剛体多体系の運動方程式のラグランジュ形式による定式化*

土屋 和 雄^{*1}, 渡 辺 誠 治^{*2}, 山 田 克 彦^{*3}Lagrangian Formulation of the Mechanics
of Rigid Bodies Connected by Rotary Joints

Kazuo TSUCHIYA, Seiji WATANABE and Katsuhiko YAMADA

This paper deals with a mathematical model of the mechanics of rigid bodies connected by rotary joints. The method is based on the Lagrangian formulation. The kinetic energy is written in terms of the angular velocities. The expression for the kinetic energy has a homogeneous quadratic form in the angular velocity, the coefficient matrix of which is given by the products of triangular matrices. The equations of motion are derived from the Lagrange's equations for the quasi-coordinates, the angular velocities of the bodies. The equations of motion become recursive forms due to the structure of the expression of the kinetic energy of the system. The algorithm of the inverse dynamics, which follows from the equations of motion, becomes also a recursive form like the algorithm based on the Newton-Euler equations of motion. Since the algorithm is based on the Lagrangian formulation, it can be extended to more complex systems that include flexible bodies, the constraints of which limit the motion of the systems, and so on.

Key Words: Manipulator, Lagrangian Formulation, Quasi-Coordinates, Inverse Dynamics

1. は じ め に

複雑な構造をした剛体力学系の運動を制御することが、重要な技術課題となっている。例えば、マニピュレータの手先を与えられた軌道に沿って動かす軌道制御、あるいは多脚の歩行機械を安定に移行させる歩行制御等はその代表例である。これらの運動制御は、多くの場合あらかじめ求められた対象に関する運動方程式に基づき、必要な制御力を加える計算トルク法と呼ばれるフィードフォワード制御が、その基本となっている⁽¹⁾。そのため運動制御のための運動方程式は、この種の計算が高速で実行できる構造（漸化形式）になっていることが望ましい。本論文では回転自由度を持つ関節で結合された剛体リンクから構成された力学系の漸化形の運動方程式の定式化に関するものである。従来、この種の力学系の運動方程式は Newton-Euler 法を用いて定式化することが行われてきた⁽²⁾。この手法によれば運動方程式を漸化形式で定式化することができて、与えられた運動を行わせるのに必要な制御力

の計算（逆動力学計算）が、その関節の数を N とした時、 $150N$ 程度の乗、加算で行うことができる。しかし Newton-Euler 法は、基本的に力の釣合いを逐一数え上げる初等的な方法に基づいているため、より一般的な状況への拡張は必ずしも容易ではない。例えば、マニピュレータの操作が高速になれば、各リンクの構造変形も考慮した運動方程式の定式化が必要となる。また、歩行機械の場合、歩行に従って運動学的な拘束が変化する。さらに宇宙ロボットの場合、マニピュレータの運動と宇宙機本体の運動が干渉して状況を複雑にする。このようなより一般的な状況に対しても拡張可能なように一般的な原理に基づいた運動方程式の定式化が必要である。力学系の運動方程式の定式化の原理としてはダランベール原理のような微分原理とハミルトン原理のような積分原理に基づくものがある。微分原理に基づく定式化の一つである Kane の法を用いてマニピュレータの運動方程式の定式化が行われている⁽³⁾。しかし、漸化形の方程式系は得られていない。一方、積分原理に基づく定式化が Lagrange 形式を用いて行われており、漸化形の運動方程式が得られている⁽⁴⁾。しかし、その逆動力学計算に必要な計算回数は Newton-Euler 法に基づく定式化に比べ数倍多い。ここでは Lagrange 形式を用いて剛体リンク系の漸化形

* 平成3年6月8日 ロボティクス・メカトロニクス講演会において講演、原稿受付 平成3年9月9日。

^{*1} 正員、大阪大学工学部（〒565 吹田市山田丘2-1）。

^{*2} 大阪大学大学院。

^{*3} 正員、三菱電機(株)（〒661 尼崎市塚口本町8-1-1）。

の運動方程式の定式化を行い、得られた方程式に基づいて逆動力学計算アルゴリズムを導く。このアルゴリズムによる逆動力学計算に必要な計算回数はほぼ Newton-Euler 法に基づくものに等しい。この定式化の特徴は次のとおりである。一般に剛体の運動は角速度を用いることにより簡便な形で表現することができる。そこで、状態変数として各リンクの相対角速度を用いる。この時、系の運動エネルギーは角速度の二次形式として表され、その係数マトリックスはリンクの質量中心の並進運動と質量中心回りの回転運動に関する二つのマトリックスに分けられ、おのおののマトリックスは角マトリックスの積の形で表すことができる。各状態変数に対する運動方程式は Lagrange 方程式によって求められるが、ここで状態変数として用いた角速度は擬座標であるので、擬座標に対する Lagrange 方程式によって運動方程式が導出される⁽⁵⁾。得られた運動方程式は係数マトリックスの構造を反映して、漸化形の方程式系となる。また、Lagrange の運動方程式は、ある運動量の時間発展を与える方程式を与えるが、ここで得られる運動方程式は、部分リンク系の持つ角運動量の時間発展という明確な物理的意味を持つ方程式系が得られる。さらに方程式の導出が Lagrange 形式に基づいているためリンクの柔軟性の導入あるいは種々の運動学的な拘束条件の導入等が容易に行うことができる。本論文では運動方程式の定式化とともに逆動力学計算のアルゴリズムも導出し、他のアルゴリズムとの比較も行っている。

2. 運動方程式の導出

図1に示すような、回転自由度を持つジョイントで結合された N 本のリンクにより構成されたマニピュレータを考える。便宜上、慣性空間をリンク0とし、ベース側からエンドエフェクタ側に向かって、各リンク

図1 回転ジョイントで結合されたリンクシステム

に 1, 2, 3, ... と番号を付ける。ジョイントも同様にし、ベース側からエンドエフェクタ側に向かって、1, 2, 3, ... と番号を付ける。ここで、慣性空間の原点をジョイント0、エンドエフェクタをジョイント $N+1$ とする。

リンク i に固定した座標系としてジョイント i に原点 C_i を持つ単位ベクトル系 (a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}) を定義する。これらの単位ベクトルを用いて次の列マトリックス $[a_i]$ を定義する。

$$[a_i]^T = [a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}]$$

各リンクに対して次のような記号を定義する。

r_i : ジョイント C_i からジョイント C_{i+1} への距離ベクトル

R_i : ジョイント C_i からリンク i の質量中心への距離ベクトル

ρ_i : リンク i の質量中心からリンク i の任意点への距離ベクトル

ω_{i-1} : リンク i のリンク $(i-1)$ に対する相対角速度

A_{i-1} : $[a_{i-1}]$ 座標系から $[a_i]$ 座標系への座標変換行列

ベクトルに対する $\dot{}$ は慣性系における時間微分を表す。各ベクトルを次のような座標表現をする。

$$r_i = [a_i]^T r_i$$

$$R_i = [a_i]^T R_i$$

$$\rho_i = [a_i]^T \rho_i$$

$$\omega_{i-1} = [a_i]^T \omega_{i-1}$$

ベクトル r_i のベクトル積演算 $r_i \times r_j$ を $\tilde{r}_i^T r_j$ と表す。 $\tilde{r}_i$ の座標系 $[a_i]$ での表現は次のようになる。

$$\tilde{r}_i = \begin{bmatrix} 0 & r_3 & -r_2 \\ -r_3 & 0 & r_1 \\ r_2 & -r_1 & 0 \end{bmatrix}$$

リンク i における任意点 P_i の C_0 からの距離ベクトル x_i は、次式で与えられる (図1)。

$$x_i = \sum_{j=0}^{i-1} r_j + R_i + \rho_i \quad \dots\dots\dots (1)$$

点 P_i における速度 v_i は、次式で与えられる。

$$v_i = \frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^i \omega_{j-1} \times \left(\sum_{k=0}^{j-1} r_k + R_j + \rho_j \right) + \dot{r}_0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

ここで、次の関係を用いた。

$$\frac{d}{dt} [a_j]^T = \omega_{j0} \times [a_j]^T,$$

$$\omega_{j0} = \sum_{l=1}^j \omega_{l-1}, \quad \sum_{j=0}^i \sum_{l=1}^j = \sum_{l=1}^i \sum_{j=l}^i$$

得られた速度 v_i を次のように整理して表す。

$$v_i = (\mathcal{L}_i + l_i)\omega \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$\mathcal{L}_i^T = \begin{bmatrix} I_3 \\ \sum_{j=1}^{i-1} \tilde{r}_j^T + \tilde{R}_i^T \\ \vdots \\ \tilde{R}_i^T \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, l_i^T = \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{\rho}_i^T \\ \vdots \\ \tilde{\rho}_i^T \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \omega = \begin{bmatrix} \dot{r}_0 \\ \omega_{10} \\ \vdots \\ \omega_{i-1} \\ \vdots \\ \omega_{N-1} \end{bmatrix}$$

ここで $\mathcal{L}_i$, l_i はそれぞれ点 P_i の速度に対するリンク i の質量中心の並進運動および質量中心回りの回転運動の寄与分を表している。

全系の運動エネルギー T は次式で与えられる。

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \langle v_i^T v_i \rangle \quad \dots\dots\dots (4)$$

ここで $\langle * \rangle_i = \int * dm_i$ (リンク i にわたる積分)

式(3)を式(4)に代入して、全系の運動エネルギー T は次式で与えられる。

$$T = \frac{1}{2} \omega^T H^T (\mathcal{L}^T M \mathcal{L} + \mathcal{J}) H \omega \quad \dots\dots\dots (5)$$

ここで、

$$H = \begin{bmatrix} I_3 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & I_3 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & I_3 & \cdots & I_3 \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} m_1 I_3 & & \\ & \ddots & \\ & & m_N I_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{L} = \begin{bmatrix} I_3 & \tilde{R}_1 & \cdots & 0 \\ I_3 & r_1 & \tilde{R}_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ I_3 & \tilde{r}_1 & \tilde{r}_{N-1} & \tilde{R}_N \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{J} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_1 & & \\ \vdots & \ddots & & \\ 0 & 0 & & J_N \end{bmatrix}$$

J_i : リンク i の質量中心回りの慣性モーメント, I_3 : 3×3 単位マトリックス, m_i : リンク i の質量。

式(5)から明らかなように運動エネルギー T は、変数 ω の二次式で表され、その係数マトリックスは各リンクの質量中心の並進運動に関するものと、質量中心回りの回転運動に関するものに分離される。

一般化速度 ω に対する一般化運動量 $\hat{L}$ は次式で与えられる。

$$\hat{L} = \left(\frac{\partial T}{\partial \omega^T} \right) + \left(\frac{\partial T}{\partial \omega} \right)^T$$

$$= H^T (\mathcal{L}^T M \mathcal{L} + \mathcal{J}) H \omega \quad \dots\dots\dots (6)$$

ここで、一般化速度 $\dot{r}_0$ に対する一般化運動量は系全体の並進運動量を表す。また一般化速度 ω_{i-1} に対す

る一般化速度は、リンク i から先の部分リンク系のジョイント C_i に関する角速度を表す。

運動量 $\hat{L}$ の各成分は以下のように ω から漸化的に求められる。すなわち、

$$\hat{\omega} = H \omega = \begin{bmatrix} \dot{r}_0 \\ \omega_{10} \\ \vdots \\ \omega_{N0} \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$P = \begin{bmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_N \end{bmatrix} = N \mathcal{L} \hat{\omega} = \begin{bmatrix} m_1 (\tilde{R}_1 \omega_{10} + V_1) \\ \vdots \\ m_N (\tilde{R}_N \omega_{N0} + V_N) \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (8)$$

$$V = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{10} \dot{r}_0 \\ A_{21} (V_1 + \tilde{r}_1 \omega_{10}) \\ \vdots \\ A_{NN-1} (V_{N-1} + \tilde{r}_{N-1} \omega_{N-10}) \end{bmatrix}$$

ここで V_i は、慣性座標系に対するジョイント i の速度を表し、 P_i はリンク i の並進運動量を表している。

$$\hat{L}^{(1)} = \begin{bmatrix} \hat{L}_0^{(1)} \\ \hat{L}_1^{(1)} \\ \vdots \\ \hat{L}_N^{(1)} \end{bmatrix} = \mathcal{L}^T P = \begin{bmatrix} \tilde{P}_1 \\ \tilde{R}_1^T P_1 + r_1^T \tilde{P}_2 \\ \vdots \\ \tilde{R}_N^T P_N \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (9)$$

$$\tilde{P} = \begin{bmatrix} \tilde{P}_1 \\ \vdots \\ \tilde{P}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{01} (P_1 + \tilde{P}_2) \\ \vdots \\ A_{N-1N} P_N \end{bmatrix}$$

ここで $\tilde{P}_i$ は、リンク i から先の部分リンク系の並進運動量を表し、 $\hat{L}_i^{(1)}$ はリンク i から先の部分リンク系の並進運動による一般化運動量を表している。各リンクの質量中心回りの回転による一般化動量 $L^{(2)}$ は次のように与えられる。

$$L^{(2)} = \mathcal{J} \hat{\omega} = \begin{bmatrix} 0 \\ J_1 \omega_{10} \\ \vdots \\ J_N \omega_{N0} \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (10)$$

これらから、一般化運動量 $\hat{L}$ が次のように求められる。

$$\hat{L} = H^T (\hat{L}^{(1)} + L^{(2)}) \quad \dots\dots\dots (11)$$

$$\hat{L} = \begin{bmatrix} \hat{L}_0^{(1)} + L_0^{(2)} \\ \hat{L}_1^{(1)} + L_1^{(2)} + A_{12} \hat{L}_2 \\ \vdots \\ \hat{L}_{N-1}^{(1)} + L_{N-1}^{(2)} + A_{N-1N} \hat{L}_N \\ \hat{L}_N^{(1)} + L_N^{(2)} \end{bmatrix}$$

以上求めた式を順次、時間微分することにより加速度 $\dot{\omega}$ から、一般化運動量の時間微分 $\dot{\hat{L}}$ を漸化的に求めることができる。すなわち、

$$\begin{bmatrix} \ddot{r}_0 \\ \dot{\omega}_{10} \\ \dot{\omega}_{20} \\ \vdots \\ \dot{\omega}_{N0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{r}_0 \\ \dot{\omega}_{10} \\ \dot{\omega}_{21} + \tilde{\omega}_{21} A_{21} \omega_{10} + A_{21} \dot{\omega}_{10} \\ \vdots \\ \dot{\omega}_{NN-1} + \tilde{\omega}_{NN-1} A_{NN-1} \omega_{N-10} \\ + A_{NN-1} \dot{\omega}_{N-10} \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (12)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \\ \vdots \\ \dot{V}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\omega}_{10} V_1 + A_{10} \dot{r}_0 \\ \tilde{\omega}_{21} V_2 + A_{21} (\dot{V}_1 + \tilde{r}_1 \dot{\omega}_{10}) \\ \vdots \\ \tilde{\omega}_{NN-1} V_N + A_{NN-1} (\dot{V}_{N-1} + \tilde{r}_{N-1} \dot{\omega}_{N-10}) \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (13)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{P}_1 \\ \dot{P}_2 \\ \vdots \\ \dot{P}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 (\tilde{R}_1 \omega_{10} + \dot{V}_1) \\ m_2 (\tilde{R}_2 \omega_{20} + \dot{V}_2) \\ \vdots \\ m_N (\tilde{R}_N \omega_{N0} + \dot{V}_N) \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (14)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{P}}_1 \\ \vdots \\ \dot{\tilde{P}}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\omega}_{01} \tilde{P}_1 + A_{01} (\dot{P}_1 + \tilde{P}_2) \\ \vdots \\ \tilde{\omega}_{N-1N} \tilde{P}_N + A_{N-1N} \dot{P}_N \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (15)$$

$$\dot{\hat{L}}^{(1)} = \begin{bmatrix} \dot{\tilde{P}}_1 \\ \tilde{R}_1^T \dot{P}_1 + \tilde{r}_1^T \dot{\tilde{P}}_2 \\ \vdots \\ \tilde{R}_N^T \dot{P}_N \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (16)$$

$$\dot{\hat{L}}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ J_1 \dot{\omega}_0 \\ \vdots \\ J_N \dot{\omega}_{N0} \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (17)$$

$$\dot{\hat{L}} = \begin{bmatrix} \dot{\hat{L}}_0^{(1)} + \dot{\hat{L}}_0^{(2)} \\ \dot{\hat{L}}_1^{(1)} + \dot{\hat{L}}_1^{(2)} + \tilde{\omega}_{12} A_{12} \hat{L}_2 + A_{12} \dot{\hat{L}}_2 \\ \vdots \\ \dot{\hat{L}}_{N-1}^{(1)} + \dot{\hat{L}}_{N-1}^{(2)} + \tilde{\omega}_{N-1N} A_{N-1N} \hat{L}_N \\ + A_{N-1N} \dot{\hat{L}}_N \\ \dot{\hat{L}}_N^{(1)} + \dot{\hat{L}}_N^{(2)} \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (18)$$

一般化運動量 $\hat{L}$ の従う運動方程式は変数 ω に対する Lagrange 方程式として次式で与えられる⁽⁵⁾。

$$\hat{L}_i - \tilde{\omega}_{i0} \hat{L}_i - \tilde{V}_i A_{ii-1} \hat{P}_i = F_i \quad \dots\dots\dots (19)$$

ここで F_i は変数 ω_{ii-1} に対応する一般化力である。

式(19)は次のような物理的意味を持っている。すなわち左辺第1, 2項は運動量 $\hat{L}_i$ の慣性空間における時間変化を与え、第3項はリンク i から先の部分リンク系がジョイント i で並進運動が拘束されていることによる拘束力を表している。また、右辺はジョイント i で加えられるトルクを含む系に加えられる外力による変数 ω_{ii-1} に対する一般化力を表している。式(19)をまとめて次のように表す。

$$\begin{bmatrix} \hat{L}_0 \\ \hat{L}_1 \\ \vdots \\ \hat{L}_N \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & \tilde{\omega}_{10} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \tilde{\omega}_{N0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{L}_0 \\ \hat{L}_1 \\ \vdots \\ \hat{L}_N \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \tilde{V}_1 A_{10} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \tilde{V}_N A_{NN-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{P}_1 \\ \vdots \\ \hat{P}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ \vdots \\ F_N \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (20)$$

3. 一般化力の導出

分布外力 f_i による仮想仕事 δW_{f_i} は次式で与えられる。

$$\delta W_{f_i} = \int f_i^T \delta x_i dm_i \quad \dots\dots\dots (21)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \delta x_i &= (\mathcal{L}_i + l_i) \delta \mathcal{Q} \\ \delta \mathcal{Q}^T &= [\delta r_0^T \delta \mathcal{Q}_{10}^T \cdots \delta \mathcal{Q}_{NN-1}^T] \\ &= [\delta r_0^T \omega_{10}^T \delta t \cdots \omega_{NN-1}^T \delta t] \end{aligned}$$

リンク i に取付けられたモーメント τ_i による仮想仕事 δW_{τ_i} は次式で与えられる。

$$\delta W_{\tau_i} = \tau_i^T \delta \mathcal{Q}_{ii-1} \quad \dots\dots\dots (22)$$

以上から一般化力 F は以下のように与えられる。

$$\begin{aligned} F_0^T &= \sum_{i=1}^N \langle f_i^T \rangle_i \\ F_k^T &= \sum_{i=k}^N \langle f_i^T \rangle_i \left(\sum_{j=k}^{i-1} \tilde{r}_j + \tilde{R}_i \right) \\ &\quad + \sum_{i=k}^N \langle f_i^T \tilde{\rho}_i \rangle_i + \tau_k^T \quad (k=1, \dots, N) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (23)$$

式(23)は次のような行列形式で表される。

$$\begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_N \end{bmatrix} = \mathcal{D} \begin{bmatrix} 1 \\ \tau_1 \\ \tau_2 \\ \vdots \\ \tau_N \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (24)$$

$$\mathcal{D} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N \langle f_i \rangle_i & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \sum_{i=1}^N \left\langle \left(\sum_{j=1}^{i-1} \tilde{r}_j + \tilde{R}_i + \tilde{\rho}_i \right)^T f_i \right\rangle_i & 1 & & & 0 \\ \sum_{i=2}^N \left\langle \left(\sum_{j=2}^{i-1} \tilde{r}_j + \tilde{R}_i + \tilde{\rho}_i \right)^T f_i \right\rangle_i & & 1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ \langle (\tilde{R}_N + \tilde{\rho}_N)^T f_N \rangle_N & 0 & & & 1 \end{bmatrix}$$

4. 逆動力学計算アルゴリズム

2章で導出した式をもとに、次のような逆動力学アルゴリズムが構成される (図2参照)。

表 1 逆動力学計算アルゴリズムの比較

Method	Multiplications	Additions
(1) Newton-Euler's Method		
• Luh ^(*)	$117N - 24$	$103N - 21$
• — ^(*)	$150N - 48$	$131N - 48$
(2) Lagrange's Method ^(*)		
• Uicker/Kahn	$32\frac{1}{2}N^4 + 86\frac{5}{12}N^3 + 171\frac{1}{4}N^2 + 53\frac{1}{8}N - 128$	$25N^4 + 66\frac{1}{3}N^3 + 129\frac{1}{2}N^2 + 42\frac{1}{8}N - 96$
• Waters	$106\frac{1}{2}N^2 + 620\frac{1}{2}N - 512$	$82N^2 + 514N - 384$
• Hollerbach(4×4)	$830N - 592$	$675N - 464$
• Hollerbach(3×3)	$412N - 277$	$320N - 201$
(3) Our Method	$164N - 18$	$139N - 11$

図 2 逆動力学計算アルゴリズム

- (1) 初期条件として ω_{i-1} , $\dot{\omega}_{i-1}$, $\dot{r}_0$, $\ddot{r}_0$ を与える。
- (2) 前進代入を行うため, $i \leftarrow 1$ とする。
- (3) ω_{i0} , V_i , P_i , $L_i^{(2)}$ および各微分項を計算する。
- (4) $i=N$ なら後退代入へ, $i \neq N$ なら $i \leftarrow i+1$ として(3)に戻る。
- (5) 後退代入として, $\bar{P}_i$, $\bar{L}_i^{(1)}$, $\bar{L}_i$ とその微分項を計算し, F_i を求める。
- (6) $i=0$ なら終了, $i \neq 0$ から $i \leftarrow i-1$ として(5)に戻る。

本論文のアルゴリズムを用い, Luh と同じ条件 ($\omega_{10} = \dot{\omega}_{10} = \dot{r}_0 = \ddot{r}_0 = 0$) のもとで逆動力学計算の計算回数を求め, その結果を Hollerbach^(*) の計算回数と比較して表 1 に示す。これから Lagrange 形式に基づく

定式化によって Newton-Euler 法と同程度の計算回数を実現していることがわかる。

5. ま と め

回転ジョイントで結合された剛体多体系の運動方程式を導出した。状態変数として本体の並進速度, 回転角速度および各リンクの相対回転角速度が用いられ, 対応する運動方程式は Lagrange 形式にもとづいて導出された。得られた運動方程式系は逆動力学計算に適した漸化形になっている。また, 運動方程式の導出が Lagrange 形式にもとづいているため, 各物体の弾性変形あるいは, その運動に対する種々の幾何学的拘束条件を取り入れることが容易である。今後これらの拡張を行っていく予定である。

文 献

- (1) Whitney, D. E., Resolved motion rate control of manipulators and human prostheses, *IEEE Trans. Man-Machine Syst.*, MMS-10 (1969), 47-53.
- (2) Luh, J. Y. S., Walker, M. W. and Paul, R. P. C., On-line Computational Scheme for Mechanical Manipulators, *Trans. ASME J. Dyn. Syst., Meas. Control*, 102-2 (1980), 69-76.
- (3) 山田・土屋, 宇宙における剛体多体システムの定式化, 機論, 53-491, C (1987), 1598-1606.
- (4) Hollerbach J. M., A Recursive Lagrangian Formulation of Manipulator Dynamics and A Comparative Study of Dynamics Formulation Complexity, *IEEE Trans. SMC*-10, 11, (1980), 730-736.
- (5) Whittaker, E. T., 解析力学上, (1972), 301-303.
- (6) Fu, K. S., Gonzalez, R. C. and Lee C. S. G., ロボティクス, (1989), 139, 日刊工業新聞社.