平均応答スペクトルを用いた
初通過破壊確率の簡易推定法*青 木 繁^{*1}First Excursion Probability Estimation Method Using
Average Response Spectrum

Shigeru AOKI

A simplified estimation method for first excursion probability of mechanical systems subjected to earthquake excitations is proposed. First, by a simulation method, first excursion probability of a single-degree-of-freedom system is estimated using stationary random noise as input. When the tolerance level is normalized by the expected value of the maximum response, which is well known as the average response spectrum, the variation of first excursion probability for various values of damping ratio and natural period is very small. These characteristics can be seen for the system subjected to nonstationary random noise. Second, the above mentioned result is examined by a theoretical method. Finally, the obtained result is applied to a secondary system. In this case, the variation of first excursion probability for various values of damping ratio and natural period is very small when the tolerance level is normalized by the expected value of the maximum response of the secondary system.

Key Words: Vibration, Reliability, Seismic Motion, Random Vibration, Average Response Spectrum, First Excursion Probability

1. 緒 言

大地震時において重要度の高い機械構造物系はその機能を失わないように設計されなければならない。地震時における機械構造物系の安全性を確率論的に評価することの重要性が指摘され、多くの研究がなされてきた。著者らはこれまでに機械構造物系の破壊様式として初通過破壊に注目し、その確率の推定法を開発してきた⁽¹⁾。初通過破壊確率に関する従来の研究は、確率推定のための理論式の導出を目的としたものが多い⁽²⁾⁽³⁾。一般に、破壊確率の推定には多大な計算時間を要することや複雑な計算を必要とすることが多い。そのために、破壊確率を簡便に推定する手法を開発することも、機械構造物系の耐震安全性を評価する上で一つの重要な課題である。一方で、耐震設計に平均応答スペクトルの概念が広く取り入れられている⁽⁴⁾。

本論文では、上述の点を考慮して、平均応答スペクトルを用いて初通過破壊確率を簡略に推定する手法を提案した。まず、簡単な力学モデルを用いたシミュレーションによって初通過破壊確率を推定し、それを平

均応答スペクトルを用いて整理すると、破壊確率を簡便に推定できることを示した。次に、この結果を理論的手法によって検討した。さらに、機械構造物系が建物などの主構造物系に設置された付加構造物系であるとした場合への応用を試みた。

2. 初通過破壊確率の推定法

本論文では簡単のため、機械構造物系を図1に示す一自由度系で模擬した。応答としては、質点と入力端の間の相対変位 $z(=x-y)$ に注目し、その絶対値が最初に破壊レベル B_D を超過した瞬間に機械構造物系が破壊するものとした。入力加速度としては、定常白色雑音およびそれに図2に示す包絡関数を乗じて得られる非定常白色雑音を用いた。それぞれ100波作成し、初通過破壊確率 P_f を推定した。 P_f としては、入力開始されてから T 秒後の値に注目した。 T の値としては、従来の地震動記録を参考にして30sとした。

3. 初通過破壊確率の推定結果

図3に定常白色雑音を入力とした場合の P_f を示す。この図は、破壊レベル B_D を次式のように入力加速度を発生させる際に用いた標準偏差 $\sigma_a^{(5)}$ で除して整理した結果である。

* 平成3年4月1日 第68期通常総会講演会において講演、原稿受付 平成3年7月1日。

*1 正員、東京都立工業高等専門学校 (〒140 東京都品川区東大井 1-10-40)。

$$\mu = B_D / \sigma_g \quad \dots\dots\dots (1)$$

σ_g は入力最大の加速度とも関連していることから、式(1)は B_D を入力最大の加速度で割ったことに相当する。図3(a)は固有周期 T_n を1.0sに固定し、減衰比 h を変化させた場合、図3(b)は h を0.01に固定し、 T_n を変化させた場合の P_f である。図3(a)から、減衰比が大きいほど P_f は小さくなり、図3(b)から、固有周期が長いほど P_f は大きくなっている。両方の図において減衰比および固有周期の値の変化に対する P_f の変動が大きくなっている。この問題点を解決するために、破壊レベルを次式のように応答の最大値の平均値 Z で無次元化して結果を整理した。

$$x = B_D / Z \quad \dots\dots\dots (2)$$

その結果を図4に示す。図4(a)および図4(b)はそれぞれ減衰比および固有周期を変化させた場合の P_f であり、図3と対応している。図3と比較すると、図4では、同じ値の x に対する P_f の変動幅は小さく、ほぼ一つの曲線で近似できることが明らかである。式(2)における Z は平均応答スペクトルに相当する。平均応答スペクトルの概念は広く耐震設計に取り入れられている。したがって、一つの特性をもつ地震動に対して、一つの P_f の曲線を用意することによって、平均応答スペクトルから任意の減衰比および固有周期に対する P_f を求めることができる。このことから、式(2)のように破壊レベルを無次元化して P_f を表す方法は、実用的であるといえる。

次に、入力非定常性を考慮した場合について検討

図1 一自由度系モデル

図2 振幅非定常性を表す包絡関数

(a) $T_n = 1.0s$

(b) $h = 0.01$

図3 初通過破壊確率の推定 (定常入力)

(a) $T_n = 1.0s$

(b) $h = 0.01$

図4 初通過破壊確率の推定 (定常入力)

するために、非定常白色雑音を入力とした場合の P_f を推定した。その結果を図5に示す。図4に示した定常白色雑音を入力とした場合と同様に、同じ値の x に対する P_f の変動幅は小さくなっている。したがって、非定常白色雑音入力を受ける場合にも、式(2)のように破壊レベルを無次元化すると、 h および T_n によらずに簡便に P_f を推定できることが明らかである。

4. 理論的手法による検討

3章で得られた結果の妥当性を確認するために、定常白色雑音を入力とした場合について理論的手法によって検討した。定常入力を受ける場合の時刻 T における P_f は次式で与えられる。

$$P_f(T) = 1 - \exp(-2\nu T) \quad \dots\dots\dots (3)$$

ν は $z(t)$ が B_D を越える時刻が統計的に独立であるとする、

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \omega_n \exp\left(-\frac{B_D^2}{2\sigma_z^2}\right) \quad \dots\dots\dots (4)$$

ここで、 σ_z は応答の標準偏差で、次式で与えられる。

$$\sigma_z = \sqrt{\frac{\omega_n^3 S_0}{2h}} \quad \dots\dots\dots (5)$$

ここで、 S_0 は入力のパワースペクトル密度である。式(2)の分母にあたる量として、 $P_f=0.5$ となるとき B_D の値を採用すると、 P_f は x を用いて次式で与えられる。

$$P_f(T) = 1 - \exp\left\{-\frac{2T}{T_n} \left(-\frac{T_n}{2T} \log 0.5\right)^{x^2}\right\} \quad \dots\dots\dots (6)$$

図6に式(6)を用いて求めた P_f を示す。図6(a)は T_n を1.0sに固定し、 h を変化させた場合、図6(b)は h を0.01に固定し、 T_n を変化させた場合の P_f で図4に対応する。式(6)には h が含まれていないため、 h による P_f の変動はない。一方、 T_n が変化した場合でも、同じ値の x に対する P_f の変動幅は小さくなっている。図4と図6は曲線のこう配が異なっている。これは、式(4)を導く際に導入した、 $z(t)$ が B_D を越える時刻が統計的に独立であるという仮定が厳密には成立しなかったためであると考えられる⁽⁶⁾。しかしながら、理論的手法によって推定された P_f とシミュレーションによって推定された P_f の間には比較的關係がある⁽¹⁾。したがって、式(2)のように破壊レベルを無次元化すると、同じ値の x に対する P_f の変動幅が小さくなることから、理論的にも明らかにされた。

(a) $T_n=1.0s$

(b) $h=0.01$

図5 初通過破壊確率の推定（非定常入力）

(a) $T_n=1.0s$

(b) $h=0.01$

図6 理論的手法による初通過破壊確率の推定

5. 付加構造物系への応用

これまでに得られた結果を、建物などの主構造物系内に設置された機器・配管などの付加構造物系へ応用することを検討した。

5.1 初通過破壊確率の推定法 力学モデルとしては、簡単のため図7に示すような両構造物系をそれぞれ一質点系で模擬した二質点結合系モデルを用いた。応答としては、付加構造物系と主構造物系の間の相対変位 $z_s (=x_s - x_p)$ に注目した。この場合、式(2)は次のようになる。

$$x_s = B_D / Z_s \quad \dots\dots\dots (7)$$

ここで、 Z_s は z_s の絶対値の最大値の平均値を表す。この場合、 Z_s は入力に応答スペクトルが与えられていれば、著者らの提案した手法⁽⁷⁾で簡便に推定できる。

各パラメータの値としては、主構造物系の減衰比 h_p は 0.05 で固定した。また、付加構造物系の質量は主構造物系と比較して十分に小さいものとした。固有周期については両構造物系の固有周期 T_s および T_p が一致する条件で P_f を推定した。

5.2 初通過破壊確率の推定結果 図8に100波の定常白色雑音を入力として得られた結果を示す。図8(a)は固有周期 $T_s = T_p = 1.0$ s に固定し、付加構造物系の減衰比 h_s を変化させた場合、図8(b)は $h_s = 0.01$ に固定し、固有周期 $T_s = T_p$ を変化させた場合の P_f を表す。これらの図から、いずれの場合にも同じ値の x_s に対する P_f の変動幅が小さくなっている。したがって、式(7)のように破壊レベルを無次元化することによって、付加構造物系の場合にも減衰比および固有周期によらずに P_f を推定できることが明らかになった。

図8で得られた結果を、4章で示した手法によって理論的に検討した。式(5)の σ_z のかわりに z_s の標準偏差 σ_{z_s} が必要になる。 σ_{z_s} は次式から求めた。

図7 二質点結合系モデル

(a) $T_s = T_p = 1.0$ s

(b) $h_s = 0.01$

図8 付加構造物系の初通過破壊確率の推定 ($h_p = 0.05$)

(a) $T_s = T_p = 1.0$ s

(b) $h_s = 0.01$

図9 理論的手法による付加構造物系の初通過破壊確率の推定 ($h_p = 0.05$)

$$\sigma_{z_s} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |H_s(\omega)|^2 S_0 d\omega} \dots\dots\dots (8)$$

ここで、 $H_s(\omega)$ は入力加速度に対する z_s の伝達関数を表す。

式(4)の σ_z に式(8)から求めた σ_{z_s} の値を代入して得られた P_f を図9に示す。この図は図8に相当する。図9から、破壊レベルを式(7)のように無次元化すると、減衰比による P_f の変動はほとんどなく、固有周期が変化した場合でも同じ値の x_s に対する P_f の変動は非常に小さい。したがって、図8で示された特徴が理論的にも検証された。

6. 結 言

本論文で得られた結果を要約すると次のようになる。

- (1) 破壊レベルを応答の最大値の平均値（平均応答スペクトル）で無次元化すると、初通過破壊確率は減衰比および固有周期によらずに簡便に推定することができる。
- (2) 理論的手法によって(1)の結果を検証した。
- (3) 付加構造物系に対しても破壊レベルを式(7)

のように無次元化すると、初通過破壊確率は減衰比および固有周期によらずに推定することができる。

最後に、本論文の計算はシントム(株) 野尻哲也氏、(株)菱電サービス 小林宜一氏（両氏とも元東京都立工業高等専門学校学生）に負うところが多い。ここに謝意を表する。

文 献

- (1) 青木・鈴木, 非定常地震動入力を受ける付加構造物系の初通過破壊確率の推定法, 機論, 49-446, C (1983), 1980-1986.
- (2) Shinozuka, M. and Wu, W-F., On the First Passage Problem and Its Application to Earthquake Engineering, *Proc. of Ninth World Conference on Earthquake Engineering*, 8 (1988), 767-772.
- (3) 日本機械学会編, 耐震設計と構造動力学, (1985), 224, 日本工業出版.
- (4) 星谷, 確率論的手法による振動解析, (1974), 203-259, 鹿島出版会.
- (5) 日立製作所, HITAC 数値計算副プログラムライブラリ MSL II 機能編, (1985), 33.
- (6) Crandall, S. H. and Mark, W. D., *Random Vibration in Mechanical Systems*, (1963), 109-110, Academic Press.
- (7) 青木・鈴木, 付加構造物系の地震応答量の簡易推定法（床応答増幅係数による推定法）, 機論, 47-422, C (1981), 1286-1294.