三要素形動吸振器による防振について*

川 島 孝 幸^{*1}Vibration Prevention by a Three-Element Dynamic
Vibration Absorber

Takayuki KAWASHIMA

This paper describes the vibration analysis of a three-element dynamic vibration absorber. The absorber is of one and one-half degrees of freedom and consists of an absorber mass, an absorber spring and an elastically connected damper. The effectiveness of the absorber in reducing the resonance peaks is greater than that of the two-element conventional absorber. The maximum force acting on the absorber spring is comparatively small for the effect of the elastically connected damper. When the main system has no damping, there are three effective fixed points on the amplitude curve of the main mass. Formulae for optimum tuning and damping are derived from a new theory of three fixed points. In the damped main system, the optimum values of the absorber are obtained through the numerical analysis using a Lagrange multiplier. The numerical results are given by the convenient empirical formulae.

Key Words: Resonance, Vibration Analysis, Elastically Connected Damper, Dynamic Vibration Absorber, Optimum Tuning and Damping

1. ま え が き

構造物等の代表的な防振装置として従来から利用されている動吸振器は、吸振器ばねと減衰器を調整要素とする二要素形動吸振器⁽¹⁾である。これまでに報告されている動吸振器は、制振効果の向上を期待した改良形^{(2)~(4)}が多いが、共振時に比較的大きな力が作用する吸振器ばねについて、その強度問題も考慮した研究⁽⁵⁾は少ない。

図1に示す強制振動系は、2自由度半の自由度を持ち、副振動系の吸振器ばね、減衰器およびそれに連結された減衰器ばねを調整要素とすれば、三要素形動吸振器を構成している。副振動系に装置されたばね付き減衰器⁽⁶⁾により、制振効果の向上とともに吸振器ばねに作用する力の軽減が期待される。しかし、この動吸振器の最適調整、防振性能に関する資料は見当たらない。

本研究では、図1の三要素形動吸振器について、その最適調整法を示し、防振性能を二要素形動吸振器と比較し、ばね付き減衰器による効果を検討している。

主振動系に減衰がないとき、主振動系の共振曲線には減衰に無関係な定点が3点現われる。Den Hartogの2定点による調整理論を拡張し、3定点による調整理論を試みている。主振動系の減衰にかかわらず、三要素形動吸振器を調整する方法として、ラグランジェ未定乗数法を利用した最適調整法⁽⁴⁾を試みている。その解析結果は、定点理論で求められた式を利用して、最適値を推算する実用近似式にまとめた。

2. 基 礎 式

三要素形動吸振器を構成する図1の振動系の運動方程式は、次のように書ける。

図1 三要素形動吸振器の原理図

* 平成3年7月11日 第33回構造強度に関する講演会において講演, 原稿受付 平成3年9月24日.

*1 正員, 日本大学理工学部 (〒274 船橋市習志野台 7-24-1).

$$\begin{aligned}
 m_1 \ddot{x}_1 + c_1 \dot{x}_1 + (k_1 + k_2 + k_3)x_1 \\
 - k_2 x_2 - k_3 x_3 &= P_0 e^{j\omega t} \\
 m_2 \ddot{x}_2 + c_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_3) + k_2 (x_2 - x_1) &= 0 \\
 c_2 (\dot{x}_3 - \dot{x}_2) + k_3 (x_3 - x_1) &= 0
 \end{aligned}
 \quad \dots\dots\dots (1)$$

この系の定常解を $x_1 = X_1 e^{j\omega t}$, $x_2 = X_2 e^{j\omega t}$, $x_3 = X_3 e^{j\omega t}$ と置くと、主振動系の応答倍率は次のように求められる。

$$\frac{X_1}{x_{st}} = \sqrt{\frac{C^2 + D^2}{A^2 + B^2}} \quad \dots\dots\dots (2)$$

相対変位 $x_{21}(=x_2-x_1)$ と $x_{31}(=x_3-x_1)$ の応答倍率 X_{21}/x_{st} と X_{31}/x_{st} は

$$\frac{X_{21}}{x_{st}} = \sqrt{\frac{E^2 + F^2}{A^2 + B^2}} \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$\frac{X_{31}}{x_{st}} = \sqrt{\frac{E^2}{A^2 + B^2}} \quad \dots\dots\dots (4)$$

ここで、 $A=2Hf_d^2g(f^2-g^2)+2fhg\{(1-g^2)(f^2+f_d^2-g^2)-\mu g^2(f^2+f_d^2)\}$, $B=(1-g^2)(f^2-g^2)f_d^2-\mu f^2f_dg^2-4Hhfg^2(f^2+f_d^2-g^2)$, $C=2fhg(f^2+f_d^2-g^2)$, $D=(f^2-g^2)$, $E=2fhg^3$, $F=f_d^2g^2$. 固有振動数を $\omega_1=\sqrt{k_1/m_1}$, $\omega_2=\sqrt{k_2/m_2}$, $\omega_3=\sqrt{k_3/m_2}$, 臨界減衰係数を $c_{c1}=2m_1\omega_1$, $c_{c2}=2m_2\omega_2$ とすると、式中の無次元量は、質量比 $\mu(=m_2/m_1)$, 主振動系の減衰比 $H(=c_1/c_{c1})$, 固有振動数比 $f(=\omega_2/\omega_1)$, $f_d(=\omega_3/\omega_1)$, 副振動系の減衰比 $h(=c_2/c_{c2})$, 強制振動数比 $g(=\omega/\omega_1)$ である。

3. 調 整 1

3.1 最適振動数比 主振動系が無減衰の場合、主振動系の応答倍率の式(2)は次の形式に書ける。

$$\frac{X_1}{x_{st}} = \sqrt{\frac{C_0^2 h^2 + D_0^2}{A_0^2 h^2 + B_0^2}} \quad \dots\dots\dots (5)$$

この形式から、主振動系の応答曲線には減衰比 h に無関係な定点がある。図2の例のように、三要素形動吸振器では減衰比 h に無関係な点が P, Q, R の3点現れ、これらの点の座標は調整要素 f, f_d の値に依存している。式(5)から、この3定点では、次の関係を書くことができる。

$$(C_0/A_0) = \pm(D_0/B_0) \quad \dots\dots\dots (6)$$

式(6)が+符号をとるとき、 $g=0$ となる。 $g=0$ では減衰力の作用がない。式(6)が-符号を取るとき、P, R, Q 点の横座標を与える次の方程式となる。

$$\begin{aligned}
 g^6 - \{(f^2 + f_d^2) + (1 + f^2 + \mu f^2) \\
 + (1/2)\mu f_d^2\}g^4 + \{f^2 + (f^2 + f_d^2)(1 + f^2 \\
 + \mu f^2)\}g^2 - f^2(f^2 + f_d^2) = 0
 \end{aligned}
 \quad \dots\dots\dots (7)$$

また、式(6)が-符号をとるとき、定点の縦座標を与える簡単な式

$$(X_1/x_{st}) = (C_0 + D_0)/(A_0 - B_0) \quad \dots\dots\dots (8)$$

を選ぶ。P, R 点の横座標を g_P, g_R として、P, R 点の縦座標が等しいとすると、次の式が求められる。

$$f^2 + (1/2)f_d^2 = 1/(1+\mu) \quad \dots\dots\dots (9)$$

式(9)を用いると、式(7)は次のようになる。

$$\begin{aligned}
 \left\{g^2 - \frac{1}{1+\mu}\right\} \left\{g^4 - 2g^2 + \frac{1}{1+\mu} - \frac{(1+\mu)f_d^4}{4}\right\} \\
 = 0
 \end{aligned}
 \quad \dots\dots\dots (10)$$

この方程式を解くと、

$$g_{P,R}^2 = 1 \mp \sqrt{\frac{\mu}{1+\mu} + \frac{(1+\mu)f_d^4}{4}} \quad \dots\dots\dots (11)$$

$$g_Q^2 = 1/(1+\mu) \quad \dots\dots\dots (12)$$

式(11)で-符号をとると P 点、+符号をとると R 点の横座標を与える。P, R 点および Q 点の縦座標は、

$$(X_1/x_{st})_{P,R} = 2/(1+\mu)f_d^2 \quad \dots\dots\dots (13)$$

$$(X_1/x_{st})_Q = (1+\mu)^2 f_d^2 / 2\mu \quad \dots\dots\dots (14)$$

P, R 点と Q 点の縦座標が等しいとすると、固有振動数比 f_d の最適値は、

$$f_{do}^2 = \frac{2}{1+\mu} \sqrt{\frac{\mu}{1+\mu}} \quad \dots\dots\dots (15)$$

さらに、式(9)から固有振動数比 f の最適値は、

$$f_o^2 = \frac{1}{1+\mu} \left(1 - \sqrt{\frac{\mu}{1+\mu}}\right) \quad \dots\dots\dots (16)$$

固有振動数比を最適値 f_o, f_{do} に調整すると、P, Q, R 点が最適減衰比を求めるのに都合のよい定点となる。定点 P, Q, R の縦座標 η_o は、

$$\eta_o = \sqrt{(1+\mu)/\mu} \quad \dots\dots\dots (17)$$

横座標は、

$$g_{P,R}^2 = 1 \mp \sqrt{1 - \frac{1}{(1+\mu)^2}} \quad \dots\dots\dots (18)$$

$$g_Q^2 = 1/(1+\mu) \quad \dots\dots\dots (19)$$

式(18)で、-符号をとると P 点、+符号をとると R 点の横座標を与える。

3.2 最適減衰比 定点で応答曲線の傾斜を零と

図2 共振曲線の定点 P, Q, R

する条件から減衰比を求めると、次式を得る。

$$h_P^2 = \mu(1+x_1)(x_2-x_3-1)\{1+\mu+\sqrt{\mu(2+\mu)}\} \quad \dots\dots\dots (20)$$

$$h_Q^2 = \mu(1-x_1) \quad \dots\dots\dots (21)$$

$$h_R^2 = \mu(1+x_1)(x_2+x_3-1)\{1+\mu-\sqrt{\mu(2+\mu)}\} \quad \dots\dots\dots (22)$$

ただし、 $x_1 = \sqrt{\mu/(1+\mu)}$, $x_2 = 4(1+\mu)^2 - 2(3+2\mu) \times \sqrt{\mu(1+\mu)}$, $x_3 = 2(1+2\mu) \times \sqrt{(1+\mu)(2+\mu)} - 4(1+\mu)\sqrt{\mu(2+\mu)}$.

一次、二次共振点高さを等しくする減衰比を最適値と考える。二要素形動吸振器では、2 定点を利用して求めた減衰比の単純平均値が一次、二次共振点高さをほぼ等しくしている。しかし、三要素形動吸振器では、重み付き平均のほうが都合よい。図3の各応答曲線は、固有振動数比を最適値 f_0, f_d として、減衰比 h を h_P (一点鎖線), h_Q (実線), h_R (破線) と変えたものである。また、図4は、質量比 μ と一次と二次共振点高さのその平均値からの偏差 ε の関係を、各減衰比について調べたものである。これらは、各減衰比の最適値に対する精度が異なっていて、単純平均よりもむしろ重

み付き平均のほうが適切であることを示している。そこで、その形式を

$$h_o^2 = \frac{wh_P^2 + 2h_Q^2 + wh_R^2}{2(1+w)} \quad \dots\dots\dots (23)$$

図4を参考に、式中の重み w を

$$w = \mu/(1-\mu) \quad \dots\dots\dots (24)$$

とすると、定点理論による最適減衰比 h_o が次のように求まる。

$$h_o^2 = \mu(1-\mu)(1-x_1) + \mu^2(1+x_1) \times \{(1+\mu)(x_2-1) - x_3\sqrt{\mu(2+\mu)}\} \quad \dots\dots\dots (25)$$

図5は、定点理論により調整されたときの応答曲線の例である。重み付き平均を利用した最適減衰比により、一次、二次共振点高さは大体等しく調整されている。定点の高さは共振点よりやや低い位置にあることから、二要素形のように、定点の高さを与える式(17)で共振点高さを近似するにはやや難がある。

3.3 相対振幅について 図6に示すように、相対振幅 X_{21} の応答曲線にも減衰比 h に無関係な3個の点 P^*, Q^*, R^* が現れる。動吸振器が定点理論により最適調整されるとき、各定点の縦座標は等しく、その値は次の式で求められる。

図3 定点を水平に過る共振曲線

図5 調整1による共振曲線

図4 質量比と一次、二次共振点高さの偏差

図6 相対振幅 X_{21}/X_{st} 曲線

$$\eta_{21} = (1 + \mu)/\mu \quad \dots\dots\dots (25)$$

図7は、相対振幅 X_{31} の応答曲線である。式(4)から明らかなように、相対振幅 X_{31} の応答曲線には減衰比 h に無関係な点は現れない。

4. 調 整 2

主振動系の減衰にかかわらず、3個の調整要素を持つ動吸振器を調整するため、数値解析による最適調整を行う。図8のように、応答曲線の一次共振点の横座標を g_1 、縦座標を η_1 、二次共振点の横座標を g_2 、縦座標を η_2 として、一次、二次共振点高さの平均値を $\bar{\eta}$ 、差を S とする。

$$\bar{\eta}(f, f_d, h) = (\eta_1 + \eta_2)/2 \quad \dots\dots\dots (26)$$

$$S(f, f_d, h) = \eta_1 - \eta_2 \quad \dots\dots\dots (27)$$

そこで、 $S=0$ を条件として、 $\bar{\eta}$ が最小になるよう f 、 f_d 、 h を調整する。すなわち、ラグランジェ未定乗数を λ とすると、次の目的関数

$$W(f, f_d, h, \lambda) = \bar{\eta} + \lambda S \quad \dots\dots\dots (28)$$

を得るから、調整の条件式は次のように書ける。

$$\frac{\partial W}{\partial f} = 0, \frac{\partial W}{\partial f_d} = 0, \frac{\partial W}{\partial h} = 0, \frac{\partial W}{\partial \lambda} = 0 \quad \dots\dots\dots (29)$$

$\mu=0.02 \sim 0.3$ 、 $H=0 \sim 0.2$ の範囲について、式(29)をニュートン法により数値計算した。

図9の応答曲線は、数値解析による調整2と定点理

図7 相対振幅 X_{31}/X_{st} 曲線

図8 減衰を有する主振動系の共振曲線

論による調整1を比較した例である。その調整値を表1に示す。調整2による共振曲線の特徴は、 f_d 、 h の値が調整1のそれより大きな値に調整されるため、一次、二次共振点が接近し、ノッチ部が浅いことにある。 f_d 、 h にみられる調整1と調整2の値の差は調整条件のずれによる。調整1と調整2の共振点高さに大きな差が見られないのは、調整1による f の値が調整2の値に対して2%未満の精度で調整されるためで、 f_d 、 h の値のずれに対する共振点高さへの影響は少ない(図15、16参照)。

5. 解 析 結 果

(1) 最適調整値 最適調整値を図10に、それに対応する共振倍率を図11に示す。図11の破線は二要素形動吸振器を用いた場合の共振倍率で、式(28)と類似な目的関数を用いて最適調整を行っている。この

表1 調整1と2による調整値

	Tune No	μ	H	f	f_d	h
a	1	0.1	0	0.797	0.74	0.279
b	2	0.1	0	0.784	0.811	0.303
c	1	0.2	0	0.702	0.825	0.375
d	2	0.2	0	0.691	0.906	0.388

図9 調整1, 2による共振曲線

図10 質量比と最適調整値

図から、ばね付き減衰器を用いた三要素形動吸振器のほうが制振効果が高いと言える。これらの計算結果は、調整1から得られた式を利用して、次のような実用近似式の形式にまとめた。

$$f_{opt} = 0.984 f_o - (0.48 + 1.3 \mu - 3 \mu^2) H \quad \cdots (30)$$

$$f_{dopt} = 1.1 f_{do} + (0.15 - 4.2 \mu + 6 \mu^2) H \quad \cdots (31)$$

$$h_{opt} = h_o + 0.031 - 0.05 \mu - 0.18 \mu^2 + (0.3 - 0.18 \mu - 0.1 \mu^2) H \quad \cdots (32)$$

$$\eta_{opt} = \{(\eta_o)^{-1} - 0.042 - 0.29 \mu + 0.52 \mu^2 + (1.8 - 2 \mu + 1.8 \mu^2) H\}^{-1} \quad \cdots (33)$$

これらの式は、 $\mu = 0.05 \sim 0.3$, $H = 0 \sim 0.2$ の範囲について、2% 以下の精度で最適値を推算する。

(2) 吸振器ばねについて ばね力は加振力の振幅 P_o により無次元化される。図 12 は質量比と吸振器ばね k_2 に作用する無次元ばね力の最大値 N_{21} との関係を示す。図中には、二要素形動吸振器の吸振器ばねに作用する無次元ばね力を破線で示した。一方、図 13 は、減衰器ばね k_3 に作用する無次元ばね力の最大値 N_{31} を示した。二要素形動吸振器で三要素形の減衰器ばねの力に対応しているのは減衰器に作用する力なので、それを破線で表した。三要素形動吸振器は、ばね k_3 を連結した減衰器を利用することで、吸振器ばね

k_2 に作用する力が相当軽減されている。しかし、減衰器側の力は増加している。例えば、 $H = 0$ のときに質量比が $\mu > 0.2$ だと、吸振器ばねよりも減衰器ばねに作用する力のほうが大きな値となる。

吸振器ばね、減衰器ばねに作用する力 N_{21} , N_{31} についての計算結果は、式 (21) を利用して次のような近似式にまとめた。

$$N_{21} = \mu f_{opt}^2 \{ (1.04 \eta_{21})^{-1} + (0.43 + 3.2 \mu - 5.7 \mu^2) H \}^{-1} \quad \cdots (34)$$

$$N_{31} = \mu f_{dopt}^2 \{ (0.66 \eta_{21})^{-1} - 0.0087 + 0.094 \mu + 0.38 \mu^2 + (0.674 + 6.1 \mu - 11 \mu^2) H \}^{-1} \quad \cdots (35)$$

これらの式は、 $\mu = 0.05 \sim 0.3$, $H = 0 \sim 0.2$ の範囲で 3% 以下の精度でばね力を推算する。

(3) 調整値の変動について 図 14, 15, 16 は、調整値が表 2 に示す最適値から変動したときに、共振倍率に及ぼす影響を調べたものである。各線のこう配が調整値変動に対する感度を表すと考えられる。三要素形動吸振器の仕組みは二要素形動吸振器のそれより複雑であるが、変動に対する影響は二要素形動吸振器と大差なく、変動に対する重要な要素も吸振器ばねである。三要素形動吸振器のほうが制振効果が高いので、

図 11 質量比と共振点高さ

図 13 質量比と減衰器ばねのばね力

図 12 質量比と吸振器ばねのばね力

図 14 固有振動数比 f の変動と共振倍率

表 2 三要素形動吸振器と二要素形動吸振器の最適調整値

	No	μ	H	f	f_d	h
Three-element	1	0.05	0.05	0.828	0.713	0.245
	2	0.15	0.05	0.706	0.859	0.365
Two-element	3	0.05	0.05	0.935	—	0.141
	4	0.15	0.05	0.845	—	0.229

図 15 固有振動数比 f_d の変動と共振倍率

二要素形と同程度の制振効果を三要素形に期待するならば、三要素形動吸振器のほうが調整値変動に対する許容範囲を広くする。

6. む す び

本研究では、三要素形動吸振器について、最適調整法を示し、防振性能について検討した。まとめると、

(1) 三要素形動吸振器について、二要素形動吸振器と比較してみると、ばね付き減衰器の効果により制振性能が向上し、吸振器ばねに作用する力が相当軽減されている。

(2) 三要素形動吸振器の仕組みは二要素形動吸振器より複雑であるが、調整値の変動に対する性質は、二要素形動吸振器とあまり変わらない。二要素形動吸振器と同程度の制振効果を期待する場合、制振性能が高い三要素形動吸振器のほうが、調整値の変動に対す

図 16 減衰比 h の変動と共振倍率

る許容範囲を広くしている。

(3) 主振動系に減衰がないとき、3 定点による調整理論を展開して、三要素形動吸振器の最適調整値を与える式が示された。共振曲線が定点を水平に過ぎる際の減衰比は、それぞれ最適値に対して精度を異にしているため、単純平均でなく、重み付き平均により最適減衰比を得た。

(4) ラグランジェ未定乗数法を用いた数値解析法が三要素形動吸振器の最適調整にも有効であることが示された。解析結果は最適調整値、吸振器ばねおよび減衰器ばねのばね力を推算する実用近似式にまとめた。

文 献

- (1) Den Hartog, J. P., *Mechanical Vibrations*, (1947), 123, McGraw-Hill.
- (2) Srinivasan, A. V., *Trans. ASME, Ser. B*, 91-1(1969), 282.
- (3) 岩浪・背戸, 機論, 50-449, C(1984), 44.
- (4) 川島・ほか 3 名, 機論, 56-531, C(1990), 2861.
- (5) 池田・五百井, 機論, 43-369(1977), 1707.
- (6) Harris, C. M. and Crede, C. E., *Shock and Vibration Handbook*, (1976), 30-3, McGraw-Hill.