弾性底板を有する円筒貯槽の流力弾性非線形振動*
(第2報, 線形固有振動解析)千葉 正 克^{*1}Nonlinear Hydroelastic Vibration of a Cylindrical Tank
with Flexible Bottom
(2nd Report, Linear Vibration Analysis)

Masakatsu CHIBA

Theoretical analyses have been carried out on the nonlinear hydroelastic vibration of a cylindrical tank with an elastic bottom. In this report, a linear axisymmetric free vibration analysis of the bottom plate coupled with the liquid contained is presented. In the analysis, the effect of the static deflection of the bottom plate due to the static liquid pressure was taken into account. Numerical calculations were carried out for nine kinds of bottom plates with different thickness and made of different kinds of materials. The effect of the liquid contained on the bulging-type natural frequency, as well as the influence of the bottom plate motion on the sloshing-type natural frequency, was investigated.

Key Words: Hydroelastic Vibration, Nonlinear Vibration, Cylindrical Tank, Axisymmetric Vibration, Theoretical Analysis

1. 緒 言

ロケット燃料タンク, 石油貯蔵タンク, 原子炉容器などでは, 内部に液体を含んだ弾性円筒容器が広く用いられている。このような構造物の安全性の確保のためには, その大振幅運動に起因する非線形性まで考慮に入れた動的挙動特性を把握しておくことが, 工学的に非常に重要な課題であり, 系統的な研究が必要となる。

本研究は, 壁面が剛体で底面が弾性板の円筒貯槽モデルを対象として, 非線形動的連成挙動特性を実験と理論の両面から系統的に解明しようとするものである。これまで著者はその第1ステップとして, ポリエステル製の試験底板と水を用いて実験を行った⁽¹⁾。そして, 弾性底板の非線形挙動に及ぼす内部液体の影響, 自由液面の非線形挙動に及ぼす弾性底板の影響, さらにスロッシングおよびバルジングタイプの微小振幅固有振動数に及ぼす液位の影響などについて明らかにした。

本報では, 本題の非線形振動解析に進む前の問題として, 弾性底板と内部液体の連成系に対する線形軸対

称固有振動解析を行った。解析では, 線形板理論では考慮することのできない内部液体による弾性底板の静たわみと, それに起因する面内引張力の影響を考慮に入れた。そのために線形振動問題であるにもかかわらず, 静たわみ解析は非線形解析となった。この理由から, 従来いくつか行われている弾性底板を有する貯槽の連成振動問題では, これらの影響は考慮されていない^{(2)~(7)}。

2. 基礎式および境界条件

内部に非圧縮, 非粘性液体を高さ H まで満し, 底面が厚さ h の等方等質の弾性板からなる, 半径 R の剛

図1 弾性底板を有する円筒貯槽

* 原稿受付 平成3年5月15日。

*¹ 正員, 岩手大学工学部 (〒020 盛岡市上田4-3-5)。

体壁面円筒貯槽内の弾性底板と内部液体の微小振幅軸対称連成振動問題を考える。座標系を図1のように定める。底板は初め静液圧により、たわみ $-W_0(r)$ を生じ〔対応する応力関数を $F_0(r)$ とする〕、その状態まわりに振幅 $W(r, t)$ の微小振幅振動〔対応する応力関数を $F(r, t)$ とする〕を行うものとする。

内部液体は渦なし運動を行うものとし、自由液面の変位を $u(r, t)$ とする。この場合、弾性底板と内部液体の運動に関する基礎式および境界条件は、無次元量を用いて次のように定められる⁽⁸⁾。

(1) 底板の静たわみ $w_0(\rho)$ と応力関数 $f_0(\rho)$:

$$f_{0,\rho\rho} + \frac{1}{\rho} f_{0,\rho} - \frac{1}{\rho^2} f_0 = -\frac{1}{2\rho} w_{0,\rho}^2 \dots\dots\dots (1)$$

$$\bar{\nabla}^4 w_0 - \frac{c}{\rho} (f_0 w_{0,\rho})_{,\rho} - \bar{g} \left\{ 1 + \bar{\rho} \left(w_0 + \frac{l_0}{\bar{R}} \right) \right\} = 0 \dots\dots\dots (2)$$

$$w_0 = w_{0,\rho} = 0 \quad \text{at} \quad \rho = 1 \dots\dots\dots (3)$$

$$f_{0,\rho} - \nu f_0 = 0 \quad \text{at} \quad \rho = 1 \dots\dots\dots (4)$$

(2) 底板の微小振幅振動 $w(\rho, \tau)$ と応力関数 $f(\rho, \tau)$:

$$f_{,\rho\rho} + \frac{1}{\rho} f_{,\rho} - \frac{1}{\rho^2} f = \frac{1}{\rho} w_{0,\rho} w_{,\rho} \dots\dots\dots (5)$$

$$\bar{\nabla}^4 w - \frac{c}{\rho} [(f_0 w_{,\rho})_{,\rho} - (w_{0,\rho} f)_{,\rho}] + p_d + w_{,\tau\tau} = 0 \quad \text{at} \quad \xi = 0 \dots\dots\dots (6)$$

$$p_d = -\bar{\rho} \left(\frac{1}{\bar{R}} \phi_{,\tau} - w_0 \phi_{,\xi\tau} + \frac{\bar{R}}{2} w_0^2 \phi_{,\xi\xi\tau} + \bar{g} w \right)_{\xi=0} \dots\dots\dots (7)$$

$$w = w_{,\rho} = 0 \quad \text{at} \quad \rho = 1 \dots\dots\dots (8)$$

$$f_{,\rho} - \nu f = 0 \quad \text{at} \quad \rho = 1 \dots\dots\dots (9)$$

(3) 内部液体の速度ポテンシャル $\phi(\rho, \xi, \tau)$:

$$\bar{\nabla}^2 \phi = 0 \dots\dots\dots (10)$$

$$\phi_{,\tau\tau} + \bar{R} \bar{g} \phi_{,\xi} = 0 \quad \text{at} \quad \xi = l_0 \dots\dots\dots (11)$$

$$\phi_{,\rho} = 0 \quad \text{at} \quad \rho = 1 \dots\dots\dots (12)$$

$$w_{,\tau} - \phi_{,\xi} - \bar{R} (w_{0,\rho} \phi_{,\rho} - w_0 \phi_{,\xi\xi}) + \bar{R}^2 \left(w_{0,\rho} \phi_{,\xi\rho} - \frac{1}{2} w_0^2 \phi_{,\xi\xi\xi} \right) = 0 \quad \text{at} \quad \xi = 0 \dots\dots\dots (13)$$

ただし、次の無次元量を用いている。

$$\begin{aligned} \xi &= z/R, \quad \rho = r/R, \quad (w, w_0) = (W, W_0)/h, \quad \eta = u/h \\ \phi &= \Phi/(\Omega_0 R h), \quad \bar{R} = h/R, \quad \bar{g} = g/(\Omega_0^2 h), \quad \tau = \Omega_0 t \\ \Omega_0 &= (1/R^2) \sqrt{D/(\rho_s h)}, \quad l_0 = H/R \\ (f, f_0) &= R(F, F_0)/E h^3 \dots\dots\dots (14) \end{aligned}$$

$$c = 12(1-\nu^2), \quad \bar{\rho} = \rho_f/\rho_s, \quad \omega = \Omega/\Omega_0$$

$$\bar{\nabla}^2 = \partial^2/\partial\rho^2 + (1/\rho)\partial/\partial\rho + \partial^2/\partial\xi^2$$

$$\bar{\nabla}^2 = \partial^2/\partial\rho^2 + (1/\rho)\partial/\partial\rho$$

上式において、 E, D, ν, ρ_s はそれぞれ板のヤング率、

曲げ剛性、ポアソン比、密度、 ρ_f は液体の密度、 t は時間、 $\bar{R}$ と l_0 は、板厚と液位に関する無次元パラメータである。

底板の境界条件式(3), (4), (8), (9)は、境界において固定で、面内方向の変位が零であるという条件である。また動液圧式(7)と、底面での底板と液体の速度の一致条件式(13)は、本来底板がたわんだ状態における条件〔 $\xi = -w_0(\rho)$ 〕であるが、 $\xi = 0$ での条件にしてある。静たわみを考えない場合、これらの条件式は次のようになる。

$$p_d = -\frac{\bar{\rho}}{\bar{R}} \phi_{,\tau} \dots\dots\dots (7)'$$

$$w_{,\tau} - \phi_{,\xi} = 0 \dots\dots\dots (13)'$$

3. 解 法

問題は、まず静液圧による底板のたわみ $w_0(\rho)$ を定め、その後たわんだ状態まわりの微小振幅連成振動問題を解く。

3.1 静液圧によるたわみ $w_0(\rho)$ 境界条件式

(3)を満足するたわみ $w_0(\rho)$ を次の形に仮定する。

$$w_0(\rho) = \sum_n a_n w_n(\rho) \dots\dots\dots (15)$$

ここに a_n は未定係数、 $w_n(\rho)$ は次式で定義されるたわみ関数である⁽⁹⁾。

$$w_n(\rho) = (1-\rho^2)^2 \rho^{2(n-1)} \dots\dots\dots (16)$$

上式を式(1)に代入し、境界条件式(4)と $\rho = 0$ での正則性を考慮すると、 $f_0(\rho)$ が次のように定まる。

$$f_0(\rho) = \sum_i c_{0i} \rho \left(\rho^{2i} - \frac{2i+1-\nu}{1-\nu} \right) \dots\dots\dots (17)$$

$$\begin{aligned} c_{0i} = & -\frac{1}{2i(i+1)} \sum_n \sum_j a_n a_j [(n-1)(j-1)\delta_{n+j,i+3} \\ & - 2(2nj-n-j)\delta_{n+j,i+2} + 2(3nj-1)\delta_{n+j,i+1} \\ & - 2(2nj+n+j)\delta_{n+j,i} + (n+1)(j+1)\delta_{n+j,i-1}] \dots\dots\dots (18) \end{aligned}$$

ここに $\delta_{i,j}$ はクロネッカーのデルタである。ここで、以後の解析では $w_0(\rho)$ は式(15)の第1項で近似できるものと仮定する〔式(18): $n=j=1$ 〕。

$$c_{01} = -a_1^2, \quad c_{02} = \frac{2}{3} a_1^2, \quad c_{03} = -\frac{1}{6} a_1^2 \dots\dots\dots (19)$$

次に式(2)にガレルキン法を適用すると、 a_1 に関する三次方程式が定まるが、この式の3根のうち、実根が有意な解である。

$$a_1^3 + e_1 a_1 + e_0 = 0 \dots\dots\dots (20)$$

ここに

$$e_1 = (32/3 - \bar{g}\bar{\rho}/10)/e_{00}$$

$$e_0 = -(\bar{g}/6)(1 + \bar{\rho}l_0/\bar{R})/e_{00}$$

$$e_{00} = -c(4/21 - (5-3\nu)/9(1-\nu)) \dots\dots\dots (21)$$

いま, 上式において, $a_1^2=0, \bar{\rho}=0, \bar{Q}=\bar{g}$ とおくと, 一様分布荷重 $\bar{Q}$ を受ける円板のたわみに関する線形解を得ることができる。

$$a_1 = \bar{Q}/64 \quad \dots\dots\dots (22)$$

3・2 微小振幅振動成分 $w(\rho, \tau), \phi(\rho, \xi, \tau)$ 境界条件式(8)を考慮し, $w(\rho, \tau)$ を式(23)の形に, また境界条件式(12)を満足する速度ポテンシャル $\phi(\rho, \xi, \tau)$ を式(24)の形に仮定する。

$$w(\rho, \tau) = \sum_m b_m w_m(\rho) e^{i\omega\tau} \quad \dots\dots\dots (23)$$

$$\begin{aligned} \phi(\rho, \xi, \tau) = i\omega e^{i\omega\tau} & \left[A_0 \xi + B_0 \right. \\ & \left. + \sum_k J_0(\varepsilon_k \rho) \left\{ \frac{\sinh(\varepsilon_k \xi)}{\cosh(\varepsilon_k l_0)} A_k + \frac{\cosh(\varepsilon_k \xi)}{\sinh(\varepsilon_k l_0)} B_k \right\} \right] \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (24)$$

ここに i は虚数単位で, b_m, A_0, B_0, A_k, B_k は未定係数である。 ε_k は次式を満足するパラメータである。

$$(\partial J_0(\varepsilon_k \rho) / \partial \rho)_{\rho=1} = 0 \quad \dots\dots\dots (25)$$

3・2・1 底面での底板と液体の速度一致の条件式(13) 解析を簡単化するため, ここでは式(13)の第5, 6項を省略して考えることにする〔それを式(13)''とする〕。式(13)''に式(23), (24)を代入し, ベッセル関数 $J_0(\varepsilon_k \rho)$ の直交性を利用すると, 係数 A_0 と A_k は次のように, b_m と B_k を用いて表すことができる。

$$A_0 = 2 \sum_m Q_m b_m + 2a_1 \bar{R} \sum_k \alpha_k B_k \quad \dots\dots\dots (26)$$

$$A_k = \beta_k \left(\sum_m R_{mk} b_m + a_1 \bar{R} \sum_q \gamma_{qk} B_q \right) \quad \dots\dots\dots (27)$$

なお, 上式で用いた記号の詳細は紙面の都合上省略する。

3・2・2 自由液面の条件式(11) 式(11)に式(24)を代入し, 式(26)と(27)を用いて整理すると次式を得る。

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & L & M \\ 0 & Q & H \end{pmatrix} - \omega^2 \begin{pmatrix} 1 & R & J \\ 0 & K & S \end{pmatrix} \right] \begin{Bmatrix} B_0 \\ B_k \\ b_m \end{Bmatrix} = \{0\} \quad \dots\dots\dots (28)$$

ここに, L, R は $1 \times k$, M, J は $1 \times m$, Q, K は $k \times k$, H, S は $k \times m$ のマトリックスであり, 実際の表式は省略する。

3・2・3 底板の応力関数 f と運動方程式(6) まず式(5)に式(15)と(16)を代入し, 3・1節と同様な方法で $f(\rho, \tau)$ を求める。次に運動方程式(6)に $f_0(\rho)$ と $f(\rho, \tau)$ を代入し, ガレルキン法を適用する。その際, 式(7)中の動液圧式(7)は式(26)と(27)を用いて B_0, B_k, b_m だけで表しておく。結果を整理すると次式を得る。

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & E \end{pmatrix} - \omega^2 \begin{pmatrix} P & F & G \end{pmatrix} \right] \begin{Bmatrix} B_0 \\ B_k \\ b_m \end{Bmatrix} = \{0\} \quad \dots\dots\dots (29)$$

ここに E, G は $m \times m$, P は $m \times 1$, F は $m \times k$ のマトリックスである。

3・2・4 底板と内部液体の連成振動方程式 式(28)と(29)を合せると, 次のような連成振動方程式を得る。

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & L & M \\ 0 & Q & H \\ 0 & 0 & E \end{pmatrix} - \omega^2 \begin{pmatrix} 1 & R & J \\ 0 & K & S \\ P & F & G \end{pmatrix} \right] \begin{Bmatrix} B_0 \\ B_k \\ b_m \end{Bmatrix} = \{0\} \quad \dots\dots\dots (30)$$

上式は, $1+k+m$ 個の未定係数 B_0, B_k, b_m に関する連立一次方程式であり, 問題は固有値として固有振動数 ω を求める固有値問題に帰着される。

4. 数値計算結果

実験ではポリエステル製の半径 $R=144$ mm, 厚さ $h=0.254$ mm と 0.357 mm の2種類の試験底板を用いた⁽¹⁾。参考までに, 図2に $h=0.357$ mm の場合の, 軸対称バルジングタイプの線形固有振動数の液位による変化を示す。本報に示す数値計算では, 材質の違いを調べるため, 同じ半径を有する, 鋼, アルミ, ポリエス

表1 底板モデル諸元: $R=144$ mm, $h=0.5, 1.0, 2.0$ mm

	Young's modulus E [GPa]	Mass density $\rho \times 10^3$ [kg/m ³]	Poisson's ratio ν
Fe	206.	7.85	0.25
Al	69.6	2.69	0.30
Po	5.47	1.40	0.38

図2 液位による軸対称バルジングタイプの線形固有振動数の変化 (実験結果): $h=0.357$ mm

テルの3種類の材質の底板を考え(おのおの Fe, Al, Po と略記する), 板厚はそれぞれ 0.5, 1.0, 2.0 mm と変化した。数値計算で用いた底板の諸元を表1に示す。なお, 液体は水を仮定した。

4.1 液体による静たわみ まず初めに, 各場合について, 液位による板中心でのたわみを計算した。その結果を図3に示す。同一の厚さの場合を比べると, ヤング率の小さい底板ほどたわみが大きく, $h=0.5$ mm の“Po”では $l_0=1.0$ で板厚の約 8.5 倍もの値となることがわかる。なお, 式(20)から得られる静たわみ曲線は, Way⁽¹⁰⁾ の計算結果と良い一致を示した。

4.2 スロッシングとバルジングタイプの連成固有

図3 液位による板中心でのたわみ

図4 スロッシングタイプとバルジングタイプの連成固有振動数: Fe, $h=0.5$ mm

振動 一例として Fe, $h=0.5$ mm の場合の液位の変化に伴う固有振動数の変化を図4に示す。この場合, 式(23)と式(24)において $m=1\sim4$, $k=1\sim3$ とし, スロッシングとバルジングタイプとも, それぞれ三次モードまでを図示している。図より, 液位率 l_0 の増加に伴い, スロッシングタイプの固有振動数は零から増加し, その後一定値に漸近すること。一方, バルジングタイプのほうは, 一次モードでは減少が続くが, 二次, 三次では初め急激に減少し, その後上昇する傾向があることがわかる。バルジングタイプの固有振動数のこのような変化は, 実験結果と一致する。

4.3 バルジングタイプの固有振動数 まず初めにバルジングタイプの固有振動数に注目する。計算では, 固有振動数に及ぼす, 面内力と, 底面での底板と液体の速度の一致条件式(13)'' での w_0 の影響を調べるため, すべての条件を考慮した場合: タイプI, 面内力は考慮するが, 式(13)'' で w_0 を無視した式(13)'を用いた場合: タイプII, そしてさらに面内力をも無視した場合: タイプIIIの三つの場合について考えた。以下に示す図では, タイプI, II, IIIをそれぞれ実線, 一点鎖線, 破線で表すことにする。図5に各場合の三次モードまでのバルジングタイプの固有振動数の液位による変化を示す。まず図5(a) Fe, $h=0.5$ mm の固有振動数の変化について注目する。

(1) タイプI (実線) については,

① $0 < l_0 < 0.2$ で急激に低下する。これは底板に対する液体の付加質量効果の増加によるものである。

② l_0 の増加とともに, 一次モードについては徐々に低下が続く。これは実験結果と一致する。

③ 一方, 二次, 三次モードは急激な低下の後, 低下率は小さくなり, 極小値をとり, 今度は上昇し始める。これは, 底板のたわみによる板面内引張力の増加によるものであり, これも実験結果と一致する。

(2) タイプII [面内力は考慮するが, 境界条件式(13)'を適用する: 一点鎖線] では,

① 一次モードについては, タイプIの場合と比べほぼ値に変化はない。

② 二次, 三次モードでは, タイプIの値より低下する。

(3) タイプIII [境界条件式(13)'を適用し, 面内力も無視する: 破線] では,

① 各モードの場合とも, タイプI, IIと比べ低下する。

② 二次, 三次モードで見られた上昇傾向は見ら

れず、一次モードと同様、急激な低下の後、徐々に低下が続く。

次に、板厚が $h=1.0\text{ mm}$ と 2 倍になると [図 5(b)],

③ 二次、三次モードにおいてタイプ II と III の値

が近づく。

④ 板厚の増加に伴い、タイプ I の曲線での極小値に対応する l_0 は次第に大きいほうに変化する。

さらに $h=2.0\text{ mm}$ と厚くなると [図 5(c)],

⑤ 三つのタイプの値はほぼ等しい。

(a) Fe, $h=0.5\text{ mm}$

(b) Fe, $h=1.0\text{ mm}$

(c) Fe, $h=2.0\text{ mm}$

(d) Al, $h=0.5\text{ mm}$

(e) Al, $h=1.0\text{ mm}$

(f) Al, $h=2.0\text{ mm}$

(g) Po, $h=0.5\text{ mm}$

(h) Po, $h=1.0\text{ mm}$

(i) Po, $h=2.0\text{ mm}$

図 5 液位によるバルジングタイプの固有振動数の変化

図6 スロッシングタイプの固有振動数

次に、材質の違いについてみると、Feよりもヤング率が小さいAlやPoでは、静液圧によるたわみ量が大きいため、面内引張力の影響が大きく、タイプIでの上昇の割合が大きいことがわかる。

以上、これらの結果から、ヤング率が小さく、薄い底板の場合（静たわみ量が大きい場合）ほど、面内力の影響、ならびに底板での速度の一致条件における静たわみ w_0 の影響を考慮しなければならないことがわかる。

なお、図5(g)のPo, $h=0.5$ mmのタイプIの一次モードでは、 $l_0=0$ と0.02の場合に、固有振動数曲線が不連続となっている。これは、ヤング率が小さく、板厚が薄いため、わずかな液位でたわみが大きくなり、それに伴う面内引張力により、固有振動数が空液の場合($l_0=0$)に比べ、 $l_0=0.02$ の場合に高くなっているのである。したがってここでは、さらに厚さが薄い、実験で用いた板厚 $h=0.254$ と 0.357 mmに対応する計算結果は省略した。

4.4 スロッシングタイプの固有振動数 弾性底板がスロッシングタイプの固有振動数に及ぼす影響について調べた。例として、図6(a)にAl, $h=0.5$ mm, 図6(b)にPo, $h=1.0$ mmの場合の三次モードまでのスロッシングタイプの固有振動数を示す。図において、一点鎖線は底板を剛体とした場合の結果である。これらの図より、底板の弾性を考えると、 l_0 の小さい領域での固有振動数は、剛体底板の場合より高くなる

ことがわかる。

なお、この影響は板厚が厚くなり、バルジングタイプの固有振動数がスロッシングタイプの値よりも離れるほど、小さくなった。

また、ここでは l_0 の小さい値に対しても図示したが、第1報に示した実験結果では、特に l_0 の小さい領域で固有振動数が高くなるということとはなかった。このことは、実際にはこのような領域では、液体の粘性や表面張力の効果の影響が相対的に大きくなるので、それらを考慮した解析が必要となることを示唆しているものと思われる。

5. 結 言

剛体壁面円筒容器内の弾性底板と内部液体との線形軸対称固有振動解析を行った。解析では、従来の研究において無視されていた、底板の静たわみによる面内引張力の影響を考慮に入れた。数値計算は、鋼、アルミニウム、ポリエステル製の3種類の材質に対し、板厚を変化させて行った。本研究から得られた結果をまとめると次のようになる。

(1) バルジングタイプの固有振動数の液位による変化

① 一次モードに関しては、急激な値の低下の後、緩やかに低下が続く。

② 二次、三次モードに関しては、急激な値の低下の後、低下は止まり、ある液位になると上昇を始め、上昇は静たわみ量が大きいほど大きい。

上の2点は、実験結果と定性的に一致している。

③ 静たわみ量が大きい場合ほど、固有振動数に及ぼす面内力、ならびに底板における速度一致の条件式での静たわみの影響が大きいため、解析では無視することはできない。無視すると、固有振動数は考慮した場合と比べて低下し、二次、三次モードで見られていた面内力の増加に伴う固有振動数の上昇は見ることができない。

(2) スロッシングタイプの固有振動数

底板の弾性を考えると、 l_0 の小さい領域での値は、剛体底板の場合より高くなる。

本研究は著者が昭和62年度文部省在外研究員(若手)として、(西)ドイツ連邦防衛大学(ミュンヘン)、航空宇宙工学科で行った研究の一部である。ご指導いただいた、宇宙工学研究室 Bauer, H.F. 教授に深く感謝する。

文 献

- (1) 千葉, 機論, **56**-529, C(1990), 2342.
 - (2) Bhuta, P. G. and Koval, L. R., *ZAMP*, **15** (1964), 466.
 - (3) Bauer, H. F., ほか2名, *AIAA J.*, **9**-12 (1971), 2333.
 - (4) Bauer, H. F., ほか2名, *Aeronautical J.*, **744** (1972), 704.
 - (5) Bauer, H. F., *Int. J. Solids Struc.*, **17** (1981), 639.
 - (6) 藤田, 機論, **48**-428, C(1982), 516.
 - (7) 清水, 機論, **53**-495, C(1987), 2277.
 - (8) Chiba, M., *Forschungsberichte*, LRT-WE-9-FB-17 (1989), Univ. Bundeswehr München.
 - (9) Yamaki, N., ほか2名, *J. Sound Vib.*, **79**-1 (1981), 23.
 - (10) Way, S., *Trans. ASME*, **56** (1934), 627.
-