周期軸力が作用する柱の不安定領域*

(第2報, 軸力の非一様分布を考えにいたした場合)

近 間 健 吾^{*1}, 小 寺 忠^{*2}

Regions of Instability of Vibrations of Columns Subjected to Periodic Axial Force

(2nd Report, Influence of Distribution of Stress)

Kengo CHIKAMA and Tadashi KOTERA

In the previous paper, regions of instability of parametric excitation of columns subjected to a periodic axial force were determined assuming that the stress by the axial force distributes uniformly along the column. At a steady longitudinal vibration of the column subjected to the periodic axial force, distribution of the stress is not uniform. The regions of instability of parametric excitation considering the distribution of the stress are determined.

Key Words: Theory of Vibration, Natural Frequency, Continuum Mechanics, Parametric Excitation, Column, Axial Force, Region of Instability, Distribution of Stress

1. 緒 言

周期軸力が作用する柱は、係数励振の例としてよく解析されてきており、著者らも Hsu の方法より精度のよい不安定領域の計算法を示してきた⁽¹⁾。しかし、これまでの解析では、柱の端に周期軸力を与えたとき、瞬時に柱全体に一樣にこの力が働くものと仮定されており、不安定領域に及ぼす軸力の非一様分布の影響についてはまだ考察されていない。本報告では、軸力の分布の非一様性の影響について考える。

2. 運動方程式

一樣断面の柱の端に、軸力 $P \sin \omega t$ を与えたとき、柱の中の圧縮力の分布が、

$$T(x, t) = P \cdot Q(x) \sin \omega t \quad \cdots \cdots (1)$$

になったとすると、横振動の運動方程式は、

$$\rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + P \cdot Q(x) \sin \omega t \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \cdots \cdots (2)$$

となる。ここで、

ρ : 柱の密度

A : 柱の断面積

EI : 柱の曲げ剛性

$u(x, t)$: 座標 x における柱の横変位

与えられた境界条件の時の $P=0$ における柱の横振動の固有振動数を $p_i (i=1, 2, \dots)$, 正規固有関数を $Y_i(x)$ とおけば、

$$\frac{d^4 Y_i}{dx^4} = \left(\frac{p_i}{b}\right)^2 Y_i, \quad b^2 = \frac{EI}{\rho A} \quad \cdots \cdots (3)$$

$$\int_0^l Y_i Y_j dx = \delta_{ij} \quad \cdots \cdots (4)$$

$$\int_0^l Y_i \frac{d^4 Y_j}{dx^4} dx = \left(\frac{p_j}{b}\right)^2 \delta_{ij} \quad \cdots \cdots (5)$$

が成立する。したがって、式(2)の解を、

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i(t) Y_i(x) \quad \cdots \cdots (6)$$

とおけば、次式のようなになる。

$$\ddot{\psi}_i + p_i^2 \psi_i + \frac{b^2 P}{EI} \sin \omega t \times \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j \int_0^l Q(x) Y_i(x) \frac{d^2 Y_j(x)}{dx^2} dx = 0 \quad \cdots (7)$$

ここで、無次元化のために、

$$\tau = p_1 t, \quad \bar{\omega} = \frac{\omega}{p_1}, \quad k_1 = l \sqrt{\frac{p_1}{b}}$$

* 平成2年11月3日 北陸信越支部富山地方講演会において講演, 原稿受付 平成3年6月7日。

^{*1} 学生員, 福井大学大学院 (〒910 福井市文京3-9-1)。

^{*2} 正員, 福井大学工学部。

$$\bar{p}_i = \frac{p_i}{p_1}, \quad \tau = \frac{d}{dr}, \quad \delta = \frac{P}{P^*}$$

$$P^* = CEI \left(\frac{\pi}{l} \right)^2$$

(座屈荷重, C は端条件係数)

$$a_{ij} = \frac{C\pi^2 l^2}{k_i^4} \int_0^l Q(x) Y_i(x) \frac{d^2 Y_j(x)}{dx^2} dx$$

とおくと, 式(7)は,

$$\Psi_i'' + \bar{p}_i^2 \Psi_i + \delta \sin \bar{\omega} \tau \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}(\bar{\omega}) \Psi_j = 0 \quad \dots\dots (8)$$

と書ける。さらに,

$$\mathbf{x} = [\Psi_1, \Psi_2, \dots]^T, \quad \mathbf{\Omega} = \text{diag} [\bar{p}_1^2, \bar{p}_2^2, \dots]$$

$$\mathbf{A}(\bar{\omega}) = (a_{ij})$$

とおくと,

$$\mathbf{x}'' + (\mathbf{\Omega} + \delta \sin \bar{\omega} \tau \mathbf{A}(\bar{\omega})) \mathbf{x} = 0 \quad \dots\dots\dots (9)$$

なる連立の係数励振系が得られる。

3. 特性方程式

式(9)の解は, 一般的に次のようにおける⁽¹⁾。

$$\mathbf{x} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{c}_n \cdot e^{j\frac{n}{2}\bar{\omega}\tau} e^{\lambda\tau}$$

ここで, $\lambda = jz$ と変換すると,

$$\mathbf{x} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{c}_n \cdot e^{j\left\{z + \frac{n}{2}\bar{\omega}\right\}\tau}, \quad j = \sqrt{-1} \quad \dots\dots\dots (10)$$

となることにより,

$$\begin{aligned} & \frac{\delta}{2} \mathbf{A} \mathbf{c}_{n-2} + \left\{ \mathbf{\Omega} - \left(z + \frac{n\bar{\omega}}{2} \right)^2 \mathbf{I} \right\} \mathbf{c}_n \\ & + \frac{\delta}{2} \mathbf{A} \mathbf{c}_{n+2} = 0 \quad n: \text{整数} \end{aligned}$$

を得る。非自明解 $\mathbf{c}_n$ が存在する必要十分条件は次のようになる。偶数の n のときは,

$$f(z) = \begin{vmatrix} \dots\dots\dots & \mathbf{\Omega} - (z - \bar{\omega})^2 \mathbf{I} & \frac{\delta}{2} \mathbf{A} & \dots\dots\dots \\ \frac{\delta}{2} \mathbf{A} & \mathbf{\Omega} - z^2 \mathbf{I} & \frac{\delta}{2} \mathbf{A} & \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots & \frac{\delta}{2} \mathbf{A} & \mathbf{\Omega} - (z + \bar{\omega})^2 \mathbf{I} & \dots\dots\dots \end{vmatrix} = 0 \quad \dots\dots\dots (11)$$

奇数の n のときは,

$$g(z) = \begin{vmatrix} \dots\dots\dots & \mathbf{\Omega} - \left(z - \frac{\bar{\omega}}{2} \right)^2 \mathbf{I} & \frac{\delta}{2} \mathbf{A} & \dots\dots\dots \\ \frac{\delta}{2} \mathbf{A} & \mathbf{\Omega} - \left(z + \frac{\bar{\omega}}{2} \right)^2 \mathbf{I} & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \end{vmatrix} = 0 \quad \dots\dots\dots (12)$$

ここで, 式(11)と式(12)は無次元行列式であり, しか

も今のところ解析的に解くことができないので有限次元の行列式で近似して解かなければならない。ここでは, できる限り簡単な近似解法について示す。まず, $\delta = 0$ の時, 式(11)と式(12)の z と $\bar{\omega}$ との関係を図示すると図1(a)(b)のような解直線群となる。

3.1 第一次係数共振域 図1(a)より, 直線 $z = \bar{p}_k$ と $z = -\bar{p}_i + \bar{\omega}$ の交点付近には, 第一次係数共振域があると予想される ($k \neq i$ なら第2種, $k = i$ なら第1種という)。この交点の近くに限れば式(11)は, 次のように近似できる。

$$\begin{vmatrix} \bar{p}_i^2 - (z - \bar{\omega})^2 & \frac{\delta}{2} a_{ik} \\ \frac{\delta}{2} a_{ki} & \bar{p}_k^2 - z^2 \end{vmatrix} \cong 4 \bar{p}_i \bar{p}_k (\bar{p}_i + z - \bar{\omega})(\bar{p}_k - z) - \left(\frac{\delta}{2} \right)^2 a_{ik} a_{ki} = 0 \quad \dots\dots\dots (13)$$

ここで, $x = \bar{\omega} - (\bar{p}_k + \bar{p}_i)$, $y = z - \bar{p}_k - (1/2)x$ とおけば,

$$y^2 - \left(\frac{x}{2} \right)^2 = - \left(\frac{\delta}{4} \right)^2 \frac{a_{ik} a_{ki}}{\bar{p}_i \bar{p}_k} \quad \dots\dots\dots (14)$$

(a) 偶数

(b) 奇数

図1 解直線群 ($\delta=0$)

のようになる。実数 y が存在しないような x あるいは $\bar{\omega}$ の範囲が不安定領域である。その境界は $y=0$ から求められる。

3・2 第二次係数共振域 今度は図1(a)の直線 $z = \bar{p}_i - \bar{\omega}$ と $z = -\bar{p}_i + \bar{\omega}$ 交点付近に注目する。この交点近くを直線 $z = \pm \bar{p}_i$ が通っているので、式(11)を次の3行3列で近似してみる。

$$\begin{vmatrix} \bar{p}_i^2 - (z - \bar{\omega})^2 & \frac{\delta}{2} \alpha_{i1} & 0 \\ \frac{\delta}{2} \alpha_{i1} & \bar{p}_i^2 - z^2 & \frac{\delta}{2} \alpha_{i1} \\ 0 & \frac{\delta}{2} \alpha_{i1} & \bar{p}_i^2 - (z + \bar{\omega})^2 \end{vmatrix} \cong z^4 - \{1 + (\bar{p}_i - \bar{\omega})^2\} z^2 + (\bar{p}_i - \bar{\omega})^2 - \frac{\bar{p}_i - \bar{\omega}}{\bar{p}_i} \left(\frac{\delta}{2}\right)^2 \alpha_{i1} \alpha_{i1} = 0 \quad \dots\dots\dots (15)$$

これより、 z と $\bar{\omega}$ の関係が求められるが、実数 z が4個存在しない $\bar{\omega}$ の範囲が不安定領域である。 $\bar{\omega} = \bar{p}_i$ 付近のものを第1種第二次係数共振域という。

3・3 第三次係数共振域 次は図1(b)の直線 $z = \bar{p}_i - (3/2)\bar{\omega}$ と $z = -\bar{p}_i + (3/2)\bar{\omega}$ の交点付近に注目する。この付近を直線 $z = \bar{p}_i - (1/2)\bar{\omega}$, $z = -\bar{p}_i + (1/2)\bar{\omega}$ が通るとすると、式(12)は次の4行4列で近似できる。

$$\begin{vmatrix} \bar{p}_i^2 - \left(z - \frac{3}{2}\bar{\omega}\right)^2 & \frac{\delta}{2} \alpha_{ik} & 0 & 0 \\ \frac{\delta}{2} \alpha_{ik} & \bar{p}_k^2 - \left(z - \frac{1}{2}\bar{\omega}\right)^2 & \frac{\delta}{2} \alpha_{kk} & 0 \\ 0 & \frac{\delta}{2} \alpha_{kk} & \bar{p}_k^2 - \left(z + \frac{1}{2}\bar{\omega}\right)^2 & \frac{\delta}{2} \alpha_{ki} \\ 0 & 0 & \frac{\delta}{2} \alpha_{ki} & \bar{p}_i^2 - \left(z + \frac{3}{2}\bar{\omega}\right)^2 \end{vmatrix} \cong (4\bar{p}_i\bar{p}_k)^2 z^4 - \left[(4\bar{p}_i\bar{p}_k)^2 \left\{ \left(\bar{p}_i - \frac{3}{2}\bar{\omega}\right)^2 + \left(\bar{p}_k - \frac{1}{2}\bar{\omega}\right)^2 \right\} + 8\bar{p}_i\bar{p}_k \left(\frac{\delta}{2}\right)^2 \alpha_{ik}\alpha_{ki} - (\bar{p}_i\delta\alpha_{kk})^2 \right] z^2 + \left[4\bar{p}_i\bar{p}_k \left(\bar{p}_i - \frac{3}{2}\bar{\omega}\right) \left(\bar{p}_k - \frac{1}{2}\bar{\omega}\right) - \left(\frac{\delta}{2}\right)^2 \alpha_{ik}\alpha_{ki} \right]^2 - (\bar{p}_i\delta\alpha_{kk})^2 \left(\bar{p}_i - \frac{3}{2}\bar{\omega}\right)^2 = 0 \quad \dots\dots\dots (16)$$

やはり、実数 z が4個存在しない $\bar{\omega}$ の範囲が不安定領域である。 $\bar{\omega} = (2/3)\bar{p}_i$ 付近のものを第1種第三次係数共振域という。

4. 数値計算例

最初に、軸力の分布を表す $Q(\theta)$ をはりの縦振動により求めてみる。軸力が、 $x=l$ 端にのみ作用する場合、

$$Q(\theta) = \frac{\cos(\omega x/a)}{\cos(\omega l/a)} = \frac{\cos(\bar{\omega}\beta\theta/\pi)}{\cos(\bar{\omega}\beta)} \quad \dots\dots\dots (17)$$

のように表される。ただし、

$$\beta = \left(\frac{x}{l}\right)\pi^2; \quad \frac{l}{x}: \text{細長比} \quad x: \text{柱の回転半径} \\ a^2 = \frac{E}{\rho} \quad \dots\dots\dots (18)$$

軸力が、 $x=0, l$ の両端に互いに逆向きに作用する場合、

$$Q(\theta) = \frac{\sin(\bar{\omega}\beta\theta/\pi) + \sin\{\bar{\omega}\beta(\pi - \theta)/\pi\}}{\sin(\bar{\omega}\beta)} \quad \dots\dots\dots (19)$$

のように表される。次にはりの横振動の関係を用いてさまざまな境界条件での、固有振動数と正規固有関数

と α_{ij} を求める。

4・1 両端回転 固有振動数は

$$p_i = \left(\frac{i\pi}{l}\right)^2 b \quad \dots\dots\dots (20)$$

正規固有関数は

$$Y_i(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \cdot \sin i\pi \left(\frac{x}{l}\right) \quad \dots\dots\dots (21)$$

であり、

$$k_i = l \sqrt{\frac{p_i}{b}}, \quad k_i = i\pi \quad \dots\dots\dots (22)$$

$$P^* = EI \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \quad (C=1), \quad \bar{p}_i = i^2 \quad \dots\dots\dots (23)$$

となるので、

$$\alpha_{ij} = -\frac{l^2}{\pi^2} \int_0^l Q(x) \frac{2}{l} \left(\frac{j\pi}{l}\right)^2 \\ \times \sin i\pi \left(\frac{x}{l}\right) \sin j\pi \left(\frac{x}{l}\right) dx \\ = -\frac{2j^2}{\pi} \int_0^\pi Q(\theta) \sin i\theta \sin j\theta d\theta; \quad \theta = (\pi x/l) \quad \dots\dots\dots (24)$$

となる。

両端回転の柱の場合の解直線群は先に示した図1のようになる。このとき、細長比をパラメータにもつ無

次元量 β と無次元固有振動数 $\bar{\omega}$ 平面での不安定領域は、負荷荷重と座屈荷重との比 δ の大小によって、図2の(a)~(d)のように変化する。不安定領域は横線部分である。ここで、(a)(c)は $\delta=0.5$ 、(b)(d)は $\delta=0.1$ である。また(a)(b)は片側軸力支持状態を示し(c)(d)は両側軸力支持状態を示している。

図1と図2を比較してみると、図1の一点鎖線の下側の範囲にある交点に対してそれぞれの不安定領域が現れているのがわかる。

4.2 両端固定 この場合の固有振動数は、次式の解で与えられる。

$$\cosh k_i \cdot \cos k_i = 1 \quad \dots\dots\dots (25)$$

$$k_i = l \sqrt{\frac{p_i}{b}}$$

この関係式を満たす k_i は、小さいものから順に

$$k_1=4.730, \quad k_2=7.8532, \quad k_3=10.9956, \dots$$

となる。また、固有関数は

$$Y_i(x) = -C_n \left\{ \cosh k_i \frac{x}{l} - \cos k_i \frac{x}{l} + r_n \left(\sinh k_i \frac{x}{l} - \sin k_i \frac{x}{l} \right) \right\} \quad \dots\dots\dots (26)$$

ただし、

$$r_n = \frac{\cosh k_i - \cos k_i}{\sinh k_i - \sin k_i}$$

ここで、係数 C_n は任意定数であるが、正規化のための値は次のようになる。

$$C_1 = -\frac{1}{\sqrt{l}}, \quad C_2 = \frac{1}{\sqrt{l}}, \dots$$

また、

$$P^* = 4EI \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \quad (C=4) \quad \dots\dots\dots (27)$$

より

$$\alpha_{ij} = \frac{4\pi^2 k_j^2 C_n^2}{k_i^4} \int_0^l Q(x) \left\{ \cosh k_i \frac{x}{l} - \cos k_i \frac{x}{l} + r_n \left(\sinh k_i \frac{x}{l} - \sin k_i \frac{x}{l} \right) \right\} \times \left\{ \cosh k_j \frac{x}{l} + \cos k_j \frac{x}{l} + r_n \left(\sinh k_j \frac{x}{l} + \sin k_j \frac{x}{l} \right) \right\} dx$$

(a) 片側軸力支持 $\delta=0.5$

(c) 両側軸力支持 $\delta=0.5$

(b) 片側軸力支持 $\delta=0.1$

(d) 両側軸力支持 $\delta=0.1$

図2 両端回転の不安定領域図

$$= \frac{4\pi k_j^2}{k_1^4} \int_0^\pi Q(\theta) \left\{ \cosh k_i \frac{\theta}{\pi} - \cos k_i \frac{\theta}{\pi} + r_n \left(\sinh k_i \frac{\theta}{\pi} - \sin k_i \frac{\theta}{\pi} \right) \right\} \\ \times \left\{ \cosh k_j \frac{\theta}{\pi} + \cos k_j \frac{\theta}{\pi} + r_n \left(\sinh k_j \frac{\theta}{\pi} + \sin k_j \frac{\theta}{\pi} \right) \right\} d\theta; \theta = \frac{\pi x}{l} \dots\dots\dots (28)$$

となる。

両端固定時の解直線群は図3(a)(b)のようになり、不安定領域図は図4(a)~(d)に示される。これも、先ほどと同様に、(a)(b)が片側、(c)(d)が両側軸力支持状態を示し、(a)(c)は $\delta=0.5$ 、(b)(d)は $\delta=0.1$ の時を示している。これも不安定領域は、横線部分である。

4.3 一端固定他端自由

一端固定他端自由支持には、ベック形とオイラー形の2種類があるが、その違いは、周期軸力のかかり方がはりに対して接線方向にかかるか、はりに対してではなく鉛直方向にかかるかとの違いである。これは、数値的には末端条件係数の値が変わるだけである。また、一端固定他端自由支持の場合も両端固定支持の場合と同じく、固有振動数

(a) 偶数

(b) 奇数

図3 解直線群 ($\delta=0$)

(a) 片側軸力支持 $\delta=0.5$

(c) 両側軸力支持 $\delta=0.5$

(b) 片側軸力支持 $\delta=0.1$

(d) 両側軸力支持 $\delta=0.1$

図4 両端固定の不安定領域図

は、次式の解で与えられる。

$$\cosh k_i \cdot \cos k_i = -1 \quad \dots\dots\dots (29)$$

$$k_i = l \sqrt{\frac{p_i}{b}}$$

この関係式を満たす k_i は、小さいものから順に $k_1 = 1.875$, $k_2 = 4.694$, $k_3 = 7.855$, ...となる。また、正規固有関数は、

$$Y_i(x) = -C_n \left\{ \cosh k_i \frac{x}{l} - \cos k_i \frac{x}{l} \right\}$$

$$+ r_n \left(\sinh k_i \frac{x}{l} - \sin k_i \frac{x}{l} \right) \} \quad \dots\dots\dots (30)$$

ただし、

$$r_n = \frac{\cosh k_i + \cos k_i}{\sinh k_i + \sin k_i}, \quad C_1 = -\frac{0.9998}{\sqrt{l}}$$

$$C_2 = \frac{0.9994}{\sqrt{l}}, \dots$$

オイラー形の座屈荷重は、

$$P^* = \frac{1}{4} EI \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \quad \left(C = \frac{1}{4} \right) \quad \dots\dots\dots (31)$$

となるので、

(a) 偶数

(b) 奇数

図5 解直線群 ($\delta=0$)

(a) 片側軸力支持 $\delta=0.5$

(c) 両側軸力支持 $\delta=0.5$

(b) 片側軸力支持 $\delta=0.1$

(d) 両側軸力支持 $\delta=0.1$

図6 オイラー形の不安定領域図

図7 ベック形の不安定領域図

$$\begin{aligned}
 a_{ij} = & \frac{\pi k_j^2}{4k_i^4} \int_0^\pi Q(\theta) \left\{ \cosh k_i \frac{\theta}{\pi} - \cos k_i \frac{\theta}{\pi} \right. \\
 & + r_n \left(\sinh k_i \frac{\theta}{\pi} - \sin k_i \frac{\theta}{\pi} \right) \left. \right\} \times \left\{ \cosh k_j \frac{\theta}{\pi} \right. \\
 & + \cos k_j \frac{\theta}{\pi} + r_n \left(\sinh k_j \frac{\theta}{\pi} + \sin k_j \frac{\theta}{\pi} \right) \left. \right\} d\theta \\
 & ; \theta = \frac{\pi x}{l} \dots\dots\dots (32)
 \end{aligned}$$

のようになり、ベック形の座屈荷重は、

$$P^* = 2.008 EI \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \quad (C=2.008) \dots\dots\dots (33)$$

となるので、

$$\begin{aligned}
 a_{ij} = & 2.008 \frac{\pi k_j^2}{k_i^4} \int_0^\pi Q(\theta) \left\{ \cosh k_i \frac{\theta}{\pi} \right. \\
 & - \cos k_i \frac{\theta}{\pi} + r_n \left(\sinh k_i \frac{\theta}{\pi} - \sin k_i \frac{\theta}{\pi} \right) \left. \right\} \\
 & \times \left\{ \cosh k_j \frac{\theta}{\pi} + \cos k_j \frac{\theta}{\pi} \right. \\
 & + r_n \left(\sinh k_j \frac{\theta}{\pi} + \sin k_j \frac{\theta}{\pi} \right) \left. \right\} d\theta \\
 & ; \theta = \frac{\pi x}{l} \dots\dots\dots (34)
 \end{aligned}$$

となる。

一端固定他端自由支持状態の場合、オイラー形とベック形に分けられるが、解直線図はどちらも同じであ

る。これを図5(a)(b)に示す。しかし、不安定領域図はそれぞれの形で異なり、それぞれを図6(a)~(d)、図7(a)~(d)に示す。これも、横線部分が不安定領域を示す。

5. 考 察

δ の値が大きいくほど不安定領域は広く現れる。これは、片側軸力状態でも両側軸力状態でも同じである。しかし、片側軸力状態と両側軸力状態とで比較すると、不安定領域の形は大きく異なる。次に、境界条件による比較では、一端固定他端自由支持状態のオイラー形が最も不安定領域の発生が少ない。また片側軸力状態と両側軸力状態の不安定領域を比較すると、片側の $\beta=0 \sim 1$ の範囲が両側の $\beta=0 \sim 2$ に対応しているようにみえる。なお、軸力の非一様性を考慮にいない場合は、不安定領域図の $\beta=0$ の位置を表している。

6. 結 言

(1) 不安定領域は、 δ の値が大きくなるとともに大きくなることがわかった。

(2) 片側軸力荷重と両側軸力荷重では不安定領域は大きく異なることがわかった。

(3) 不安定領域は一端固定他端自由支持状態のオイラー形が最も小さく現れることがわかった。

文 献

(4) 非一様性を考慮すると, 不安定領域は δ の大
小と, β の大小を考慮に入れる必要がある。

(1) 小寺, 機論, 51-461, C (1985), 42-49.