回転円板振動に与える腰入れ効果の基礎的研究*

岩 田 弘^{*1}, 吉 田 靖 夫^{*2}

A Basic Study of Tensioning Effect on Rotating Disk Vibration

Hiromu IWATA and Yasuo YOSHIDA

Distributed tensioning in a wide range usually performs on a tipped saw. We studied this distributed tensioning effect analytically and experimentally using normal and tensioning disks. The following conclusions were reached. (1) Residual stress due to tensioning was measured. Residual stress distribution could be calculated by Gaussian-type isotropic additional stress. (2) Natural frequency change by tensioning treatment was calculated by the energy method and was in good agreement with measured frequencies. (3) A backward traveling wave of the second mode determined the critical rotating speed, and the rotating speed domain above this critical point was unstable. This phenomenon was confirmed by transfer function measurement. (4) The tensioning effect increased natural frequencies and expanded the stable domain.

Key Words: Vibration of Rotating Disk, Transfer Function, Stability, Natural Frequency, Tensioning, Tipped Saw, Critical Speed

1. 目 的

金属や木材等の切断に使用するチップソーでは一般に腰入れ処理が施される。特にその切断条件が高速回転になるほど腰入れ処理は動的安定性に関して重要であるといわれている。

腰入れに関しては、これまでいくつかの研究報告⁽¹⁾⁽²⁾がある。しかしながら、これらの報告は一定の半径部分にのみローラで強く塑性変形を生じさせるローラ腰入れについての研究であり、一般的には、チップソーの親板全体に幅広く施す腰入れ(以下、単に腰入れ)処理が実施されている。このような分布させた腰入れ処理についての研究報告は、我々の知る限りでは見当たらない。このような背景もあってか、腰入れ工程はいまだに自動化にはほど遠く、経験に頼っているのが実態である。

本論文では、まず基礎的な検討として、腰入れ処理の有無のみ異なる2枚の回転円板について、振動解析と伝達関数計測を行い、動的不安定となる臨界回転数について検討した。腰入れ処理については、腰入れ円

板の残留応力分布の計測と解析を行い、固有振動数への影響をエネルギー法により求めた。

2. 解 析

外半径 a 、内半径 b 、板厚 h の円板について解析を行う。まず静止状態での円板の固有振動数を求める。運動方程式は、半径 r 、円周角 θ とした円筒座標表現でたわみを $w(r, \theta, t)$ とすると、

$$\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + D \nabla^4 w = 0 \quad \cdots \cdots (1)$$

ここで、

$$D = Eh^3 / \{12(1 - \nu^2)\}$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

また、 ρ は密度、 E は縦弾性係数、 ν はポアソン比である。

内径拘束の場合、式(1)の解 w は、

$$w = v(r) \sin(n\theta) \sin(\omega_n t) \quad \cdots \cdots (2)$$

と表現できる。ここで ω_n は節直径数 n の固有振動数である。 $v(r)$ は、式(2)を式(1)に代入するとその一般解が得られ⁽³⁾、 $x^4 = \rho h \omega_n^2 / D$ とすると、

$$v(r) = \alpha J_n(xr) + \beta Y_n(xr) + \gamma I_n(xr) + \delta K_n(xr) \quad \cdots \cdots (3)$$

* 原稿受付 平成3年8月5日。

*¹ 正員、香川県工業技術センター(〒761 高松市郷東町587-1)。

*² 正員、四国工業技術試験所(〒761 高松市花ノ宮町2-3-3)。

となる。ここで、 $J_n(xr)$, $Y_n(xr)$ は n 次のベッセル関数、 $I_n(xr)$, $K_n(xr)$ は n 次の変形ベッセル関数を表す。また、 α , β , γ , δ は任意係数である。

境界条件は、内径拘束、外径自由のとき、外径 $r=a$ で、曲げモーメントおよび等価せん断が作用しない条件より、

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) = 0 \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 w + \frac{(1-\nu)}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left(\frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r} \right) = 0 \quad \dots\dots\dots (5)$$

また、内径 $r=b$ では、たわみおよび傾斜が拘束される条件より、

$$w=0 \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$\frac{\partial w}{\partial r}=0 \quad \dots\dots\dots (7)$$

である。したがって、式(2)、(3)を境界条件の式(4)から式(7)にあてはめると、非回転時の固有円振動数 ω_n を求めることができる。

次に回転しているときの円板の固有振動数について考える。このとき固有振動数 ω_{nr} は、回転角速度を ω_r とすると、次のように表すことができる⁽⁴⁾。

$$\omega_{nr}^2 = \omega_n^2 + \lambda \omega_r^2 \quad \dots\dots\dots (8)$$

ここで、 λ は遠心力によって決まる定数である。

この定数 λ は、遠心力によっても各モードのたわみ曲線の形状が変化しないと仮定すると、エネルギー法を用いて計算することができる。振動状態にある円板の運動エネルギーは、

$$T = \frac{\rho h}{2} \int_b^a \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 r dr d\theta \quad \dots\dots\dots (9)$$

である。

一方、円板のたわみによるひずみエネルギーは、

$$U_s = \frac{D}{2} \int_b^a \int_0^{2\pi} \left\{ (\nabla^2 w)^2 - 2(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) + 2(1-\nu) \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \right]^2 \right\} r dr d\theta \quad \dots\dots\dots (10)$$

さらに、遠心力によるひずみエネルギーの増加は、円板内の半径方向および接線方向の応力をそれぞれ σ_r , σ_t とすると

$$\Delta U = \frac{h}{2} \int_b^a \int_0^{2\pi} \left\{ \sigma_r \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 + \sigma_t \left[\frac{1}{r} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \right]^2 \right\} r dr d\theta \quad \dots\dots\dots (11)$$

である。

遠心力によって円板に生じる応力分布は、内半径で固定、外半径で外力なしとして、半径方向および接線方向の応力をそれぞれ σ_r , σ_t とすると、

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{\rho \omega_r^2}{8} \left[C + C_1 \frac{b^2}{r^2} - (3+\nu)r^2 \right] \\ \sigma_t &= \frac{\rho \omega_r^2}{8} \left[C - C_1 \frac{b^2}{r^2} - (1+3\nu)r^2 \right] \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (12)$$

ただし、

$$C = \left(\frac{1+\nu}{1-\nu} \right) C_1 + (1+\nu)b^2$$

$$C_1 = \frac{(3+\nu)a^2 - (1+\nu)b^2}{\left[\left(\frac{1+\nu}{1-\nu} \right) + \frac{b^2}{a^2} \right]}$$

である。

固有円振動数 ω_{nr} は、式(9)の運動エネルギーと式(10)および式(11)の合計のひずみエネルギーのおおのの最大値が等しいことから求められる。

腰入れによる非回転時の固有振動数 ω_n の変化は、腰入れによるひずみエネルギーの変化から計算することができる。ひずみエネルギーの変化は、腰入れによって生じる応力を求めることにより得られる。腰入れは圧延によって等方性応力を円板に与える処理と考えられる。したがって、ローラ圧延によって円板に与えられる等方性応力を次のように仮定する。

$$\sigma_a = A \exp \left[- \frac{(r-r_c)^2}{2s^2} \right] \quad \dots\dots\dots (13)$$

これは、ガウス分布関数であり、 A は最大応力値、 r_c および s はそれぞれ最大値での半径と分散を示す。

この σ_a が円板内でバランスした際の応力分布は、境界条件を内径外径ともに自由端として、

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= - \frac{1}{r^2} \int_b^r \sigma_a r dr + \frac{(r^2-b^2)}{r^2(a^2-b^2)} \int_b^a \sigma_a r dr \\ \sigma_t &= \frac{1}{r^2} \int_b^r \sigma_a r dr + \frac{(r^2+b^2)}{r^2(a^2-b^2)} \int_b^a \sigma_a r dr - \sigma_a \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (14)$$

となる。境界条件をこのように選んだのは、腰入れ処理時は内径外径ともに自由端であり円板内で応力バランスが保たれた後に使用されるためである。

円板に固定した座標での回転中の固有振動は、空間に固定した観測者には前進波と後進波の二つの振動として観測される。すなわち、式(2)から、

$$w = v(r) \sin(n\omega_r t) \sin(\omega_{nr} t)$$

図1 ローラ腰入れ

$$= \frac{1}{2} v(r) [\cos((\omega_{nr} - n\omega_r)t) - \cos((\omega_{nr} + n\omega_r)t)] \quad \dots\dots\dots (15)$$

となる。したがって、観測できる固有円振動数は、

$$\left. \begin{array}{l} \omega_{nr} + n\omega_r (\text{前進波}) \\ \omega_{nr} - n\omega_r (\text{後進波}) \end{array} \right\} \dots\dots\dots (16)$$

である。回転数の増加に従って後進波の固有振動数が減少し零になるときの回転数を臨界回転数 ω_{rc} とすると、式(8)および式(16)から次式となる。

$$\omega_{rc}^2 = \frac{\omega_n^2}{n^2 - \lambda} \quad \dots\dots\dots (17)$$

3. 実 験

3・1 方法 実験に用いた円板は鋼(SKS)製で外半径 $a=280$ mm, 内半径 $b=20$ mm, 板厚 $h=2.6$ mm である。回転軸に取付けた際のフランジの半径は $b=60$ mm である。標準的なチップソーに比べて板厚がやや薄いものである。実験には腰入れ処理をしていない通常円板と、腰入れ処理した円板の2枚を使用した。腰入れ処理は図1に示すローラ腰入れであるが、ローラ位置の半径を変化させながら幅広く処理した後、さらに親板のひずみ取りのためハンマ処理が施されている。

伝達関数および固有振動数計測の際の実験装置の概要を図2に示す。実験では、試料円板をモータで空転させ、回転中の円板の外周部をインパルスハンマでたたき、円板の同じ面の180°隔てた位置で、渦電流形センサにより振動変位を検出した。ハンマと変位センサの出力から伝達関数を求めた。結果は4回の計測の平均値を用いた。回転数はインバータにより制御している。

残留応力の計測は、腰入れが幅広い腰入れ処理であるため、処理領域が半径の大部分を占める。このため、あらかじめひずみゲージを貼っておいてから腰入れ処理し、その間のゲージ抵抗の変化を計測する⁽¹⁾ことは困難である。したがって、ここでは振動計測実験を終

えた腰入れ円板上に、ひずみゲージを貼った後、ゲージの周辺を切り出して残留応力を解放した。応力解放前後のゲージの抵抗値をブリッジにより計測し、その変化から残留応力を求めた。ゲージは半径方向と円周方向について、それぞれ15分割した半径で測定した(図3)。

3・2 結果

3・2・1 通常円板の非回転時固有振動数 内径をフランジの半径60 mmとし、式(3)のモードを計算した。そのときの係数 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ の値を表1に示す。ただし、外半径位置でのたわみを1とする正規化がされている。以下、固有振動数の計算はこのモードを使用した。非回転時の固有振動数の計算結果と実験結果を表2に示す。

通常円板について計算結果と実験結果は傾向的には一致する。ただし、二次モードに関しては差がやや大きい。これは、今回の実験に使用した通常円板は熱処理工程後に平面研削しており、このときに生じる表面の残留応力が影響しているためではないかと考えられる。

3・2・2 腰入れによる固有振動数の変化と残留応力 腰入れ円板残留応力計算に用いる等方性付加応力として、図4に示すガウス分布を選んだ。このときの円板内に生じる応力分布を、実験に用いた腰入れ円板の切り出し法による残留応力の計測結果と併せて図5に示す。計測結果がばらついているのは、ローラ腰入れ処理後にひずみ取りのためのハンマ処理が施されているためと考えられる。また、実際のローラ腰入れの場合

表1 たわみ関数の係数

Mode	0	1	2	3	4	5
α	-0.668	0.809	1.513	1.775	1.951	2.101
β	0.848	0.877	0.202	0.029	0.0037	0.0004
γ	0.184	0.237	0.263	0.157	0.083	0.044
δ	0.875	0.624	0.139	0.020	0.0027	0.0003

図2 伝達関数測定装置

図3 残留応力測定

は、ローラ圧延による塑性流動が生じ、計算に用いた付加応力の等方性が完全には成立していないことが考えられる。しかしながら、図5の計算値は図4の応力分布の最大値を100 MPaとして計算したものであり、分布形状が計測値とほぼ一致している。したがって、ばらつきと非等方性が振動に与える影響はわずかであると考えられる。

次に、等方性付加応力の最大値 A による固有振動数の変化エネルギー法による計算結果を図6に示す。零次のモードは約140 MPaで固有振動数が0 Hzとなる。このとき円板は座屈状態にある。一次のモードも等方性付加応力の最大値 A の増加とともに徐々に固有振動数が減少する。ところが二次以上のモードでは逆に、固有振動数が増加することがわかった。

通常円板と腰入れ円板の固有振動数の計測値も図6

に示したが、その傾きは計算値とほぼ一致し、計算による予測が正しいことがわかった。表2に腰入れ円板の固有振動数を示す。

3・2・3 回転時の固有振動数の変化 固有振動数の回転数による変化を決定する定数 λ の実験値と計算値を表2に示した。表2には式(11)および(12)を用いたエネルギー法による計算値および文献⁽³⁾⁽⁴⁾による値を示している。文献⁽³⁾⁽⁴⁾は、曲げ剛性を考慮せず、振動中の復元力は遠心力のみとし、中実の円板に対して求めた理論値である。円半径固定の条件を考慮していないにもかかわらず、零次モード以外は実験値とよく一致している。エネルギー法による値も同様の傾向となるが、零次モードの値が得られる点に特長がある。

固有振動数は伝達関数測定時のスペクトルから求められる。例えば、回転数250 rpmでのスペクトルを図

表2 非回転時の固有振動数と係数 λ

N.F.	Mode		0	1	2	3	4	5
			Exp.	Cal.	Exp.	Cal.	Exp.	Cal.
N.F.	Normal Disk	Exp.	45.9	37.3	39.6	88.7	163.9	259.0
	Tensioning Disk	Exp.	42.7	40.1	52.8	101.1	174.6	267.4
	Cal.	Exp.	29.5	33.4	63.6	124.2	204.0	300.6
	Cal.	Exp.	22.2	33.5	70.0	131.5	213.0	311.2
λ	Normal Disk	Exp.	0.68	1.12	2.35	4.09	6.18	8.66
	Tensioning Disk	Exp.	0.73	1.12	2.33	4.00	6.03	8.69
	Cal.	Exp.	0.96	1.30	2.30	3.85	5.81	8.13
	Theory ⁽³⁾⁽⁴⁾	Exp.	0	1.00	2.35	4.05	6.10	8.50

N.F. : Natural Frequency of nonrotating disk $\omega_n/2\pi$

図4 等方性付加応力

図5 残留応力分布

図6 非回転時の固有振動数と等方性付加応力の最大値 A の関係

7に示す。図7からは、各固有振動モードが前進波と後進波に分離している様子および腰入れによる固有振動数の変化がうかがえる。

図7 回転中の伝達関数スペクトル

回転数0～4 000 rpmでの固有振動数の計測結果を図8に示す。図8には解析による計算結果の固有振動数と定数 λ の値に基づく曲線を実線で示している。表2の定数 λ の実験値は、この実験結果から求めた。表2および図8に示すように計算結果と実験結果は比較的良好一致を示している。

定数 λ の値は、遠心力によるひずみエネルギーの増加からのみ求められ、腰入れの有無は無関係である。実験結果でも、通常円板と腰入れ円板での λ の値がほとんど一致することが確認できた。

したがって、後進波の振動数が零になるときの回転数、すなわち臨界回転数は非回転時の固有振動数によって決定される。節直径モード次数が零次の増分は前進波と後進波の分割が生じないため振動数は必ず増加する。同じく一次についても、式(17)において、定数 λ

(a) 通常円板

(b) 腰入れ円板

図8 固有振動数と回転数の関係

図 9 後進波の伝達関数と回転数の関係

の値が1より大きいので右辺の分母が負となり、臨界回転数は存在しない。したがって、最初の臨界回転数を決めるのは、次に非回転時の固有振動数の低い二次の節直径モードとなる。図8でも二次のモードが最も低い回転数で臨界回転数に達するようすがうかがえる。

通常円板と腰入れ円板を比べると、二次モード以上の非回転時の固有振動数は腰入れ円板のほうが高くなっているため臨界回転数も高くなっている。

3・2・4 伝達関数 各固有振動モードの回転数による伝達関数の変化を図9に示す。静的な単位負荷によるたわみは $50 \mu\text{m}/\text{N}$ であった。図中、高次モード側でチャートが不完全なのは振動数が計測レンジ 200 Hz を超えたためである。

図9の通常円板と腰入れ円板を比較すると、回転数の増加で最初に二次のモードが臨界回転数に至るまでは、腰入れ円板では通常円板に比べて、伝達関数の値は全体に小さくなっているため安定化している。また、二次の非回転時の固有振動数も腰入れすることによって 39.6 Hz から 63.6 Hz に1.6倍高くなったので、臨界回転数は 1830 rpm から 2930 rpm へと安定領域が拡大している。

二次モードの臨界回転数以上の領域では、通常円板では、回転数が増加するとき、おのおののモードの臨界回転数付近で鋭いピークが存在する。またピーク以外のところでも二次の臨界回転数以下と比べて伝達関数はやや増加している。腰入れ円板でも同様である。

以上のことから、臨界回転数を伝達関数の面からみると、二次の臨界回転数以下では伝達関数が小さい安定領域であり、二次の臨界回転数以上は伝達関数が大きくなり不安定領域となる。腰入れ円板ではこの傾向がより明確になることがわかった。

4. 結 論

チップソーの親板全体に幅広く分布させる腰入れ処理について、単純な円板モデルでその解析と実験を行った。その結果をまとめると以下ようになる。

(1) 幅広く分布する腰入れ処理で生ずる残留応力を計測した結果、ガウス分布形等方性付加応力によって生ずる応力分布と一致した。

(2) このような応力分布の影響による固有振動数の変化をエネルギー法により計算し、計測値と一致することを確認した。

(3) 二次以上の振動モードの後進波の振動数は回転数の増加とともに低下し、 0 Hz となる臨界点が現れ、このとき伝達関数は増加する。臨界点は回転数の増加とともに次々と高次のモードで現れ、総じて二次振動モードの臨界回転数以上の領域は不安定となる。

(4) 腰入れ処理によって、二次以上の振動モードの固有振動数が上昇し、臨界回転数が高くなる。このことにより、安定な領域が拡大する。

最後に、本研究に際してご協力いただいた橋本特殊工業(株) 橋本義弘社長と社員に謝意を表する。

文 献

- (1) 木村・安藤、丸のこローラ腰入れに関する研究(第1報)、木材学会誌, 20-5 (1974), 196.
- (2) Mote, C. D. Jr, Analysis of Optimal Roll Tensioning for Circular Saw Stability, *Wood and Fiber Sci.*, 16-3 (1984), 323.
- (3) Southwell, R. V., On the Transverse Vibration of a Uniform Circular Disc Clamped at its Centre; and on the Effects of Rotation, *Proc. R. Soc.*, 101(1921), 133.
- (4) Lamb, H. and Southwell R. V., The Vibration of a Spinning Disk, *Proc. R. Soc.*, 99(1921), 272.