振動インテンシティ計測に関する基礎研究*
(第3報, 種々の方法の検討)小 泉 登 男^{*1}, 鎌 田 実^{*1}A Study on Structural Intensity Measurement
(3rd Report, Comparison of Several Methods)

Norio KOIZUMI and Minoru KAMATA

It will be very useful for structure-borne sound problems, if energy flow of a mechanical structure can be measured. This paper, following the previous report, describes the experimental investigation of structural intensity measurement on a beam by several methods and approaches. The 2-point, 3-point and 4-point methods using an array of closely spaced accelerometers and strain gauges were compared. The results show that the 3-point method using acc. is most successful in structural measurement at the near-field. Another approach by a newly proposed reference method is also shown to be good in practical use if the vibration field is stationary. Experimental wave decomposition makes it possible to gain information of the vibration field, especially the termination condition.

Key Words: Vibration, Structural Intensity, Structure-Borne Sound

1. はじめに

現場で構造物の振動インテンシティが計測できれば振動、固体音対策上大いに役立つことが期待される。しかし空気音に比べ、それを正確に計測することはかなり困難である。それは曲げ波に限定してみても関心のある周波数に相当する波長に比べ構造物の寸法が近接場(ニアフィールド)の存在を考慮しなければならない場合が多く、また一般に構造物の振動場はかなり反響的である。

1990年フランスのCETIMでのインテンシティの国際会議は、研究の主題が音響インテンシティから振動インテンシティ(Structural Intensity)に移行していることから分かるように、振動インテンシティ計測の実用化へ向けての研究は世界的規模で行われている。

本研究は固体音を正確にトレース出来るよう、振動インテンシティ計測に関する基礎研究を行っているものである。前報^{(1),(2)}までに、Pavic⁽³⁾の提案した加速度計アレイによる計測、空間微分の差分近似を前提とし、梁と板についてシミュレーションと測定例を示し、さらに波動分離による振動場の把握を示した。

本報では梁(一次元)について、基礎式にもどって、近

接して置かれた歪計アレイ、歪計と加速度計の組み合わせ方式、そして2個ないし4個の加速度計アレイによる計測の各種方式について比較検討を行う。また機械構造物のように内部減衰が小さく、端末結合部に損失のある場合を想定して、境界条件をいくつか変えて、どの程度まで振動インテンシティ計測が可能かを実験的に調べてみる。さらに近接場(加振点近傍、境界近傍の近距離場)の扱い、空間微分の扱い、そして波動分離による扱いについて検討する。

2. 振動インテンシティの定式化

2.1 基礎式 振動インテンシティは構造物の単位幅あたりに単位時間に流れる振動のエネルギーで定義される。梁要素の振動には、面内波と面外波があるが、一般に固体伝搬音に関しては面外波特に曲げ波が支配的であるとされていることから、ここでも曲げ波のみを対象とする。

梁の中立面をx-y面とし、長さ方向をxとする。面外変位を ζ 、単位幅あたり曲げ剛性をBとする。x方向振動インテンシティ W_x は波動の伝搬方向が一定の一次元とすれば、次のようになる。

$$W_x(x, t) = B \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3} \frac{\partial \zeta}{\partial t} - B \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial t} \dots \dots (1)$$

右辺第一項がせん断力と対応する速度ベクトルのスカ

* 平成3年7月10日 1991 Dynamics and Design Conferenceにおいて講演, 原稿受付 平成3年8月7日.

^{*1} 正員, 東京大学工学部 (〒113 東京都文京区本郷7-3-1).

ラー積の項、第二項が曲げモーメントと対応する角速度ベクトルのスカラー積の項である。これは瞬時インテンシティと呼ばれるものである。これを一周期について時間平均して扱う。 $\zeta(t)$ をフーリエ変換して $\zeta(\omega)$ とするとインテンシティスペクトル $W_s(x, \omega)$ は次のようになる。

$$W_s(x, \omega) = j\omega B \left(\zeta \frac{\partial^3 \zeta^*}{\partial x^3} - \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial^2 \zeta^*}{\partial x^2} \right) \dots \dots (2)$$

2.2 変換器と計測方式 本報では以下の4種の方式について比較検討を行う。

1) 加速度計アレイ方式

前報⁽²⁾で示した近接場が無視できる所(振動源や境界から1/2波長程度離れた所)で計測する2個の加速度計ペアの方式(2 acc. methodと略称)と3次までの空間微分を差分で近似して計測する4個の加速度計アレイによる方式(4 acc. methodと略称)がある。

(2)式のインテンシティを求めるためには、点 x での変位 ζ の各空間微分項を求める必要がある。これを以下のように有限差分によって近似する⁽³⁾。(計測点の配置は x 正方向に向かって4~1, また $\zeta = -\zeta/\omega^2$ で得られ、 δ は計測点間距離)

$$\left. \begin{aligned} \zeta &= \frac{\zeta_2 + \zeta_3}{2} \\ \frac{\partial \zeta}{\partial x} &= \frac{\zeta_2 - \zeta_3}{\delta} \\ \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} &= \frac{\zeta_1 - \zeta_2 - \zeta_3 + \zeta_4}{2\delta^2} \\ \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3} &= \frac{\zeta_1 - 3\zeta_2 + 3\zeta_3 - \zeta_4}{\delta^3} \end{aligned} \right\} \dots \dots (3)$$

これらを(2)式に代入すると、インテンシティは次のようになる。

$$W_s(x, \omega) = \frac{B}{\delta^3 \omega^3} [4\text{Im}\{G(\zeta_2, \zeta_3)\} - \text{Im}\{G(\zeta_2, \zeta_4)\} - \text{Im}\{G(\zeta_1, \zeta_3)\}] \dots \dots (4)$$

ただし $G(a, b)$ は a, b のクロススペクトル。

近接場が無視できれば、 $\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} = -k^2 \zeta$ (k は波数)を用い、せん断力による項と曲げモーメントによる項が等しくなり、次のように簡略化できる。

$$W_s(x, \omega) = \frac{2Bk^2}{\delta \omega^3} \text{Im}\{G(\zeta_1, \zeta_2)\} \dots \dots (5)$$

2) 参照法

対象とする振動が定常であれば、ある点での加速度を参照信号とし、もうひとつの加速度計を移動して各位置での加速度を参照信号とのクロススペクトルの形で計測し、後に位相情報を持った加速度スペクトルに変換することができる。この方式を本研究では参照法と呼び新しく提案する(Ref. methodと略称)。これは計測の手間、時間はかかるものの、2chのFFTアナライザがあれば計測でき、しかも平均回数を増やすことが容易である。ま

た計測点の位置の設定誤差の問題はあるが、加速度計間の位相誤差は本質的に考慮しなくても良くなる。

3) 歪計アレイ方式

前記の加速度計を歪計に代えた方式で、付加質量を避ける狙いがある。定式化については文献(4)に詳しいが、空間2次微分と歪、空間4次微分と加速度の間には(6)式の関係があるので、これらから(7)式のように有限差分近似を行えば良い。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} &= -\frac{2}{h} \epsilon \\ \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} &= -\frac{12}{C_l^2 h^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} \end{aligned} \right\} \dots \dots (6)$$

ただし h は梁厚、 $C_l = \sqrt{E/\rho}$ は縦波速度

$$\left. \begin{aligned} \zeta &= -\frac{C_l^2 h}{12\omega^2 \delta^2} (\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4) \\ \frac{\partial \zeta}{\partial x} &= -\frac{C_l^2 h}{6\omega^2 \delta^3} (\epsilon_1 - 3\epsilon_2 + 3\epsilon_3 - \epsilon_4) \\ \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} &= -\frac{1}{h} (\epsilon_2 + \epsilon_3) \\ \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3} &= -\frac{2}{h\delta} (\epsilon_2 - \epsilon_3) \end{aligned} \right\} \dots \dots (7)$$

歪ゲージ方式も加速度計と同様、近接場も考慮した4点方式と無視した2点方式とがある(それぞれ4 st.-gauge method, 2 st.-gauge methodと略称)。

4) 加速度計2個と歪計2個とを併用する方式⁽⁴⁾

上記歪計だけの場合では、変位とその空間1次微分に高次の差分が出てくるが、加速度計ペアと歪計ペアを併用することにより、次のように2点の和と差で対応することができる。

$$\left. \begin{aligned} \zeta &= \frac{\zeta_1 + \zeta_2}{2} \\ \frac{\partial \zeta}{\partial x} &= \frac{\zeta_1 - \zeta_2}{\delta} \\ \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} &= -\frac{1}{h} (\epsilon_1 + \epsilon_2) \\ \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3} &= -\frac{2}{h\delta} (\epsilon_1 - \epsilon_2) \end{aligned} \right\} \dots \dots (8)$$

この方式をコンバイン方式と呼ぶことにする(Co. methodと略称)。

2.3 波動分離による方法 前報で一部述べたが、波動分離の方法を本報では各種試してみる。

一次元の梁での曲げ波の波動方程式の解の位置依存項は減衰を無視すると次式で表される。

$$\zeta(x) = Ae^{-jks} + \alpha Ae^{jks} + A_{-j}e^{-ks} + A_{+j}e^{ks} \dots (9)$$

ただし A : 進行波の複素振幅, αA : 後退波の複素振幅, A_{-j} , A_{+j} : 減衰波の振幅

この波動解をインテンシティの式に代入して整理すると、次のようになる。

$$W_s(x, \omega) = \omega B k^3 \{ |A|^2 (1 - |\alpha|^2) - 2|A_{-j}||A_{+j}| \sin(\phi_{-j} - \phi_{+j}) \} \dots (10)$$

ただし $k^4 = \rho h \omega^2 / B$, $A_{-j} = |A_{-j}| e^{j\phi_{-j}}$, $A_{+j} = |A_{+j}| e^{j\phi_{+j}}$

従って波動解の各係数がわかれば、インテンシティはそれから求められる。

1) 4個の加速度計による差分法

前報⁽¹⁾のとおり、(9)式を(11)式のように表現すると、各空間微分項と各波動解の関係は(12)式ようになる。

$$\zeta(x) = Z_+ + Z_- + Z_{-j} + Z_{+j} \dots \dots \dots (11)$$

$$\begin{bmatrix} \zeta \\ \frac{\partial \zeta}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -jk & jk & -k & k \\ -k^2 & -k^2 & k^2 & k^2 \\ jk^3 & -jk^3 & -k^3 & k^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_+ \\ Z_- \\ Z_{-j} \\ Z_{+j} \end{bmatrix} \dots (12)$$

上式において、各空間微分項は加速度計アレイの信号データから差分近似して求められるので、各波動解は行列演算により得られ、波動分離ができる。このようにして進行波、後退波がわかれば、(10)式よりインテンシティが求められる。また近接場の大きさ、反射係数など振動場の状態を把握することができる。

2) 3個の加速度計による差分法

計測箇所によっては片方の近接場項が十分減衰していて、波動解が3項からなると近似できる場合がある。また加速度計の個数が多いと位相誤差が重畳し、かえって誤差が多い結果になり得るので、少なくして十分な結果が得られる方が望ましい。従って加速度計3個のデータから波動分離することを新しく提案する。振動源に近いところでは、境界からの減衰項 A_{+j} が省略できる。また境界から近いところでは、振動源からの減衰項 A_{-j} が省略できるので、2次までの空間微分と Z_+ , Z_- と Z_{-j} (あるいは Z_{+j}) の波動解の関係は 3×3 の行列で済む。従って2次までの空間有限差分から行列演算により進行波と後退波が求められるので、(10)式よりインテンシティが計算できる。行列の次数が下がっているの、計算時間が少なくて済むというメリットもある。

3) 4個の加速度計による Taylor の方法

Taylor は波動分離を有限差分近似を用いずに、4点のデータから波動解の振幅を直接求める方法を示した⁽⁵⁾(ただし式の導出は減衰項を省いた簡単なもののみ)。ここではこの方法も比較のために試してみた。方法の概略は次の通りである。

前述の方式と同様に4個の加速度計を1列に並べる。計測点の x 座標は正方向に向かって $x_4 \sim x_1$ で、 x_i 位置での加速度信号を $\ddot{z}_i$ とする。波動解の各複素振幅を $A \sim D$ とし、周波数面で扱うと次のように表される。

$$\ddot{z}_i(x_i, \omega) = A e^{-jkx_i} + B e^{jkx_i} + C e^{-kx_i} + D e^{kx_i} \dots (13)$$

この4点の加速度のオートスペクトルおよび相互のクロススペクトルを求めると、波動解の振幅のスペクトルと測定された加速度のスペクトルの関係式が16個できる。

これらから 16×16 の逆行列演算で波動振幅スペクトルが求められる。すると、次式によりインテンシティが求められる。

$$W_s(x, \omega) = \frac{2Bk^3}{\omega^3} [G_{AA} - G_{BB} - 2Q_{CD}] \dots (14)$$

ただし、 $G_{AA} = \frac{1}{2}(AA^*)$, $Q_{CD} = \frac{1}{2}\text{Im}\{CD^*\}$ 等。また、部材の内部減衰は小さいとして省略してある。

4) 3個の加速度計による Taylor 法

加速度計アレイを使った Taylor 法でも、前述の差分法と同様に加速度計間の位相誤差が存在するので、できれば個数を減らしたい。片方の近接場項を省略し、3点の計測による方が得策となる。このとき波動振幅スペクトルを解くためには、 9×9 の逆マトリックスと測定される3個のオートスペクトルと3個のクロススペクトルがあれば十分である。さらに近接場の影響を無視できれば2個の加速度計による Taylor 法も定式化できる。

3. 実験および考察

3.1 計測装置 計測システムは前報と同様のものに歪関係を付加したもので図1に示される。加速度計は小型軽量のもの (BK4375) で、対象物への取り付けには専用ワックスあるいは瞬間接着剤を用いた。歪計は、今回の実験装置では加振力の制約から歪量が微小なため、半導体歪計 (共和 KSN-2-E4-11) を採用し、専用瞬間接着剤により対象物に取り付けた。加速度信号はチャージアンプを経て、歪信号は動歪アンプを経て12ビット A/D 変換を行う波形記憶装置に記録される。後の演算処理は EWS にて行う。対象物の加振は加振器によるが、その加振駆動信号 (単一周波数正弦波あるいは定常ランダム波) は FFT アナライザが発生する。

3.2 実験内容 本報では、一次元梁 (幅 32mm, 高さ 9mm, 長さ 1480mm) について、以下の境界条件の

図1 実験装置系統図

実験について報告する。

1) 大きな減衰付終端 (Damped と略称)

一端をラバーホムを介して砂箱に入れる。反射を極力小さくして、梁内に目立った定在波がたたないようにした。加振点の駆動点モビリティは最高最低の差が10dB以内となっている。

2) 小さな減衰付終端 (Semi-fixed と略称)

一端を防振ゴムを介してボルト止めしたもので、防振して基礎に取り付けられた梁をモデル化したものである。梁は片持ちのため1点の支持では不安定のため160mm離れた2点の支持とし、使用ボルトはM16である。梁内に定在波がかなりたつものの(共振ピークが目立つ)、次の完全固定に比べると、ゴムによるエネルギー吸収が期待できる。

3) 完全固定端 (Fixed と略称)

上記 Semi-fixed における防振ゴムを使用せず、直接ボルト締めしたもので、固定端をモデル化したものである。エネルギー吸収部分がほとんどなく、梁内に定在波が大きかつ。

計測はまず境界を Damped とし、2.1 節の 1) から 4) までの方式について、定常ランダム波と単一周波数正弦波による加振実験を行い、入力パワーと $x=10\text{cm}$ における伝達パワーを求め、各方式間の比較検討をした。

次に 2.2 節と 2.3 節の方式を 3 種の境界について定常ランダム加振実験を行い、同様に入力パワーと伝達パワーを求め、比較検討をした。

また波動分離方式では、反射率が求められるので、3 種の境界について求め、振動場について検討した。

3.3 実験結果と考察 まず Damped の境界で、640Hz の単一加振において、入力パワーと伝達パワーについて、4 個の加速度計を使う方式と 4 個の歪計を使う方式、そして加速度計と歪計を使うコンバイン方式を比較したものが図 2 である。図中入力パワーのみ FFT アナライザの解析のため周波数の分解能が異なっている。640Hz 付近の値は、歪計を使用したものが少し低く評価されている。それ以外の周波数では、ノイズの程度を表しているが、4 個の歪計による方式が一番悪いようである。これは、梁の厚みが歪計で測定するには厚く、歪量のレベルが小さかった ($10\mu\text{strain}$) ためと考えられる。

ランダム加振について同様の比較をしたものが、図 3 である。この図では入力パワーを比較対象用に太線で示してある。またデータ処理の演算上で、負のパワーとなったところは便宜上 $y_{\min}\text{dB}$ としてある。入力パワーは 100Hz 以下の極低周波数域の一部で負値になっている以外は正の値でエネルギーが伝搬している。従って伝達パワーが負になりつららようになってきているのは、その方式が安定していないことを意味する。レベル、変動、安定度の点で各方式を比較すると、まず 4 個の歪計を用いたものは安定度の点で悪い。コンバイン方式は安定度はまずまずのものレベルが多少ずれている。4 個の加速度計を用

図2 方式による伝達パワーの違い: 単一周波数 (640Hz) 加振

図3 方式による伝達パワーの違い: ランダム加振

図4 方式による伝達パワーの違い: 遠距離場近似

いたものは、低周波で安定度が悪くなるが、レベルは入力に良くあっている。ただし上下変動は少々大きい。この上下変動は FFT 解析するときの平均回数に依存しており、ここで用いた 32 回平均ではかなり大きい。これを増やすと (計算時間はかかるが)、スムーズなカーブとなる。参照法は FFT アナライザで 100 回平均の FFT をかけているため上下変動が少なくスムーズで、高周波側の一部を除いて入力に比較的良くあっている。このように参照法は、加振源が定常であるという前提が必要であり、少々手間がかかるが、少ない道具で精度良く計測

することが可能であり、現場向きであると言える。

さて、近接場項を無視すれば加速度計、歪計ともに2点のデータで近似できるので、同様に伝達パワーを求めてみたところ図4のようになった。歪計の方は4個のよりは安定しているもののまだ負値になる部分が多い。加速度計の方は、4個と一見変わらないが、よくみると低周波側でレベルが高めに評価されている (dB表示であるため差は僅かである)。本実験では計測位置を加振点から10cmとしたため、近接場項の影響は無視できないレベルと予想されたが、dB表示で数dBの誤差を許すのであれば、2点のデータからの近似でも問題無いと言える。

次に境界の違いによる振動場の違いと方式によるインテンシティの計測精度の関係をみてみる。変換器間の位相誤差は最大 0.5° 程度は存在するので、必要以上変換器を使わない方が得策である。測定位置を加振点より10cm離れた場合、加速度計4個と3個の方式を比較して、それぞれ入力パワーと伝達パワーを図5に示す。各境界とも3 acc. 方式の方が安定度が増しており、DampedとSemi-fixedの境界では入力パワーと伝達パワーが良く一致している。反響性が著しいFixed境界では、低い周波数では過大評価され、高い周波数では過小評価されている。なお、差分法とTaylor法で結果はほとんど同一で、

計算時間の短い差分法で十分な精度を持つと考えられた。

ところで加振点より10cmという位置で近接場項の影響する周波数帯域を考えてみると、10cmが1/4波長に相当する約500Hz以下である。そこで、近接場の影響を詳しくみるために、Damped境界およびSemi-fixed境界で、入力パワーと3種のインテンシティ算出結果とをリニアスケールで比較をしてみたところ図6、7のようになった。伝達パワーは加振点より10cmでの2および3 acc. methodと62cmでの2 acc. methodで、図が繁雑になるためピーク値のみをプロットしてある。ほぼ遠距離場と考えられる62cmでの2 acc. methodと片方の近接場項を考慮している3 acc. methodは、入力パワーに比較的よい一致を示すが、10cmでの2 acc. methodは、特に500Hz以下で値が過大評価されているのがわかる。

次に3種の境界について、加速度計3個による差分法で反射係数を求めてみたところ、図8のようになった。一部の周波数を除き、3種の境界の状態から予想されるレベル、大きさの順序になっているのがわかる。即ちDamped境界ではほぼ0.5で、梁を半無限と見なせるほどではないが反射波が半分くらい抑えられている。Semi-fixed境界ではほぼ0.9でかなり反響的であり、Fixed境界ではほぼ1で完全固定に近いことがわかる。反射係数が部分

図5 3種の境界における伝達パワーの比較：4点法と3点法

図6 近接場の影響：Damped境界

図7 近接場の影響：Semi-fixed境界

図8 3種の境界における反射係数

的に鋭く小さくなっているところは、図5と合わせてみると、系の曲げ固有振動数とは考えにくい周波数帯で入力パワーも伝達パワーも大きくなっていた。この点を明らかにするために、境界部の端末回転（モーメント）インピーダンスを求めてみたところ、その周波数帯で共振に相当する形状を示した。従って境界支持部の共振により、梁からのパワーの散逸が大きく、反射係数が小さくなっているものと考えられた。さらに境界を含んだ構造物（梁）のロスファクタを求めてみたところ、反射係数の周波数に関する変化と対応がとれていた。このように波動を分離することにより、境界の状態を知ることができる。

4. まとめ

本報では、簡単な構造物（梁）を対象に、3種の終端条件のもとで振動インテンシティ計測の各種方式・方法を実験的に比較検討した。その結果次のようなことが得られた。

歪計アレイ方式。および歪計と加速度計の併用方式は、本実験のように厚い梁ではそのポテンシャルを引き出せなかった。もしふさわしい対象物であれば、利用することができよう。

加速度計アレイ方式では、2個、3個、4個の方式を検討したが、加速度計相互の位相誤差の存在により、加速度計の数を減らした方が良い結果が得られた。境界に近いところの計測では、近接場項を1つ考慮した3個方式で、また境界からある程度離れていれば、2個方式で実用上十分である。

また新しく提案した参照法は、振動場が定常であれば十分現場で使えることが確認できた。

波動分離をすることにより、振動場特に境界付近の情報を得ることができる。分離方法としては、差分法とTaylor法を検討したが、結果はほとんど同一であった。

今後は2次元の計測について詳細検討を行う予定である。

文 献

- (1) 鎌田・島谷, 機論, 57-535C(1991-3),700.
- (2) 鎌田・島谷, 機論, 57-536C(1991-4),1196.
- (3) Pavic, G., *J.Sound Vib.*, 49-2(1976),221.
- (4) Pavic, G., Proc. of Int. Congress on Acoustic Intensity, CETIM(1981),209.
- (5) Taylor, P.D., Proc. of Int. Congress on Intensity Techniques, CETIM(1990),249