ も磁束密度とは異なり、式(24)で定義した行列を表す。

$$\dot{x}(t) = \mathbf{A}x(t) + \mathbf{B}u(t) \quad \dots\dots\dots (25)$$

したがって、強制電流 $u(t)$ を与えて、導体内のポテンシャルである $x(t)$ を求めれば、式(17)より渦電流密度は求められる。

4. 渦電流解析例

要素分割図を図1に示す。これは対称性を考えて対象領域の1/4のみを解析するものである。図1中のJ1~J6の要素に、要素内で一樣次に示す正弦波状の強制電流を与える。

$$J(t) = \sin(2\pi t) \quad \dots\dots\dots (26)$$

図中の斜線要素を導体要素とし、E1~E9の節点における渦電流を発生する電界に負の符号を付けたもの [式(17)の $-E_e$ に対応]、すなわち、 $\dot{x}(t)$ の値を図2に示す。ただし、図の縦軸のタイトル中の数字は図1の導体節点 E1~E9 の番号に対応している。また、 $\mu\sigma$ の値は次のとおりとした。

図1 解析対象と有限要素分割

$\mu\sigma=1.0$ (図1の斜線要素)(27)

$\mu\sigma=0.0$ (図1の斜線要素以外の要素)
.....(28)

なお、図1は、対称性を考慮して領域の右上の4分の1のみを示しており、解析も図1で示す4分の1の領域について行っている。したがって、E1の節点が導体の中心の節点となる。

図2からわかるように、E1、E2、E4、E5の各節点、すなわち、導体の中心部の節点には、ほとんど渦電流は流れていない。それとは対照的に導体の表面上の節点E3、E6、E7、E8、E9には中心部の節点に誘導される渦電流の数倍の電流が流れている。これは、一般によく知られている現象で、渦電流の大きな特徴の一つである。

5. 渦電流の最適制御

渦電流は、鋼材等の熱処理、誘導加工、誘導電動機、電磁調理器など、幅広い応用が成されている。これらの機器の設計には、渦電流の最適制御技術が不可欠であると思われる。にもかかわらず、渦電流を制御しようという研究はほとんど成されていないのが現状である。

一般に、導体内に誘導される渦電流密度の分布には偏りが見られる。すなわち、導体表面付近に誘導される渦電流と、導体中心付近に誘導される渦電流を比べると、導体の表面付近に誘導されるうず電流は、導体の中心付近に誘導される渦電流の数倍から数十倍以上

であることが知られている。本論文では、このような性質を持つ渦電流密度分布を、指定された分布に従わせる制御則を導く。

渦電流密度は、式(7)、式(17)より次式で与えられる。

$$J_e = -\sigma \dot{x}(t) \quad \text{.....(29)}$$

よって、渦電流密度を最適に制御することは、 $\dot{x}(t)$ を最適に制御することに還元できる。そこで、 $\dot{x}(t)$ を目標とする関数 $\dot{x}^0(t)$ に追従させるような入力、すなわち、強制電流密度を求めることを考える。

ここでは、次の評価関数を定義し、この評価関数 J を最小にするような強制電流密度 $u(t)$ を最適なものと考える。

$$J = \frac{1}{2} \int_0^T [(\dot{x}(t) - \dot{x}^0(t))^T Q (\dot{x}(t) - \dot{x}^0(t)) + u^T(t) R u(t)] dt \quad \text{.....(30)}$$

ただし、行列 Q は正定行列、行列 R は正定行列あるいは零行列とする。適当な変数の変換を行って式(30)を最適トラッキング問題や最適レギュレータ問題に変換することはできない。そこで、本研究では変分法により最適な制御則を導く⁽⁴⁾。式(30)の停留条件は次のようになる。

$$u(t) = -R^{-1} B^T [Q(\dot{x}(t) - \dot{x}^0(t)) + \int_t^T e^{-A^T(t-\tau)} A^T Q (\dot{x}(\tau) - \dot{x}^0(\tau)) d\tau] \quad \text{.....(31)}$$

さらに、状態方程式を式(31)に代入して整理すれば、

図2 $\dot{x}(t)$ の挙動

$$u(t) = -(R + B^T Q B)^{-1} B^T \left[Q A x(t) - Q \dot{x}^0(t) + \int_t^T e^{-A^T(t-\tau)} A^T Q (\dot{x}(\tau) - \dot{x}^0(\tau)) d\tau \right] \quad (32)$$

となる。ここで、

$$p(t) = \int_t^T e^{-A^T(t-\tau)} A^T Q (\dot{x}(\tau) - \dot{x}^0(\tau)) d\tau \quad (33)$$

とおくと、

$$\dot{p}(t) = -A^T p(t) - A^T Q (\dot{x}(t) - \dot{x}^0(t)) \quad (34)$$

$$= -A^T (Q - Q B R^{-1} B^T Q) A x(t) + (A^T Q B R^{-1} B^T - A^T) p(t) - (A^T Q B R^{-1} B^T - A^T) Q \dot{x}^0(t) \quad (35)$$

となる。また、このとき状態方程式は、

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A - B R^{-1} B^T Q A) x(t) \\ &\quad - B R^{-1} B^T p(t) + B R^{-1} B^T Q \dot{x}^0(t) \end{aligned} \quad (36)$$

となる。式(35)、式(36)をまとめて書くと

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{p}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - B R^{-1} B^T Q A & -B R^{-1} B^T \\ -A^T (Q - Q B R^{-1} B^T Q) A & A^T Q B R^{-1} B^T - A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ p(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B R^{-1} B^T \\ A^T Q B R^{-1} B^T - A^T \end{bmatrix} Q \dot{x}^0(t) \quad (37)$$

$$\text{b. c. } x(0) = x_0, \quad p(T) = 0 \quad (38)$$

となり、 $p(t)$ を求めるためには、式(37)で表される2点境界値問題を解かなければならない。式(37)の状態遷移行列を次のようにおく。

$$\Phi(t, \tau) = \begin{bmatrix} \phi_{11}(t, \tau) & \phi_{12}(t, \tau) \\ \phi_{21}(t, \tau) & \phi_{22}(t, \tau) \end{bmatrix} \quad (39)$$

このとき、

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ p(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{11}(t, T) & \phi_{12}(t, T) \\ \phi_{21}(t, T) & \phi_{22}(t, T) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(T) \\ p(T) \end{bmatrix} + \int_T^t \begin{bmatrix} \phi_{11}(t, \tau) & \phi_{12}(t, \tau) \\ \phi_{21}(t, \tau) & \phi_{22}(t, \tau) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B R^{-1} B^T \\ A^T - A^T Q B R^{-1} B^T \end{bmatrix} Q \dot{x}^0(\tau) d\tau \quad (40)$$

が得られる。式(40)より $x(T)$, $p(T)$ を消去すれば、次式が得られる。

$$\begin{aligned} p(t) &= \phi_{21}(t, T) \phi_{11}^{-1}(t, T) x(t) - \phi_{21}(t, T) \phi_{11}^{-1}(t, T) \int_T^t [\phi_{11}(t, \tau) \phi_{12}(t, \tau)] \\ &\quad \times \begin{bmatrix} B R^{-1} B^T \\ A^T - A^T Q B R^{-1} B^T \end{bmatrix} Q \dot{x}^0(\tau) d\tau + \int_T^t [\phi_{21}(t, \tau) \phi_{22}(t, \tau)] \begin{bmatrix} B R^{-1} B^T \\ A^T - A^T Q B R^{-1} B^T \end{bmatrix} Q \dot{x}^0(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (41)$$

$$= P(t) x(t) + V(t) \quad (42)$$

ただし、

$$P(t) = \phi_{21}(t, T) \phi_{11}^{-1}(t, T) \quad (43)$$

$$\begin{aligned} V(t) &= -\phi_{21}(t, T) \phi_{11}^{-1}(t, T) \int_T^t [\phi_{11}(t, \tau) \phi_{12}(t, \tau)] \begin{bmatrix} B R^{-1} B^T \\ A^T - A^T Q B R^{-1} B^T \end{bmatrix} Q \dot{x}^0(\tau) d\tau \\ &\quad + \int_T^t [\phi_{21}(t, \tau) \phi_{22}(t, \tau)] \begin{bmatrix} B R^{-1} B^T \\ A^T - A^T Q B R^{-1} B^T \end{bmatrix} Q \dot{x}^0(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (44)$$

とおいた。 $P(t)$, $V(t)$ を求めるためには、状態遷移行列 $\Phi(t, \tau)$ を実際に求め、次に、式(43)、式(44)により $P(t)$, $V(t)$ を求めればよいのであるが、次のように $P(t)$, $V(t)$ の満たすべき微分方程式を導き、それを解くほうが实际的である。ただし、ここでは次の関係を用いる。

$$\dot{\Phi}(t, \tau) = \begin{bmatrix} A - B R^{-1} B^T Q A & -B R^{-1} B^T \\ -A^T Q (A - B R^{-1} B^T Q A) & A^T Q B R^{-1} B^T - A^T \end{bmatrix} \Phi(t, \tau) \quad (45)$$

$$\phi_{11}(t, t) = \phi_{22}(t, t) = I \quad (46)$$

$$\phi_{12}(t, t) = \phi_{21}(t, t) = 0 \quad (47)$$

式(43)、式(44)をそれぞれ微分して、上の関係を使い

$$\dot{V}(t) = (P(t) B R^{-1} B^T - A^T) (V(t) - Q \dot{x}^0(t)) \quad (50)$$

整理すると次の微分方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \dot{P}(t) &= -Q_1 - A_1^T P(t) - P(t) A_1 \\ &\quad + P(t) B R^{-1} B^T P(t) \end{aligned} \quad (48)$$

$$P(T) = 0 \quad (49)$$

ただし、

$$V(T) = 0 \quad (51)$$

$$Q_1 = A_1^T Q A \quad (52)$$

図 3 解析対象と有限要素分割

$$R_1 = R + B^T Q B \dots\dots\dots (53)$$

$$A_1 = [I - B(R + B^T Q B)^{-1} B^T Q] A \dots\dots\dots (54)$$

とおいた。このとき、最適入力是一次式のようなになる。

$$u(t) = -R_1^{-1} B^T [(Q A + P(t)) x(t) + V(t) - Q \dot{x}^0(t)] \dots\dots\dots (55)$$

また、状態方程式は

$$\dot{x}(t) = [A - B R_1^{-1} B^T (Q A + P(t))] x(t) - B R_1^{-1} B^T (V(t) - Q \dot{x}^0(t)) \dots\dots\dots (56)$$

となる。

最適入力を求めるためには、まず、式(48)、(49)および式(50)、(51)を解いて $P(t)$ 、 $V(t)$ を求め、次に、式(56)を $x(t)$ について解き、最後に式(55)により $u(t)$ を求めればよい。

図 4 最適強制電流密度

図 5 最適入力による $\dot{x}(t)$ の挙動

図 6 最適強制電流密度

図 7 最適入力による $\dot{x}(t)$ の挙動

6. 渦電流の最適制御解析例

本論文では、数値解析例として二つの例題を取扱う。まず、解析例 1 で、導体内に均一な正弦波状の渦電流を誘導させる強制電流を求める例を示す。解析例 2 では、渦電流を流す領域と、渦電流を抑制する領域を指定し、指定された渦電流を誘導する強制電流を求める例を示す。

要素分割図を図 3 に示す。また、評価関数中の重み行列 Q は単位行列とし、行列 R は対角成分をすべて 0.01 とし、それ以外の成分は零とした。強制電流候補要素、渦電流評価節点をそれぞれ図 3 に J および E の記号で示す。すなわち、J1~J6 で示した六つの要素に強制電流を流し、E1~E9 の九つの節点での渦電流を制御対象とする。また、 $\mu\sigma$ の値は、

$$\mu\sigma=1.0 \quad (\text{図 3 の斜線要素}) \cdots \cdots (57)$$

$$\mu\sigma=0.0 \quad (\text{図 3 の斜線要素以外の要素}) \cdots \cdots (58)$$

とした。

6.1 解析例 1 導体内の各節点 (E1~E9) すべてについて、目標とする関数を

$$\dot{x}_i(t)=\sin(2\pi t) \quad i=1, 2, \dots, 9 \cdots \cdots (59)$$

で表される正弦波とする。このときの最適入力である各要素での強制電流密度を図 4 に、最適入力を加えたときの各節点での $\dot{x}(t)$ の変化のようすを図 5 に示す。以下の各図の縦軸の中の番号は、それぞれ、図 3 中の要素番号、および節点番号を表している。

本解析例では、導体内のすべての節点に、振幅の等しい正弦波状の渦電流を誘導するような強制電流密度を求めた。導体表面の節点 (E5 以外の節点) について

は、正弦波によく追従している結果が得られた。また、導体の中心の節点 E5 にも、導体の表面付近の他の節点と同程度の振幅の渦電流を誘導できた。ただし、位相は遅れており、今後の課題となるところである。これは重み行列 Q にも依存しており、節点 E5 における位相を合わせるだけならば、行列 Q を適当に選ぶことによって多少の改善は可能である。

6・2 解析例 2 目標とする関数を、導体の左端の節点 (E1~E3) で、式(60)で表される正弦波とし、それ以外の節点 (E4~E9) では零、すなわち、渦電流を流さないような強制電流を求める。

$$\dot{x}_i(t) = \sin(2\pi t) \quad i=1, 2, 3 \quad \cdots \cdots \cdots (60)$$

$$\dot{x}_i(t) = 0 \quad i=4, 5, \dots, 9 \quad \cdots \cdots \cdots (61)$$

このときの最適入力である強制電流密度を図 6 に、最適入力を加えたときの $\dot{x}(t)$ の変化のようすを図 7 に示す。

本例では、導体の左端にのみ渦電流を誘導し、導体の中心および右端には渦電流を誘導しないような強制電流密度を求めた。図 7 より導体の右半分の渦電流が、よく抑制されていることがわかる。これより、本手法は、機器の渦電流損失抑制のための補助電流の設計などにも応用可能であると思われる。

7. 結 言

本論文では、渦電流を最適に誘導するような強制電

流を求める方法を提案した。最適な強制電流は、2本の微分方程式の解と状態方程式の解を用いて表されることを示した。また、解析例を示し、その有効性を確認した。

現在、電磁場を最適化しようとする研究がいくつか発表されているが、それらの多くは静的な場を扱ったものであり、かつ、電極形状を設計変数としたものである⁽⁹⁾。本論文では、それらの研究とは違う視点からの最適化、すなわち、強制電流密度を設計変数として、現代制御理論的な視点からの最適化を行った。

本論文で提案した手法は、誘導加熱による焼き入れの制御や機器の渦電流損失抑制のための補助電流の設計などに応用可能であると思われる。

文 献

- (1) 日本機械学会編、電磁力応用機器のダイナミクス、(1990)、1、コロナ社。
- (2) Albanese, R. and Rubinacci, G., Formulation of the Eddy-Current Problem, *IEE Proceedings Pt. A*, **137**-1 (1990), 16.
- (3) Takahashi, N., Nakata, K. and Uchiyama, N., Optimal Design Method of 3-D Nonlinear Magnetic Circuit by Using Magnetization Integral Equation Method, *IEEE Trans. Mag.*, **25**-5 (1989), 4144.
- (4) 加藤、最適制御入門、(1987)、東大出版会。
- (5) 坪井・美咲、ニュートン法による電極形状および絶縁物形状の最適化、電気学会論文誌 A, **106**-7(1986), 307.