磁気ばね関数同定の計算プログラム*

田村英之^{*1}, 徐志祥^{*2}, 松永淳一^{*3}

A Computer Program for the Identification of a Magnetic Force

Hideyuki TAMURA, Zhixiang XU and Jun'ichi MATSUNAGA

A magnetic force exhibits a strongly nonlinear property and is usually modelled by a simple function proportional to (pole-gap distance)^{-P} where $P > 0$. If the function is to be rigorously calculated mathematically however, a great deal of effort may be required. This paper discusses an algorithm and presents program to identify numerically the magnetic force in the form: $F(x) = A/(B+x)^P + C$, in which constants A, B, C and P are determined by processing a set of discrete data points to satisfy the least square error condition. The listing of the sub-program is given together with an example of the main program which drives the conversational computation. An example of the conversation is recorded and numerical example is demonstrated, in which the case of a remarkably nonlinear spring ($P=7\sim 8$) is found experimentally in a pair of super-permanent magnets whose material is composed of Nd₂Fe₁₄B. The identification error of the formula is less than 3% of that of the conventional formula when $B=C=0$ formally.

Key Words: Dynamics of Machinery, Identification, Mechatronics, Nonlinear Vibration, Magnetic Force, Least Square Problem

1. 緒 言

メカトロ機器などに電磁石や永久磁石が手軽に多用されるようになり、磁気力の“ばね”的性質を、より精密に把握する問題が力学的視点から強い関心を集めている。周知のように、この特性は距離に関する単調減少形の強い非線形性を示すことが、ときに障害ともなり、あるいは魅惑的な研究対象ともなる。

この問題に対し、通常は、磁石の仕様や形状、設定条件などに基づいて、理論計算的に、ばね関数を特定する場合が多い⁽¹⁾⁽²⁾。しかし、その作業はあまり容易でないこともあり、実験結果との整合性やその性質の理解の単純明解さという点で問題なしとはいえない。

非線形振動論の古典的な手法としては、動作点近傍を準線形的に扱うか、せいぜいその近傍で、2次、3次の非線形項を特定することになる⁽¹⁾。しかし、動作範囲が広い場合はこの手法も不満足であり、むしろ局所的には多少の誤差を許しても、大局的な非線形性の特徴を手際よく捉え、しかもなるべく簡単な関数で同定するほうが好ましい場合がある。それが古典的な

じまない非線形関数であっても、振動や運動の解析のほうは計算機利用を中心とする多くの新手法が知られる今日全く問題はないから、準線形理論や古典的非線形振動論に執着する必要はないように思われる。

このような思想に適合する関数として、

$$F(x) = A/x^P \quad \text{ただし } x > 0, P > 0 \quad \cdots \cdots (1)$$

が提案されている⁽¹⁾⁽³⁾。実際問題として、数値計算にせよ実測にせよ、 $[x, f(x)]$ の関係を両対数平面に描いてみると、右下がりの直線で近似できる場合が非常に多い。その際、さらに定数 B, C を追加して、

$$F(x) = A/(B+x)^P + C \quad \text{ただし } x > -B \quad (2)$$

とし、定数 A, B, C, P を微細に調整すると、著しく近似精度が向上することが経験的に知られる。無論その計算はかなり面倒であるが、高精度で簡潔な表示式の利便は十分その労に価するはずである。その上、この関数は磁気力以外にも種々応用が考えられる。

そこで、本稿では(少なくとも)磁気力のばね関数の近似ないし整理式として(物理的な意味付けはひとまず保留し)式(2)の利用を提案するとともに、与えられた有限個の離散的データ点を式(2)で近似表示するために、同式中の4個の定数 A, B, C, P を、誤差の最小自乗条件⁽⁴⁾により同定する一手法を論じ、そのプログラムと実測例を紹介する。

* 原稿受付 平成3年9月5日。

*¹ 正員、九州大学工学部 (〒812 福岡市東区箱崎6-10-1)。

*² 准員、九州大学大学院。

*³ 九州大学大学院。

2. 近似式の定数同定のアルゴリズム

独立変数を x , その関数 $F=F(x)$ は上に凹なる単調減少とし, 与えられた N 個のデータ点の組を

$$(x_i, F_i), (i=1, 2, \dots, N; N>2) \dots\dots\dots (3)$$

と記す。これらを式(2)で近似するときの(絶対)誤差の自乗和は次式となる。

$$\epsilon = \sum_{i=1}^N [F_i - A/(B+x_i)^P - C]^2 \dots\dots\dots (4)$$

定数 A に関する ϵ の停留条件: $\partial\epsilon/\partial A=0$ は,

$$\sum_{i=1}^N [F_i - A/(B+x_i)^P - C]/(B+x_i)^P = 0 \dots\dots\dots (5)$$

定数 B に関する ϵ の停留条件: $\partial\epsilon/\partial B=0$ は,

$$\sum_{i=1}^N [F_i - A/(B+x_i)^P - C]/(B+x_i)^{P+1} = 0 \dots\dots\dots (6)$$

定数 C に関する ϵ の停留条件: $\partial\epsilon/\partial C=0$ は,

$$\sum_{i=1}^N [F_i - A/(B+x_i)^P - C] = 0 \dots\dots\dots (7)$$

定数 P に関する ϵ の停留条件: $\partial\epsilon/\partial P=0$ は,

$$\sum_{i=1}^N [F_i - A/(B+x_i)^P - C] \frac{\ln(B+x_i)}{(B+x_i)^P} = 0 \dots\dots\dots (8)$$

以上の式(5)~(8)が未知数 A, B, C, P に関する 4 元の連立方程式となる。

ここで次のような関数を定義する。

$$g_i \equiv g_i(B) = 1/(B+x_i) \dots\dots\dots (9)$$

さらに

$$\left. \begin{aligned} F_0 &\equiv \left(\sum_{i=1}^N F_i \right) / N \text{ (} F_i \text{ の平均値)} \\ G_0 &\equiv \left(\sum_{i=1}^N g_i^P \right) / N \text{ (} g_i^P \text{ の平均値)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

これらを利用して, 式(7)から,

$$C = (1/N) \sum_{i=1}^N [F_i - A/(B+x_i)^P] = F_0 - AG_0 \dots\dots\dots (11)$$

これを式(5), (6), (8)に代入して C を消去すると,

$$\sum_{i=1}^N [F_i - F_0 - A(g_i^P - G_0)] g_i^P = 0 \dots\dots\dots (12)$$

$$\sum_{i=1}^N [F_i - F_0 - A(g_i^P - G_0)] g_i^{P+1} = 0 \dots\dots\dots (13)$$

$$\sum_{i=1}^N [F_i - F_0 - A(g_i^P - G_0)] g_i^P \ln g_i = 0 \dots\dots\dots (14)$$

式(12), (13)から A を消去すると,

$$A = \frac{\sum_{i=1}^N (F_i - F_0) g_i^P}{\sum_{i=1}^N (g_i^P - G_0) g_i^P} = \frac{\sum_{i=1}^N (F_i - F_0) g_i^{P+1}}{\sum_{i=1}^N (g_i^P - G_0) g_i^{P+1}} \dots\dots\dots (15)$$

これから,

$$\phi(B, P) \equiv \left[\sum_{i=1}^N (F_i - F_0) g_i^P \right] \left[\sum_{i=1}^N (g_i^P - G_0) g_i^{P+1} \right]$$

$$\begin{aligned} & - \left[\sum_{i=1}^N (F_i - F_0) g_i^{P+1} \right] \left[\sum_{i=1}^N (g_i^P - G_0) g_i^P \right] \\ & = \sum_{i=1}^N (F_i - F_0) g_i^{P+1} \left[\sum_{j=1}^N (x_i - x_j) g_j^{P+1} \right] \\ & - G_0 \sum_{i=1}^N F_i g_i^{P+1} \left[\sum_{j=1}^N (x_i - x_j) g_j^{P+1} \right] \dots\dots (16) \end{aligned}$$

により

$$\phi(B, P) = 0 \dots\dots\dots (17)$$

なる試行解問題が定義される。

全く同様の操作を式(12), (14)に施すと次式を得る。

$$\begin{aligned} \phi(B, P) &\equiv \sum_{i=1}^N (F_i - F_0) g_i^P \left[\sum_{j=1}^N g_j^{2P} \ln(g_j/g_i) \right] \\ & - G_0 \sum_{i=1}^N F_i g_i^P \left[\sum_{j=1}^N g_j^P \ln(g_j/g_i) \right] \dots\dots\dots (18) \end{aligned}$$

$$\phi(B, P) = 0 \dots\dots\dots (19)$$

式(17)と(19)を連立させて B, P が(試行的に)解ければ, A, C は自明〔式(15), (11)〕であるから問題は解決である。しかしこれらの関数はあまり性質が良好でない上に, 処理すべきデータの雑音様誤差も考慮するとその作業は現実問題として必ずしも容易ではない。

3. 試行解問題の検討

まず, P に関する若干の特殊事情を考慮する。すなわち, P は, べき指数であるから, 可能ならば整数のほうが何かと都合である。逆にいえば適当な整数をむしろ当てはめたい, たとえば, $P=2$ などを指定した後, 他の定数: A, B, C を最適調整すると, 誤差はどこまで極小化できるか, という問題も興味がある。整数に丸めた P による近似式(2)が, A, B, C, P の 4 定数最適化の意味での最良の近似式とは異なっている。大差がなく容認できる程度の精度ならば, P を整数化できることの利点を買うという考え方も十分成立するであろう。また, P は, つねにたかだか 1 桁強程度の値であろうということも他の定数とは大いに異なる。

そこで, A, B, C, P を解く問題は, 以下のように処理する。まず, 適当に P を仮定すると, 式(17), (19)とも, B の試行解問題となるから, そのいずれか一方を用いて B を求める。その際, B の初期近似値を得るために, データ点の中から適当な 3 点 (x_i, F_i) ($i=1, 2, 3$, 添字は適当にとりなおす)を選び, それを, 式(2)で補間する問題を立てると次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \frac{F_1 - F_2}{F_1 - F_3} &= \frac{1 - [(B+x_1)/(B+x_2)]^P}{1 - [(B+x_1)/(B+x_3)]^P} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (20)$$

ただし $F_1 > F_2 > F_3, x_1 < x_2 < x_3, -x_1 < B < \infty$

左辺は定数 (<1), 右辺は B に関して単調減少であり,

$$(F_1 - F_2)/(x_1 - x_2) > (F_1 - F_3)/(x_1 - x_3)$$

ならば根 B が存在するから適当な試行解法で容易に解かれる。この近似 B を式(17)または(19)に採用して B を解く。その際 g_i [式(9)] を次のように修飾すると計算の安定化のために有効のようである。

$$g_i \equiv (B + x_N)^{1+1/(2+3P)} / (B + x_i) \dots\dots\dots (21)$$

B が得られると、すべての g_i が確定し、それを式(10)に適用して G_0 、さらに式(15)から A 、式(11)から C が得られる。これらパラメータが、式(17)、(19)のうち、 B の試行解に使わなかったほうの関係式を満足すれば、初めに仮定した P は正解である。

ここでは、式(17)または(19)を使わず、直接に、式(4)から ε を求めると、

$$\delta = \sqrt{\varepsilon/N} \dots\dots\dots (22)$$

が(全データに関する)式(2)の近似誤差の rms 値を与える。適当に仮定した P 相応に δ が納得できる値ならば、それで、式(2)は完成である。

最適値を含めて、さらに、より好ましい (δ の小さい) パラメータの組を捜したければ、 P の仮定を少し変更して上記の手順を反復すればよい。 P の最適値近傍で δ の値が停留することは実際に数値的に確認することができる(後述数値例参照)。

処理すべきデータ点が、実験値であるような場合には、それに含まれる誤差の雑音の性質(計算機のメモリの丸め誤差も含めて)のため、パラメータの相互関係が汚染されて連続性が損傷し B 、 P の試行解過程が難渋することがある。その障害対策としても上述の手順は好ましいようである。

同様の理由から、試行解法として、連続関数では愛用されているニュートン・ラフソン法やレギュラ・ファルシ法⁽⁵⁾の適用は危険のようであり、通常は収束が遅くて嫌われる二分法⁽⁵⁾が威力を発揮する。ただし根の精度改善の逐次近似推定の際に、“誤差の(定量的)比較”を行うのは禁物であり、“誤差の符号変化”と逐次近似根の集積度の吟味だけで収束判定するのが(収束速さの問題は別として)好ましい。

なお、取り扱う数値の大きさのバランスの関係から式(2)は次の形で扱うほうが便利である。

$$F = A[(B + x_0)/(B + x)]^P + C \dots\dots\dots (23)$$

ただし x_0 : 適当な基準座標

x_0 は適当に与えられるものとするが、特に理由がなければ x_i の最小値 x_1 をとればよい。式(2)と(23)では定数 A の定義が異なるが、以後は式(23)による。以上はすべて経験的知見であり、プログラム中の技巧として配慮されている(後述、5章)。

4. 数値例と考察 (表1, 図1~4)

実物の超強力の小形永久磁石2個1組を用いて、磁極間の距離と磁気力の関係を測定した数値結果を近似式同定した計算例を述べる。

永久磁石の仕様と概略図は図1に示すとおり、磁性材料としては、ネオジム・鉄・ボロン系材[Nd₂Fe₁₄B, NEOMAX 35H, 住友特殊金属(株)1990年製, 着磁済製品]の素子2個を装着しており全体の形は馬蹄形に準ずる。磁極表面(N, S部)の磁束密度は、約5 kG(実測値)である。

図示のユニット2個を1組として、磁極表面が平行となるよう対向させ(相対関係は吸引または反発)その間隔(機械的ギャップ)を変更しつつ、磁石の台座に作用する力を小形のロードセル(ストレーンゲージ式)で計測した。

表1は測定データの数表である。まず参考までに、

表1 磁気力の測定データ

Pole-gap x[cm]	Magnetic Force	
	Attraction F[N]	Repulsion F[N]
2.3	122.219	108.178
2.6	96.989	87.247
2.9	77.581	70.790
3.2	62.373	57.768
3.5	50.429	47.418
3.8	41.129	39.101
4.1	33.800	32.417
4.4	27.860	27.086
4.7	23.075	22.701
5.0	19.207	19.086
5.3	16.119	16.237
5.6	13.472	13.882
5.9	11.403	11.802
6.2	9.637	10.129
6.5	8.281	8.772
6.8	7.093	7.687
7.1	6.109	6.647
7.4	5.260	5.788
7.7	4.582	5.200
8.0	3.725	4.612

図1 永久磁石の仕様

式(2), (23)の適用に先立って, 式(1)(: 簡便最小自乗近似) により同定を行ったところ次の結果を得た.

$$\left. \begin{aligned} F &= 127.34(2.3/x)^{2.36} \text{ [N]; (吸引)} \\ F &= 113.02(2.3/x)^{2.23} \text{ [N]; (反発)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (24)$$

ただし x [cm]: 機械的ギャップ

式中の“(2.3/x)”は, 後述の表示式(25)との比較のための修飾であり, $x=2.3$ cm が基準変位である. あるいは, 式(23)において, $B=C=0$ と指定した特別の場合が式(24)であると見てもよい. 以後の説明中では, この表示に関係するものを“**Eq.(24)($B, C=0$)”と注記してしばしば引用するが, それとの比較によって, 定数 B, C の有効性を確認することができる.

なお, この B, C 値は, 実験的計測で起こりがちな原点の初期設定誤差を自動検出したものとも解釈される. その意味で表1と式(25)を照合すると, 初期調整の精粗が数値結果に反映しているように見える.

さて以下, 後述(5章)のプログラムを適用して, 上のデータを処理した結果を図示し説明と考察を加える. 表1の吸引, 反発の各場合とも全く同様に処理を行ったが両結果は酷似しており単に連記している.

図2は, 測定されたデータと近似式の照合である. データ点を小丸印で, 近似式による値を曲線で示しており, 次数 P として二, 三の値を模索しているが, 曲線全体の形として見れば, その影響は僅少と見られる. とくに両対数表示による式(24) (破線の直線)の誤差が右下部でやや目立つのは, 誤差を(相対誤差ではなく)絶対誤差で評価したことによる.

図3は, P の値を広範囲に試行的に変更し, 対応する A, B, C と rms 誤差 δ を求めた結果を示したものであり, δ の極小値が $P=7\sim 8$ に存在すること, その近傍で $\delta(\epsilon)$ が P に関して停留していることが視認される. 式(24)についても同様に $P=2\sim 3$ における δ の停留状況を併記しており, これら極小 δ の比〔式(24)に対する(25)の誤差の低減〕は $1/40\sim 1/60$ であり, B, C 項の追加により大幅な精度向上が実現している. また P の値はかなり異なっていることがわかる.

図4は, 図2の結果を近似誤差の形にまとめなおしたものであって, 最適近似の P (の近似値)を含め, 二, 三の P に対応する結果を比較している. 最適 P の場合の誤差は, ほぼ平坦な形状で, 上下均等, バラツキ

図2 磁気力ばね特性の実測値と近似式

は一様であるのに反し、過小と過大 P の場合は、それぞれの(やや大きめの)山部、谷部の傾向が完全に逆転しているのが特徴的である。

結局、同定した最適次数は7~8次であり、表1に示した測定値に対する同定表示式(23)としては、次の結果が得られる〔式(23)、(24)参照〕。

$$\left. \begin{aligned} F &= 122.189 \left(\frac{8.9093}{6.6093+x} \right)^7 + 0.06508 \text{ [N] ; (吸引)} \\ F &= 107.315 \left(\frac{10.8945}{8.5945+x} \right)^8 + 0.88213 \text{ [N] ; (反発)} \end{aligned} \right\}$$

ただし x [cm] : 機械的ギャップ

.....(25)

rms 評価による総合誤差は、吸引、反発のそれぞれでおよそ 0.065 N, 0.035 N (: 図3の δ) である。これらは測定値 F 自身の rms 値の 0.15% 以下であり、ほぼ測定誤差の程度と見られる。

5. プログラム (図5, 表2)

N 個のデータ点 (x_i, F_i) と、仮定した指数 P を入力して、近似式(2)あるいは(23)に必要な定数 A, B, C を試行的に計算するサブルーチンサブプログラム(言語は FORT 77) のリスト全文を図5に、その説明文として、プログラムライブラリの使用手引き書⁽⁶⁾ に準じた使用説明書を表2に示している。

その中に例示した(このサブルーチンを利用する)主プログラムでは、計算機システムと対話形式で計算を進めるようになっている。データ (x_i, F_i) を逐次入力した後、その表示、検証、手直し処置に続いて、仮定した P を入力し、対応する $A, B, C, D (\equiv B+x_1)$ と、その際の近似式の同定誤差の rms 評価値を出力する。 P を変化させながら、この操作を反復すると、最適の(近似誤差の rms 値を最小にする) P を模索することができる。また要求に応じて、データ全体に対する点ごとの誤差の一覧も作表出力する。さらに、プリンタ

図3 rms 誤差 δ の極小値を実現する定数 P の模索とそれに対応する定数 A, B, C

図4 磁気ばね特性近似式の同定誤差

端末を使用して計算を行った際の、システムとの通信記録の例も収録している。

6. 結 語

主として磁気力をばねとする振動系の解析に資するため、実験的に得られた関数を数式で同定する問題を取り上げ、非線形ばねの特徴を、なるべく簡単な近似関数で効果的に表現する一手法を検討した。

近似式としては、式(2)の形〔実用上は式(23)、その例は式(25)〕を仮定し、その定数 A, B, C, P を、近似誤差の最小自乗条件により同定するアルゴリズムを

論じ(2, 3章)、プログラムを提案した(5章、図5、表2)。この近似式は、在来形の式(1)、(24)に比べて、定数 B, C を追加することにより大幅な精度向上が実現できる。

このプログラムは、とくに処理すべきデータの雑音的性質に対処するロバスト性にも注意して設計されており、測定データの組があたえられれば、ただちに式(23)、(25)の形の式が同定できる。これは大形計算機で推敲したプログラムであるが、そのままパソコン上でもうまく走ることを確認している。

プログラムの適用例として、実物の永久磁石の磁気

```

00010 SUBROUTINE FORML1(X,F,N,A,B,C,D,P,W)
00020 DIMENSION X(N),F(N),W(N*3)
00030 XD=1E29
00040 FD=1E29
00050 XM=(X(1)+X(N))/2
00060 FM=(F(1)+F(N))/2
00070 FO=0
00080 XB=X(1)
00090 DO 10 I=1,N
00100 CALL COMPAR(XD,X(I)-XM,I,KX)
00110 CALL COMPAR(FD,F(I)-FM,I,KF)
00120 FO=FO+F(I)
00130 X(I)=X(I)-XB
00140 W(N+I)=F(I)-X(I)
00150 10 CONTINUE
00160 FO=FO/N
00170 M=(KX+KF)/2
00180 CALL APROXB(X(M),X(N),F(1),F(M),F(N),P,B,K)
00190 CALL GOWORK
00200 & (X,F,W(N+1),W(N+2+1),N,A,B,C,D,P,FO,K)
00210 DO 30 I=1,N
00220 X(I)=X(I)+XB
00230 W(I)=W(I)+FO+C
00240 30 CONTINUE
00250 B=B-XB
00260 RETURN
00270 END
00280 -----
00290 SUBROUTINE COMPAR(D,Z,I,M)
00300 IF(ABS(Z).GT.ABS(D)) RETURN
00310 D=Z
00320 M=I
00330 RETURN
00340 END
00350 -----
00360 SUBROUTINE GOWORK(X,F,GP,FX,G,N,A,B,C,D,P,FO,K)
00370 DIMENSION X(N),F(N),GP(N),FX(N),G(N)
00380 DATA EPS /1E-7/
00390 IF(K.NE.O) GO TO 7
00400 B1=B
00410 B2=B
00420 1 CONTINUE
00430 B1=B1/1.1
00440 B2=B2/1.1
00450 CALL FUNTRY(B1,E1,X,F,FX,G,GP,N,FO,A,C,D,P,O,B)
00460 IF(ABS(E1).LT.EPS) GO TO 7
00470 CALL FUNTRY(B2,E2,X,F,FX,G,GP,N,FO,A,C,D,P,O,B)
00480 IF(ABS(E2).LT.EPS) GO TO 7
00490 IF(E1+E2.LT.OEO) GO TO 3
00500 GO TO 1
00510 3 CONTINUE
00520 B=(B1+B2)/2
00530 IF(B.EQ.B1.OR.B.EQ.B2) GO TO 7
00540 CALL FUNTRY(B,E,X,F,FX,G,GP,N,FO,A,C,D,P,O,V)
00550 IF(ABS(E).LT.EPS) GO TO 7
00560 IF(E1+E.GE.OEO) THEN
00570 B1=B
00580 E1=E
00590 ENDIF
00600 IF(E2+E.GE.OEO) THEN
00610 B2=B
00620 E2=E
00630 ENDIF
00640 GO TO 3
00650 7 CONTINUE
00660 CALL FUNTRY(B,E,X,F,FX,G,GP,N,FO,A,C,D,P,1,V)
00670 RETURN
00680 END
00690 -----
00700 SUBROUTINE FUNTRY
00710 & (G,E,X,F,FX,G,GP,N,FO,A,C,D,P,K,B)
00720 DIMENSION X(N),F(N),FX(N),GP(N),E(4)
00730 IF(Q.EQ.B.AND.P2.EQ.P.AND.K.NE.O) GO TO 5
00740 B=Q
00750 P2=P
00760 BEF=(B*X(N))*((1+1/(3*P2+2)))
00770 GO=0
00780 DO 30 I=1,N
00790 G(I)=BEF/(B*X(I))
00800 GP(I)=G(I)**P2
00810 GO=GO+GP(I)
00820 30 CONTINUE
00830 GO=GO/N
00840 DO 31 I=1,6
00850 E(I)=0
00860 31 CONTINUE
00870 DO 40 I=1,N
00880 GP1=GP(I)*G(I)
00890 E(1)=E(1)+GP1
00900 E(2)=E(2)+GP1*GP(I)
00910 E(3)=E(3)+GP1*F(I)
00920 IF(K.NE.O) GO TO 40
00930 GP1X=GP1*X(I)
00940 E(4)=E(4)+GP1*FX(I)
00950 E(5)=E(5)+GP1X
00960 E(6)=E(6)+GP1X*GP(I)
00970 40 CONTINUE
00980 IF(K.NE.O) GO TO 5
00990 ER=E(4)+E(2)+FO+E(1)+E(6)+GO+E(3)+E(5)
01000 EQ=E(3)+E(6)+FO+E(5)+E(2)+GO+E(4)+E(1)
01010 ER/ER-1
01020 RETURN
01030 5 CONTINUE
01040 A=(E(3)-FO+E(1))/(E(2)-GO+E(1))
01050 C=FO-A*GO
01060 D=B
01070 A=A*(BEF/D)**P2
01080 RETURN
01090 END
01100 -----
01110 SUBROUTINE APROXB(X2,X3,F1,F2,F3,P,B,K)
01120 DATA PPM /1E-6/
01130 BPS=PPM
01140 K=0
01150 Z=X3-2000
01160 F123=(F1-F2)/(F1-F3)
01170 CALL FUNFUN(O,X2,X3,F123,P,E,O,B)
01180 IF(ABS(EO).LT.BPS) RETURN
01190 B1=X2*ABS(P)**0.8
01200 CALL FUNFUN(B1,X2,X3,F123,P,E1,B)
01210 IF(ABS(E1).LT.BPS) RETURN
01220 R=2
01230 IF(E0+E1.LE.OEO) R=0.5
01240 1 CONTINUE
01250 B2=B1*R
01260 IF(B2.GT.2) GO TO 3
01270 CALL FUNFUN(B2,X2,X3,F123,P,E2,B)
01280 IF(ABS(E2).LT.BPS) RETURN
01290 IF(E1+E2.LE.OEO) GO TO 2
01300 B1=B2
01310 E1=E2
01320 GO TO 1
01330 2 CONTINUE
01340 B=(B1+E2-B2+E1)/(E2-E1)
01350 CALL FUNFUN(B,X2,X3,F123,P,E,V)
01360 IF(ABS(E).LT.BPS) RETURN
01370 BPS=BPS*1.05
01380 IF(E+E1.GT.OEO) THEN
01390 B1=B
01400 E1=E
01410 ELSE
01420 B2=B
01430 E2=E
01440 ENDIF
01450 GO TO 2
01460 3 CONTINUE
01470 B=B2
01480 K=1
01490 RETURN
01500 END
01510 -----
01520 SUBROUTINE FUNFUN(B,X2,X3,F,P,E,V)
01530 FPB=(1-(B/(B+X2))**P)/(1-(B/(B+X3))**P)
01540 E1=F/FPB
01550 V=B
01560 RETURN
01570 END
01580

```

図5 プログラムリスト (FORT 77)

表 2 プログラムの説明書 (その1)

(MANUAL-1/3)

(MANUAL-2/3)

磁気ばね関数の近似式同定

CALL FORML1(X,F,N,A,B,C,D,P,W)

(1) 機能

あたえられた座標 x_i に対する関数 $F_i=F(x_i)$ を、

$$F_i = A[D/(B+x_i)]^P + C, \quad i=1,2,\dots,N$$

ただし A,B,C,D,P : 定数, $P>0, N>2$ } (1.1)

なる近似式で同定する。ただし与えられた指数 P に対して最小自乗誤差条件を満足するよう、定数 A,B,C,D を特定する。処理すべき関数は上に凹なる単調減少とし処理可能な P の範囲は $0.01 \leq P \leq 100$ である。

(2) パラメタ

 X …入力。座標 x_i 。大きさ N の一次元配列。 F …入力。関数 F_i 。大きさ N の一次元配列。 N …入力。標本数 N 。 A …出力。定数 A 。 B …出力。定数 B 。 C …出力。定数 C 。 D …出力。定数 D 。 P …入力。定数 P 。 W …作業領域。大きさ $3N$ の一次元配列。

(3) 使用上の注意

a. 使用する副プログラム名

① SSLII, FORTRAN 基本関数…なし

② 本プログラム中… GOWORK, FUNTRY, APROXB, FUNFUN, COMPAR

b. 注意

- ① x_i は、 i とともに単調増加、 F_i は単調減少となるよう、配列 X, F に収納し、先頭の $X(1), F(1)$ が x_1, F_1 であること。
- ② データ x_i は、絶対値が (1~10) 程度の大きさとなるよう倍率調整するほうがよい。
- ③ 定数 D は、数値の大きさの平衡化のための修飾であって $D=B+x_1$ 。
- ④ $|B| > 2000|x_N - x_1|$ なる結果は B の探索計算の中断 (精度不足)、一般に $|x_N - x_1| \ll |B| \rightarrow \infty$ は式 (1.1) の精度低下を意味するから要注意。

c. 使用例 (主プログラムの例)

主プログラム中のパラメータ宣言文によりデータ総数 N の上限 M を指定し、システムと対話的にデータ (x_i, F_i) を読み込み、試行的な P を与えて、 A,B,C,D および対応する rms 誤差を計算し出力する。要求により、各データ点ごとに近似誤差を求めた結果を表し出力する。プログラム全文とともにタイプライタ端末によるシステムとの交信記録を例示した。

主プログラムの例

```

02010 *-----MAIN PROGRAM TO DRIVE 'FORML1'-----920130---
02020 *-----
02030   PARAMETER (M=50)
02040   DIMENSION X(M),F(M),VW(M*3)
02050   1 CONTINUE
02060   WRITE(=,*) 'DATA ID.NO. ...?'
02070   & ' (...TO STOP...PUT=<0)'
02080   READ(=,*) IDNO
02090   IF(IDNO.LE.0) STOP
02100   I=0
02110   2 CONTINUE
02120   WRITE(=,*) 'DATA .. X, F ...?'
02130   & ' (...DATA END..IN=999 999)'
02140   READ(=,*) XX,FF
02150   IF(XX.LT.0.OR.FF.LT.0) GO TO 2
02160   IF(XX.EQ.999.OR.FF.EQ.999) GO TO 3
02170   I=I+1
02180   IF(I.GT.M) GO TO 3
02190   X(I)=XX
02200   F(I)=FF
02210   GO TO 2
02220   3 CONTINUE
02230   N=I
02240   51 CONTINUE
02250   WRITE(=,*) '-----'
02260   WRITE(=,*) 'DATA TABLE ID.CODE=IDNO'
02270   WRITE(=,*) '-----'
02280   WRITE(=,*) 'POINT X F(X)'
02290   WRITE(=,*) '-----'
02300   DO 30 I=1,N
02310       WRITE(=,100) I,X(I),F(I)
02320   30 CONTINUE
02330   WRITE(=,*) '-----'
02340   WRITE(=,*) 'ANY CORRECTIONS...? (Y/N)=(1/0)'
02350   READ(=,*) KORR
02360   IF(KORR.EQ.0) GO TO 5
02370   52 CONTINUE
02380   WRITE(=,*) 'POINT X F ...? PLEASE..'
02390   WRITE(=,*) 'TO CEASE CORR. ...PUT 0 0 0'
02400   READ(=,*) I,X(I),F(I)
02410   IF(I.EQ.0.OR.X(I).EQ.0) GO TO 51
02420   GO TO 32
02430   5 CONTINUE
02440   WRITE(=,*) '-----'
02450   WRITE(=,*) 'P ...? ...TO RTN P=<0'
02460   READ(=,*) P
02470   IF(P.LE.0) GO TO 1
02480   CALL FORML1(X,F,N,A,B,C,D,P,VW)
02490   KWRT=0
02500   RMS=0
02510   51 CONTINUE
02520   DO 71 I=1,N
02530       AP=A*(D/(B+X(I)))**P+C
02540       ER=AP-F(I)
02550       RMS=RMS+ER**2
02560       IF(KWRT.NE.0)
02570           & WRITE(=,100) I,F(I),AP,ER
02580   71 CONTINUE
02590   IF(KWRT.NE.0) GO TO 5
02600   RMS=SQRT(RMS/N)
02610   WRITE(=,*) '-----'
02620   WRITE(=,*) 'P =',P
02630   WRITE(=,*) 'A =',A
02640   WRITE(=,*) 'B =',B
02650   WRITE(=,*) 'C =',C
02660   WRITE(=,*) 'D =',D
02670   WRITE(=,*) 'RMS/ERR=',RMS
02680   WRITE(=,*) '-----'
02690   WRITE(=,*) 'CHECK LIST...? (Y/N)=(1/0)'
02700   READ(=,*) KWRT
02710   IF(KWRT.NE.0) THEN
02720       WRITE(=,*)
02730       & '-----'
02740       & 'POINT'
02750       & ' F(NUMR) F(APRX) ERROR'
02760       & '-----'
02770       & '-----'
02780       & '-----'
02790   GO TO 51
02810   ENDIF
02820   GO TO 5
02830   100 FORMAT(1H ,I3,2G15.6,G10.3)
02840   END

```

交信記録の例

正解既知 ($A=100, B=0, C=0, D=1, P=1$) のデータの組: (x_i, F_i)=(1,100), (2,50), (3,33.33333), (4,25), (5,20) を逐次入力し、プログラムの精度検定を行っている。各行の右端のマークの意味は次の通り:

表2 プログラムの説明書(その2)

(MANUAL-3/3)

- =プログラムによる入力案内文(略語).
 ★ =システムからの入力請求メッセージ(先頭の“?”
 の前の数字は主プログラム中の行番号を示す).
 ☆ =入力送信マーク(エンターキーを押す).

```

READY
RUN HMBL200 FORT77
FORTRAN 77 COMPILER ENTERED
END OF COMPILATION
DATA ID.NO. ...? (...TO STOP...PUT=<0>)
02000 ?
777
DATA ... X, F ...? (...DATA END...IN=999 999)
02140 ?
1 100
DATA ... X, F ...? (...DATA END...IN=999 999)
02140 ?
2 50
DATA ... X, F ...? (...DATA END...IN=999 999)
02140 ?
3 33.3333
DATA ... X, F ...? (...DATA END...IN=999 999)
02140 ?
4 25
DATA ... X, F ...? (...DATA END...IN=999 999)
02140 ?
5 20
DATA ... X, F ...? (...DATA END...IN=999 999)
02140 ?
999 999

DATA TABLE ID.CODE=777
POINT X F(X)
1 1.00000 100.000
2 2.00000 50.0000
3 3.00000 33.3333
4 4.00000 25.0000
5 5.00000 20.0000

ANY CORRECTIONS...? (Y/N)=(1/0)
02350 ?
0

P ...? ...TO RTN P=<0>
02460 ?
1

P =1.0000000
A =99.999756
B =-1.44039287E-03
C =3.50952148E-04
D =0.99998052
RMS/ERR=0.04530202E-03

CHECK LIST...? (Y/N)=(1/0)
02700 ?
1

POINT F(NUMR) F(APRX) ERROR
1 100.000 100.000 0.107E-03
2 50.0000 49.9999 -0.122E-03
3 33.3333 33.3333 -0.458E-04
4 25.0000 25.0000 0.153E-04
5 20.0000 20.0001 0.610E-04

P ...? ...TO RTN P=<0>
02460 ?
2

P =2.0000000
A =89.420132
B =1.0124207
C =10.337479
D =2.0124207
RMS/ERR=0.31826018

CHECK LIST...? (Y/N)=(1/0)
02700 ?
1

POINT F(NUMR) F(APRX) ERROR
1 100.000 99.9576 -0.424E-01
2 50.0000 50.3330 0.333
3 33.3333 32.8814 -0.452
4 25.0000 24.7035 -0.217
5 20.0000 20.3777 0.370

P ...? ...TO RTN P=<0>
02460 ?
0
DATA ID.NO. ...? (...TO STOP...PUT=<0>)
02000 ?
0
END OF GO,SEVERITY CODE=00
READY

```

力を実測した結果を処理し、7～8次逆数形の極めて顕著な非線形ばねであるとの知見を得た(4章, 図2～4)。また、式(1)、(24)形の近似に比べて、著しく近似精度が向上すること(同定誤差の低減比は1/40以下, rms値で評価した関数値に対する同定誤差の比として定義したSN比は56dB以上)が例示された。追加した定数B, Cは、それぞれ、変数、関数にオフセットを付けるだけであるから、以後、この式を運動方程式に組み込む際にも全く支障はない。

本手法は、磁気力と限らず、変位^{-P}(ただしP>0)形関数であれば、電気力や万有引力など(いわゆる空間的な中心力形関数族)他にも応用が可能であるのは当然として、さらに、アルゴリズムの拡張と改良により、単調増加形関数や軸対称関数、点対称関数なども処理可能となる見通しなので、プログラムの改良ともども、その詳論のために別報を予定しておきたい。

最後に、本研究は、ISEM-Sendai(1991年1月28-30日、於 仙台市、委員長:東北大学 谷 順二教授)および電磁力関連のダイナミクスシンポジウム(1991年6月12-14日、於 桐生市、委員長:群馬大学 長屋幸助教授)に出席した著者の一人が、多数の同業研究者各位との交流を通じて想を練ったものであることを特記し、委員長はじめ関係各位、畏友諸兄のご厚情に対する謝辞としたい。

また、本研究の実験に使用した永久磁石の入手にあたって、貴重な情報提供と、数々のご配慮を賜った飯塚義和氏〔九大機械力学研究室の修士OB、現在は神戸製鋼(株)社員〕に厚くお礼申し上げる。

文 献

- (1) 小島, 精密機械, 44-5, (1978), 609.
- (2) 長屋・荒井, 機論, 56-525, C(1990), 1230.
- (3) 倉掛・ほか2名, 機論, 46-411, C(1980), 1376.
- (4) 機械工学便覧, (1975), 2-44, 日本機械学会.
- (5) 高田, 機械計算法, (1981), 31, 養賢堂.
- (6) FACOM FORTRAN SSL II 使用手引書(99 SP-0050-5), (1980), 富士通(株).