柔軟関節を持つ非線形ロボットアームのモデル追従制御*

植竹 洋一^{*1}, 中川 栄一^{*2}, 佐藤 準一^{*2}

Model Following Control of Nonlinear Elastic Joint Robots

Yoichi UETAKE, Eiichi NAKAGAWA and Jun'iti SATO

In this paper we study the model following control of manipulators with elastic joints. In the dynamic model of manipulators, the function of the joint flexibility may be nonlinear. A simple design procedure based on the notion of Lie derivative is given. Checking of the involutivity conditions is not required. The nonlinear system will be linearized by the nonlinear state feedback and nonlinear state transformation. We show that the proposed control method can be applied to a broad class of nonlinear functions of the joint flexibility.

Key Words: Automatic Control, Robotics, Nonlinear System, Model Following Control, Elastic Joint, Lie Derivative, Feedback Linearization

1. 結 言

最近, マニピュレータの運動制御の研究は剛体マニピュレータから柔軟関節を持つマニピュレータの関節弾性を考慮した制御に比重が移りつつある⁽⁸⁾。剛体マニピュレータは入力トルクが直接マニピュレータの運動を支配する構造を持っているため非線形補償による自明な線形化が可能であった。柔軟関節の場合でも加速度フィードバックを用いれば線形化できる場合がある。しかし一般に加速度を求めるのは位置や速度の場合に比べて問題があり, またフィードバック系にインパルス・モードを持ち込む恐れもある⁽⁹⁾。現代制御理論では加速度フィードバックは状態の微分もフィードバックに用いることを意味するが一般に状態フィードバックだけで十分であり加速度フィードバックは不要である。しかし柔軟関節の場合には状態フィードバックによる線形化は自明ではない。一方, 一般の非線形システムを非線形状態フィードバックと非線形変数変換によって線形化する問題は Brockett⁽¹⁾, Jakubczyk and Respondek⁽⁷⁾, Su⁽¹²⁾, Hunt, Su and Meyer⁽⁵⁾ ら

によって研究された。そこでは曲がった空間での微分に相当するリー微分(Lie derivative)が用いられる。リー微分はポーランドのシレボジンスキ[Śleboziński⁽²⁾]によって無限小変換の研究に際して発見され, オランダの van Dantzig によって命名された概念である。特に同じポーランドの Jakubczyk ら⁽⁷⁾は多入力非線形系も含めて線形化問題を最終的に解決した。最近, Slotine⁽¹⁰⁾は線形の弾性関数からなる柔軟関節を持ったマニピュレータに対して上記の手法が応用できることを指摘している。しかし線形化が可能であるための条件としてベクトル場がインボルーティブ(involutive)であることを確かめなければならないがこれは特に非線形性が強い場合は困難である。ところがインボルーティブであることと同値な線形化が可能になるための条件として適当な出力を設けたとき非線形システムの相対次数⁽¹⁴⁾がシステムの次数 n に等しいという条件がある⁽⁶⁾。本論文では関節弾性が非線形な場合でも関節角を出力とすればこの相対次数の条件が満足されそれに基づいて簡易な設計ができることを示す。設計手順はリー微分を用いて簡潔に書くことができる。なお最近, Spong⁽¹¹⁾や Tarn ら⁽¹³⁾は線形なモータダイナミクスが存在する場合のマニピュレータに対して本手法と等価な手法で線形化フィードバック系

* 原稿受付 平成3年4月22日。

^{*1} 東京商船大学 (〒135 東京都江東区越中島2-1-6)。^{*2} 正員, 東京商船大学。

を構成している。

2. モデル追従系の設計

次式で表される弾性1リンクマニピュレータを考える。

$$J_L d^2 \theta_L / dt^2 + d_L d\theta_L / dt + Mgr \sin(\theta_L) + k(\theta_L, \theta_M) = 0 \quad (1\cdot a)$$

$$J_M d^2 \theta_M / dt^2 + d_M d\theta_M / dt - k(\theta_L, \theta_M) = \tau \quad (1\cdot b)$$

式(1・a), (1・b)はそれぞれリンクとモータの運動方程式で J_L , J_M は慣性モーメント, d_L , d_M は粘性摩擦係数, M はリンクの質量, r はリンクの長さ, g は重力定数である。 $k(\theta_L, \theta_M)$ は弾性力で一般に非線形である。ここでの目的はリンク角 θ_L をモデル $\theta_{Lm} = \theta_{Lm}(t)$ に漸近的に追従させることである。式(1)を状態方程式で表すために状態ベクトル $x = [x^1, x^2, x^3, x^4]^T$ を次式で定義する。

$$x^1 = \theta_L \quad (2\cdot a)$$

$$x^2 = d\theta_L / dt \quad (2\cdot b)$$

$$x^3 = \theta_M \quad (2\cdot c)$$

$$x^4 = d\theta_M / dt \quad (2\cdot d)$$

入力トルク τ を現代制御理論の習慣に従って $u = \tau$ と書くと式(1)は

$$dx^1 / dt = x^2 = : f^1(x) \quad (3\cdot a)$$

$$dx^2 / dt = -J_L^{-1} \{ d_L x^2 + Mgr \sin x^1 + k(x^1, x^3) \} = : f^2(x) \quad (3\cdot b)$$

$$dx^3 / dt = x^4 = : f^3(x) \quad (3\cdot c)$$

$$dx^4 / dt = -J_M^{-1} \{ d_M x^4 - k(x^1, x^3) \} + J_M^{-1} u = : f^4(x) + J_M^{-1} u \quad (3\cdot d)$$

と書かれる。出力を $y = x^1 = : h(x)$ とし

$$f(x) = [f^1(x), f^2(x), f^3(x), f^4(x)]^T \quad (4\cdot a)$$

$$g(x) = [0, 0, 0, J_M^{-1}]^T \quad (4\cdot b)$$

とすると次式の非線形状態方程式表現を得る。

$$dx/dt = f(x) + g(x)u \quad (5\cdot a)$$

$$y = h(x) \quad (5\cdot b)$$

以下ではより一般的に状態 $x = [x^1, \dots, x^n]^T \in R^n$ として出力 y を目標値 $y_m = y_m(t)$ に漸近的に追従させるための制御則を決定する。そのための準備として $y = h(x)$ のベクトル場 f (反変ベクトル) によるリー (Lie) 微分を次式で定義する。

$$L_f h(x) = \langle dh, f \rangle = \sum_{i=1}^n (\partial h / \partial x^i) f^i \quad (6)$$

ここで $\langle, \rangle$ は内積を表し, dh は

$$dh = [\partial h / \partial x^1, \dots, \partial h / \partial x^n] \quad (7)$$

で定義される h の微分 (共変ベクトル) であり, $f^i =$

$f^i(x)$ は f の第 i 成分を表す。 $L_f^k h$ も次式によって再帰的に定義することができる。

$$L_f^k h = L_f (L_f^{k-1} h), \quad k = 1, 2, \dots \quad (8\cdot a)$$

$$L_f^0 h = h \quad (8\cdot b)$$

設計に際して式(5)について

$$L_g h = L_g L_f h = \dots = L_g L_f^{n-3} h = L_g L_f^{n-2} h \equiv 0 \quad (9\cdot a)$$

$$L_g L_f^{n-1} h \neq 0 \quad (9\cdot b)$$

と仮定する。これは線形システムの場合には相対次数 $= n$ ということと一致する。新たに変数 $z^1, z^2, \dots, z^n$ を(9・a)の条件に注意しながら次式で定義する。

$$z^1 = y = h \quad (10\cdot a)$$

$$z^2 = y^{(1)} = \partial h / \partial x (f(x) + g(x)u) = L_f h + u L_g h = L_f h \quad (10\cdot b)$$

$$z^3 = y^{(2)} = \partial L_f h / \partial x (f(x) + g(x)u) = L_f^2 h + u L_g L_f h = L_f^2 h \quad (10\cdot c)$$

$\vdots$

$$z^{n-1} = y^{(n-2)} = L_f^{n-2} h + u L_g L_f^{n-3} h = L_f^{n-2} h \quad (10\cdot d)$$

$$z^n = y^{(n-1)} = L_f^{n-1} h + u L_g L_f^{n-2} h = L_f^{n-1} h \quad (10\cdot e)$$

式(10・e)より

$$dz^n / dt = L_f^n h + u L_g L_f^{n-1} h \quad (11)$$

となるので結局, 式(9・a), (9・b)の条件は出力 y を状態方程式(5)に従って次々に微分していくと n 回めに初めて入力 u が現れるということと等価になることがわかる。 $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ を後で決める定数とする。

$$dz^n / dt - a_0 z^n - a_1 z^{n-1} - \dots - a_{n-2} z^2 - a_{n-1} z^1 = L_f^n h + u L_g L_f^{n-1} h - a_0 L_f^n h - a_1 L_f^{n-2} h - \dots - a_{n-2} L_f h - a_{n-1} h \quad (12)$$

式(12)は出力 y の微分を入力 u が現れるまで次々にとっていきそれらを適当な重みをつけて足し合わせることに相当する。ここで

$$f_p(x) := L_f^n h(x) - a_0 L_f^n h(x) - a_1 L_f^{n-2} h(x) - \dots - a_{n-2} L_f h(x) - a_{n-1} h(x) \quad (13)$$

$$g_p(x) := L_g L_f^{n-1} h(x) \quad (14)$$

とすると

$$dz^n / dt - a_0 z^n - a_1 z^{n-1} - \dots - a_{n-2} z^2 - a_{n-1} z^1 = f_p(x) + g_p(x)u \quad (15)$$

条件式(9・b)より $g_p(x) \neq 0$ であるから v を外部入力として制御入力を

$$u = (1/g_p(x))(-f_p(x) + v) \quad (16)$$

とすると式(10), (15)より

$$dz^1 / dt = z^2 \quad (17\cdot a)$$

$$dz^2 / dt = z^3 \quad (17\cdot b)$$

$$\begin{aligned} & \vdots \\ & dz^{n-1}/dt = z^n \dots\dots\dots (17\cdot c) \\ & dz^n/dt = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-2} z^2 + a_{n-1} z^1 + v \\ & \dots\dots\dots (17\cdot d) \end{aligned}$$

となる。式(10)より式(17\cdot d)は

$$\begin{aligned} y^{(n)} &= a_0 y^{(n-1)} + a_1 y^{(n-2)} + \dots \\ &+ a_{n-2} y^{(1)} + a_{n-1} y + v \dots\dots\dots (18) \end{aligned}$$

そこで目標値 y_m は n 回連続微分可能で $y_m^{(i)} (i=0, 1, \dots, n)$ はすべて有界とし、外部入力を

$$\begin{aligned} v &= y_m^{(n)} - a_0 y_m^{(n-1)} - a_1 y_m^{(n-2)} - \dots \\ &- a_{n-2} y_m^{(1)} - a_{n-1} y_m \dots\dots\dots (19) \end{aligned}$$

とすると $e := y - y_m$ は次式を満たす。

$$\begin{aligned} e^{(n)} &- a_0 e^{(n-1)} - a_1 e^{(n-2)} - \dots \\ &- a_{n-2} e^{(1)} - a_{n-1} e = 0 \dots\dots\dots (20) \end{aligned}$$

したがって $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ を特性多項式

$$\begin{aligned} s^n &- a_0 s^{n-1} - a_1 s^{n-2} - \dots \\ &- a_{n-2} s^1 - a_{n-1} = 0 \dots\dots\dots (21) \end{aligned}$$

の解の実部がすべて負であるように選べば

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e = 0 \dots\dots\dots (22)$$

となってモデル追従の目的が達成される。上式の微分方程式が意味を持つためには初期値 $e(0), e^{(1)}(0), \dots, e^{(n-1)}(0)$ が有界でなければならない。 $y(0), y^{(1)}(0), \dots, y^{(n-1)}(0)$ は式(10)で $t=0$ として与えられるから $x(0)$

が有界であれば有界であることと目標値 y_m とその n 回導関数までがすべて有界であるとしたことから結局式(22)は満たされる。式(17)は安定なシステムであり外部入力 v は有界であるから $z^1, \dots, z^n$ も有界になる⁽²⁾。したがって $x = [x^1, \dots, x^n]^T$ から $z = [z^1, \dots, z^n]^T$ への変換式(10)が微分同相であることを示せば状態 x を有界に保ちながら出力 y を目標値 y_m に漸近的に追従させることができる。式(10)の変換が原点の近傍で微分同相であること、すなわち $z = [z^1, \dots, z^n]^T = [y, y^{(1)}, \dots, y^{(n-1)}]^T$ が新しい座標になっていることの証明は本質的に同じものが Isidori⁽⁶⁾ にあるがここでは付録 A にテンソル表示を用いた詳しい証明を述べる。式(16)は状態フィードバックになっている。したがって式(1)の場合ではマニピュレータとモータの位置と速度を用いていることになる。

以上で一般論を終わり式(16)で与えられた制御則を式(1) [= (3)] のマニピュレータのモデルに適用してみよう。式(3)に従って出力 y の微分をとっていくと、

$$y = x^1 \dots\dots\dots (23\cdot a)$$

$$y^{(1)} = dx^1/dt = x^2 \dots\dots\dots (23\cdot b)$$

$$\begin{aligned} y^{(2)} &= dx^2/dt \\ &= -J_L^{-1} \{ d_L x^2 + Mgr \sin x^1 + k(x^1, x^3) \} \\ &\dots\dots\dots (23\cdot c) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y^{(3)} &= -J_L^{-1} \{ d_L dx^2/dt + Mgr(\cos x^1) dx^1/dt + (\partial k/\partial x^1) dx^1/dt + (\partial k/\partial x^3) dx^3/dt \} \\ &= -J_L^{-1} \{ d_L f^2(x^1, x^2, x^3) + Mgr(\cos x^1) x^2 + (\partial k/\partial x^1) x^2 + (\partial k/\partial x^3) x^4 \} \dots\dots\dots (23\cdot d) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y^{(4)} &= -J_L^{-1} \{ d_L \{ \partial f^2/\partial x^1 \cdot dx^1/dt + \partial f^2/\partial x^2 \cdot dx^2/dt + \partial f^2/\partial x^3 \cdot dx^3/dt \} - Mgr(\sin x^1)(dx^1/dt) x^2 \\ &+ Mgr(\cos x^1)(dx^2/dt) + \partial(\partial k/\partial x^1) x^2/\partial x^1 \cdot dx^1/dt + \partial(\partial k/\partial x^1) x^2/\partial x^2 \cdot dx^2/dt + \partial(\partial k/\partial x^1) x^2/\partial x^3 \cdot dx^3/dt \\ &+ \partial(\partial k/\partial x^3) x^4/\partial x^1 \cdot dx^1/dt + \partial(\partial k/\partial x^3) x^4/\partial x^3 \cdot dx^3/dt + \partial(\partial k/\partial x^3) x^4/\partial x^4 \cdot dx^4/dt \} \\ &= -J_L^{-1} \{ d_L \{ \partial f^2/\partial x^1 \cdot x^2 + \partial f^2/\partial x^2 \cdot f^2(x^1, x^2, x^3) + \partial f^2/\partial x^3 \cdot x^4 \} - Mgr(\sin x^1)(x^2)^2 \\ &+ Mgr(\cos x^1) f^2(x^1, x^2, x^3) + \partial^2 k/\partial x^1 \partial x^1 \cdot (x^2)^2 + \partial k/\partial x^1 \cdot f^2(x^1, x^2, x^3) + 2 \cdot \partial^2 k/\partial x^1 \partial x^3 \cdot x^2 x^4 \\ &+ \partial^2 k/\partial x^3 \partial x^3 \cdot (x^4)^2 + \partial k/\partial x^3 \{ f^4(x^1, x^3, x^4) + J_M^{-1} u \} \} \dots\dots\dots (23\cdot e) \end{aligned}$$

したがって $n=4$ で初めて入力 u が現れているので条件式(9\cdot a)が満たされていることがわかる。さらに $\partial k/\partial x^3 \cdot J_M^{-1}$ が非零であれば条件式(9\cdot b)も満たされる。一般に $k(x^1, x^3) = k(x^1 - x^3)$ のように k は $x^1 - x^3$ の関数なので改めて $k = k(z)$ とすれば

$$\partial k/\partial x^3 = -(dk(z)/dz)_{z=0} \dots\dots\dots (24)$$

なので k の原点での傾きが非零であればよいがこれは物理的には(一次近似の)ばね定数なのでこの条件は一般に成り立つ。定数 a_0, a_1, a_2, a_3 を式(20)の解がすべて複素平面の左半平面にくるようにすると式(10), (13), (14), (23)より式(16), (19)の制御則の $f_p(x), g_p(x)$ は

$$\begin{aligned} f_p(x) &= L_f^4 h(x) - a_0 L_f^3 h(x) - a_1 L_f^2 h(x) - a_2 L_f h(x) - a_3 h(x) \\ &= -J_L^{-1} \{ d_L \{ \partial f^2/\partial x^1 \cdot x^2 + \partial f^2/\partial x^2 \cdot f^2(x^1, x^2, x^3) + \partial f^2/\partial x^3 \cdot x^4 \} - Mgr \cdot \sin x^1 \cdot (x^2)^2 \\ &+ Mgr \cdot \cos x^1 \cdot f^2(x^1, x^2, x^3) + \partial^2 k/\partial x^1 \partial x^1 \cdot (x^2)^2 + \partial k/\partial x^1 \cdot f^2(x^1, x^2, x^3) \\ &+ 2 \cdot \partial^2 k/\partial x^1 \partial x^3 \cdot x^2 x^4 + \partial^2 k/\partial x^3 \partial x^3 \cdot (x^4)^2 + \partial k/\partial x^3 \cdot f^4(x^1, x^3, x^4) \} \\ &+ a_0 J_L^{-1} \{ d_L f^2(x^1, x^2, x^3) + Mgr \cdot \cos x^1 \cdot x^2 + \partial k/\partial x^1 \cdot x^2 + \partial k/\partial x^3 \cdot x^4 \} \\ &+ a_1 J_L^{-1} \{ d_L x^2 + Mgr \cdot \sin x^1 + k(x^1, x^3) \} - a_2 x^2 - a_3 x^1 \dots\dots\dots (25) \end{aligned}$$

$$g_p(x) = L_g L_f^3 h(x) = \partial k / \partial x^3 \cdot J_M^{-1} \dots\dots\dots (26)$$

で与えられる。

数値例 式(1)のモデルで $J_L=10$, $d_L=0.01$, $Mgr=98$, $J_M=10$, $d_M=0.01$, 弾性力の非線形特性が

$$k(\theta_L, \theta_M) = k_1(\theta_L - \theta_M)^3 + k_2(\theta_L - \theta_M) \dots\dots\dots (27)$$

$$k_1=100, k_2=200$$

とすると

$$\partial k / \partial x^3 = -3k_1(x^1 - x^3)^2 - k_2 \dots\dots\dots (28)$$

であるので $\partial k / \partial x^3 \cdot J_M^{-1}$ が非零となり条件式(9・b)が満たされる。モデルを $y_m = \sin(\pi/3)t$ としたとき上述の制御則を $a_0=-10$, $a_1=-37$, $a_2=-60$, $a_3=-36$ として適用した結果を図1, 図2に示す。図1は出力 y と目標値 y_m を, 図2は状態 x_1, x_2, x_3, x_4 をプロットしたものである。出力すなわち関節角 θ_L が目標値に漸近的に追従し, すべての状態が有界に保たれていることがわかる。

3. 結 言

柔軟関節を持つ非線形ロボットアームに対してリー微分に基づいた簡易なモデル追従系の設計法を示した。本手法ではシステムから決まるベクトル場がインボルーティブであることを調べる必要はなく出力のリー微分をとるだけでよいので手計算でも制御則を計算できる。柔軟関節を持った式(1)のリンクはニュートンの2階の運動方程式を二つ直列につないだ構成になっているため関節角(位置)を 2×2 回微分することで入力トルクが現れることになる。したがって関節角を出力とすると相対次数=4 となって本文で述べた設計が可能になるわけである。このことから本手法が適用できるマニピュレータのばね関数の非線形特性はかなり広くほとんどすべての場合を含んでいると考えられる。また多リンク系の場合にも本手法は適用可能であることを確認済みである。これらの点についても今後報告する予定である。

付 録

付録A 式(10)で定義される x から z への写像が原点の近傍で微分同相であることを示そう。このこ

図1 目標値および出力

図2 状態変数

とはヤコビアン $\partial z / \partial x$ が原点で正則であることが示されれば陰関数の定理より従う。式(5)の状態方程式に式(16)の状態フィードバックを施した結果の閉ループ系の方程式は

$$\begin{aligned} dx/dt &= f(x) - g(x)(f_p(x)/g_p(x)) \\ &\quad + (1/g_p(x))g(x)v \dots\dots\dots (29\cdot a) \end{aligned}$$

$$y = h(x) \dots\dots\dots (29\cdot b)$$

となる。

$$\begin{aligned} \partial z / \partial x &= \begin{bmatrix} \partial z^1 / \partial x \\ \vdots \\ \partial z^n / \partial x \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \partial h / \partial x \\ \vdots \\ \partial L_f^{n-1} h / \partial x \end{bmatrix} \dots\dots\dots (30) \end{aligned}$$

となるから式(9), (10), (13), (14)に注意して

$$\partial z / \partial x (f(x) - g(x)(f_p(x)/g_p(x))) = \begin{bmatrix} \partial h / \partial x [f(x) - g(x)(f_p(x)/g_p(x))] \\ \partial L_f h / \partial x [f(x) - g(x)(f_p(x)/g_p(x))] \\ \vdots \\ \partial L_f^{n-2} h / \partial x [f(x) - g(x)(f_p(x)/g_p(x))] \\ \partial L_f^{n-1} h / \partial x [f(x) - g(x)(f_p(x)/g_p(x))] \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} L_f h - (f_p/g_p)L_g h \\ L_f^2 h - (f_p/g_p)L_g L_f h \\ \vdots \\ L_f^{n-1} h - (f_p/g_p)L_g L_f^{n-2} h \\ L_f^n h - (f_p/g_p)L_g L_f^{n-1} h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z^2 \\ \vdots \\ z^n \\ a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-2} z^2 + a_{n-1} z^1 \end{bmatrix} = : Az \quad (31)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ & & 0 \\ & & 0 & 1 \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 \end{bmatrix} \quad (32)$$

を得る。同様にして式(9), (14)より

$$\begin{aligned} \partial z / \partial x (g(x)/g_p(x)) &= \\ &= \begin{bmatrix} (1/g_p)L_g h \\ (1/g_p)L_g L_f h \\ \vdots \\ (1/g_p)L_g L_f^{n-2} h \\ (1/g_p)L_g L_f^{n-1} h \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = : b \quad (33) \end{aligned}$$

ここでベクトル場 g の f によるリー微分 $L_f g$ を

$$\begin{aligned} L_f g &:= \partial g / \partial x \cdot f - \partial f / \partial x \cdot g \\ &= (\partial g^i / \partial x^j \cdot f^j - \partial f^i / \partial x^j \cdot g^j) \quad (34) \end{aligned}$$

で定義する。ただし

$$f(x) = [f^1(x), \dots, f^n(x)]^T = (f^i) \quad (35)$$

$$g(x) = [g^1(x), \dots, g^n(x)]^T = (g^i) \quad (36)$$

である。ここではすべてアインシュタイン規約⁽⁴⁾に従ったテンソル記法を用いる。これについては付録Bを参照。このとき

$$L_{ff} g = J L_f g \quad (37)$$

ただし

$$J = \partial z / \partial x = (\partial z^i / \partial x^j) \quad (38)$$

$$Jf = \partial z / \partial x f = (\partial z^i / \partial x^j \cdot f^j) \quad (39)$$

である。式(37)はリー微分とベクトル場(反変ベクトル)の変換が可換であることを示している。式(37)は

$$\begin{aligned} L_{ff} g &= \{ \partial / \partial z^r (\partial z^q / \partial x^p \cdot g^p) \} (\partial z^r / \partial x^s \cdot f^s) \\ &\quad - \{ \partial / \partial z^r (\partial z^q / \partial x^p \cdot f^p) \} (\partial z^r / \partial x^s \cdot g^s) \\ &= \{ (\partial^2 z^q / \partial z^r \partial x^p) g^p + (\partial z^q / \partial x^p) (\partial g^p / \partial z^r) \} \\ &\quad \times (\partial z^r / \partial x^s \cdot f^s) - \{ (\partial^2 z^q / \partial z^r \partial x^p) f^p \\ &\quad + (\partial z^q / \partial x^p) (\partial f^p / \partial z^r) \} (\partial z^r / \partial x^s \cdot g^s) \end{aligned}$$

[ここで $\partial^2 z^q / \partial z^r \partial x^p = \partial (\partial z^q / \partial z^r) / \partial x^p = \partial \delta_r^q / \partial x^p = 0$; $\delta_r^r = 1$ ($q=r$), $\delta_r^q = 0$ ($q \neq r$) に注意]

$$\begin{aligned} &= (\partial z^q / \partial x^p) (\partial g^p / \partial z^r) (\partial z^r / \partial x^s \cdot f^s) \\ &\quad - (\partial z^q / \partial x^p) (\partial f^p / \partial z^r) (\partial z^r / \partial x^s \cdot g^s) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= (\partial z^q / \partial x^p) (\partial g^p / \partial x^s) f^s \\ &\quad - (\partial z^q / \partial x^p) (\partial f^p / \partial x^s) g^s \\ &= (\partial z^q / \partial x^p) (\partial g^p / \partial x^s \cdot f^s - \partial f^p / \partial x^s \cdot g^s) \\ &= J L_f g \quad (40) \end{aligned}$$

より従う。ところで

$$\begin{aligned} \partial z / \partial x (f(x) - g(x)(f_p(x)/g_p(x))) \\ = J(f - (f_p/g_p)g) = Az \quad (41) \end{aligned}$$

$$\partial z / \partial x (g/g_p) = J(g/g_p) = b \quad (42)$$

であったので

$$v = v(x) := f - g(f_p/g_p) \quad (43)$$

$$w = w(x) := g/g_p \quad (44)$$

としておく。

$$L_{Az} b = (\partial b / \partial z) Az - (\partial Az / \partial z) b = -Ab \quad (45)$$

$$\begin{aligned} L_{Az}^2 b &= L_{Az}(-Ab) \\ &= (\partial(-Ab) / \partial z) Az - (\partial Az / \partial z)(-Ab) \\ &= A^2 b \\ &\vdots \quad (46) \end{aligned}$$

一般に

$$L_{Az}^i b = (-1)^i A^i b \quad (47)$$

ところで式(8), (37)より

$$\begin{aligned} J L_f^2 g &= J L_f (L_f g) = L_{ff} (J L_f g) = L_{ff} (L_{ff} J g) \\ &= L_{ff}^2 J g \quad (48) \end{aligned}$$

一般に

$$J L_f^i g = L_{ff}^i J g \quad (49)$$

したがって式(41)–(44)より

$$J L_v^i w = L_{vv}^i J w = L_{Az}^i b = (-1)^i A^i b \quad (50)$$

以上をまとめて

$$\begin{aligned} J[w, L_v w, \dots, L_v^{n-1} w] \\ = [b, -Ab, \dots, (-1)^{n-1} A^{n-1} b] \quad (51) \end{aligned}$$

ところで

$$b = [0, \dots, 0, 1]^T \quad (52 \cdot a)$$

$$Ab = [0, \dots, 0, 1, a_0]^T \quad (52 \cdot b)$$

$$\begin{aligned} A^2 b &= [0, \dots, 0, 1, a_0, a_1 + a_0^2]^T \quad (52 \cdot c) \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$A^{n-1} b = [1, *, \dots, *]^T \quad (52 \cdot d)$$

に注意して式(51)の両辺の行列式をとると

$$\begin{aligned} |J| |w, L_v w, \dots, L_v^{n-1} w| \\ = |b, -Ab, \dots, (-1)^{n-1} A^{n-1} b| \quad (53) \end{aligned}$$

ところが (A, b) は可制御対であるから右辺の行列式は非零である。したがって

$$|J(x)| = |\partial z / \partial x| \neq 0 \quad (54)$$

となって $\partial z/\partial x$ が正則となることが結論できる。

付録 B [テンソル計算におけるアインシュタイン規約⁽⁴⁾]

v^i, w^i : 反変ベクトル

J_j^i : 1 反変 1 共変 1 テンソル

とするとき

$$w^i = \sum_{j=1}^n J_j^i v^j = J_j^i v^j \dots\dots\dots (55)$$

というような記法を用いる。つまり指標が(この場合は j) 上下に対応して一つずつ現れているときはその指標に関して総和をとることにし総和記号 $\sum$ は省略する。例えば式(34)で J_j^i は $\partial g^i/\partial x^j, \partial f^i/\partial x^j$ に対応し、 v^j は g^j, f^j に対応しアインシュタイン規約が用いられている。

文 献

- (1) Brockett, R. W., *Proc. 6th IFAC Congress*, Helsinki (1978), 1115-1120.
- (2) *Colloquium Mathematicum*, XXVI (dedicated to Prof. W. Ślebodziński), Institute of Mathematics, Polish Academy of Sciences (Ślebodziński 教授によるリー微分発見 40 周年記念号), (1972).
- (3) Desoer, C. A. and Vidyasagar, M., *Feedback Systems: Input-Output Properties*, (1975), New York: Academic Press.
- (4) Einstein, A., Die Grundlagen der allgemeinen Relativitätstheorie, *Annalen der Physik*, 49(1916), 769-822.
- (5) Hunt, L. R., Su, R. and Meyer, G., *IEEE Trans. Automat. Control*, AC-28(1983), 24-31.
- (6) Isidori, A., *Nonlinear Control Systems: An Introduction*, (1985), 178, Springer-Verlag.
- (7) Jakubczyk, B. and Respondek W., *Bull. Polish Acad. Sci. Ser. Math. Astronom. Phys.*, 28(1980), 517-522.
- (8) 中川・佐藤, 機論, 56-532, C(1991), 3161-3166.
- (9) 岡本・大須賀・小野, 日本ロボット学会誌, 7-2(1989), 59-62.
- (10) Slotine, J.-J. E. and Li, W., *Applied Nonlinear Control*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, (1990), 216.
- (11) Spong, M. W., *Trans. ASME, J. Dyn. Syst. Meas. Control*, 109(1987), 310-319.
- (12) Su, R., *Systems and Control Letters*, 2(1982), 48-52.
- (13) Tarn, T.-J., Bejczy, A. K., Yun, X. and Li, Z., *IEEE Trans. Robotics Autom.*, 7(1991), 114-122.
- (14) 植竹, 第 30 回自動制御連合講演会予稿集(1987-10), 79-80.