非線形ばね特性と内部減衰をもつ回転軸系の強制振動* (1/2 次分数調波振動と引込現象)

石 田 幸 男^{*1}, 山 本 敏 男^{*2}

Forced Oscillations of a Rotating Shaft with Nonlinear Spring Characteristics and Internal Damping (Subharmonic Oscillation of Order 1/2 and Entrainment)

Yukio ISHIDA and Toshio YAMAMOTO

An elastic rotating shaft supported by ball bearings may have nonlinear spring characteristics due to clearance and internal damping due to friction between the shaft and bearings. In such a system, self-excited oscillation appears in the post-critical region. When the relation $\omega \approx \pm 2p_i$ holds between the rotating speed ω and a natural frequency p_i , a subharmonic oscillation of order 1/2 may appear. The vibration characteristics in the neighborhood of these resonance points are discussed. It is clarified that an entrainment phenomenon appears due to the interplay between the self-excited oscillation and the forced oscillation. As the result, the self-excited oscillation disappears and only the subharmonic oscillation appears in these resonant points.

Key Words: Vibration of Rotating Body, Self-Excited Oscillation, Internal Damping, Subharmonic Oscillation of Order 1/2, Entrainment

1. ま え が き

弾性軸を単列深溝玉軸受などの軸受で支えると、軸受のがたが原因で軸の復元力は非線形ばね特性をもつ。その結果、分数調波振動や和差調波振動などの各種の非線形強制振動が発生することがある⁽¹⁾。

また、回転機械では静止部と運動部の間に働く摩擦(外部減衰)以外に、回転する部分の間で摩擦(内部減衰)が働き、それによって主危険速度より高速側の広い範囲で自励振動が発生することが知られている⁽²⁾。これについて、Newkirk⁽³⁾、Kimball⁽⁴⁾を始め多くの研究者が調べているが、その解析では系の復元力については線形の場合を扱っている。

弾性軸を単列深溝玉軸受で支持したとき、軸受の取付状態によっては、軸(ジャーナル)表面と軸受内輪との間の摩擦が原因で自励振動が発生することがある。そのときこの回転軸系は、非線形ばね特性と自励作用をもち、さらに回転体の不釣合いによる周期的強制力

が作用する系となる。

強制自励系については、van der Pol⁽⁵⁾がその自励項が非線形となる方程式で表される発振回路を研究し、自励発振振動の振動数と周期的起電力の振動数が近くなると引込現象が起きることを報告した。

本研究は、弾性軸を玉軸受で支持した回転軸系はばね力と内部減衰力の両方に非線形性をもつ強制自励系となることを明らかにするとともに、特に 1/2 次分数調波振動の共振点付近の振動特性を調べ、そこでは引込現象が起きて自励振動が消滅し、分数調波振動だけが発生することを示す。また、前向き歳差運動の分数調波振動では自然に移行するが、後向き歳差運動の分数調波振動では、初期条件に依存することも示す。

2. 運 動 方 程 式

2・1 運動方程式 理論解析では、回転体が弾性軸の中央についており、回転体のたわみと傾きが連成しない鉛直軸系(図1)の傾き振動を扱う。その系では内部減衰が働くとともに、軸受のがたにより非線形ばね特性をもつと仮定する。その無次元表示の運動方程式は、既報⁽⁶⁾で用いた式に内部減衰による減衰力項 D_{ax} , $D_{\theta y}$ を追加して次のように表される。

* 平成3年4月1日 第68期通常総会講演会において講演、原稿受付 平成3年10月28日。

^{*1} 正員、名古屋大学工学部 (〒464-01 名古屋市千種区不老町1)。

^{*2} 正員、名城大学理工学部 (〒468 名古屋市天白区塩釜口1-501)。

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\theta}_x + i_p \omega \dot{\theta}_y + c \dot{\theta}_x + D_{\theta x} + \theta_x + N_{\theta x} \\ = F \cos \omega t \\ \ddot{\theta}_y - i_p \omega \dot{\theta}_x + c \dot{\theta}_y + D_{\theta y} + \theta_y + N_{\theta y} \\ = F \sin \omega t \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

ここに、 θ_x, θ_y は z 軸を軸受中心線に一致させた直交座標系 $O-xyz$ において、軸の傾き θ の xz, yz 平面への投影角を表す。また、 i_p は回転体の主慣性モーメント I_p と I の比、 ω は回転速度、 t は時間、 τ は動不釣り合い、 $F=(1-i_p)\tau\omega^2$ 、 c は外部減衰の減衰係数、 $N_{\theta x}, N_{\theta y}$ は復元力中の非線形項である。

2.2 非線形項 非線形項として座標の 3 乗まで考える。その一般的な表現は、ポテンシャルエネルギー $V (=V_0 + V_N, V_0$ と V_N は、それぞれ復元力中の線形項と非線形項に対応する成分) から求まる。

$$\left. \begin{aligned} V_N(\theta_x, \theta_y) = \sum_{\substack{i,j=0 \\ (i+j=3)}}^3 \varepsilon_{ij} \theta_x^i \theta_y^j + \sum_{\substack{i,j=0 \\ (i+j=4)}}^4 \beta_{ij} \theta_x^i \theta_y^j \\ N_{\theta x} = \partial V_N / \partial \theta_x, \quad N_{\theta y} = \partial V_N / \partial \theta_y \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

このポテンシャルエネルギーは、変換式 $\theta_x = \theta \cos \varphi, \theta_y = \theta \sin \varphi$ によって極座標表示すれば、次のように規則性のある成分に分けられる⁽⁷⁾。

$$\left. \begin{aligned} V = V_0 + \{\varepsilon^{(1)} \cos(\varphi - \varphi_1) + \varepsilon^{(3)} \cos(\varphi - \varphi_3)\} \theta^3 \\ + \{\beta^{(0)} + \beta^{(2)} \cos(\varphi - \varphi_2) + \beta^{(4)} \cos(\varphi - \varphi_4)\} \theta^4 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

2.3 内部減衰項 回転軸系の内部減衰には、軸材料の粘性に起因するもの(履歴減衰)と、回転している構造部材間の乾性摩擦に起因するもの(構造域衰)がある。実際の鋼製軸では前者の影響は小さく、それによって自励振動が発生することはあまりないようであるが、後者はたびたび問題となる。

後述の実験装置では、軸受内輪と弾性軸の間の乾性摩擦が自励振動の原因となっているので、ここでは構造減衰の場合について検討する。その装置では、軸受

図 1 回転体の理論モデルと座標系

内輪と軸との間は軽い締めりばめになっているため、振動中でも振幅が小さければ両者の間に働く垂直抗力の大きさはほぼ一定と考えられる。したがって、このとき働く摩擦力もほぼ一定と仮定する。回転速度 ω で回転している軸上での相対的なすべりが原因であるので、この内部減衰力はまず回転座標 $O-\theta_x\theta_y$ 上で考えるのが妥当である。大きさが一定で作用する方向が速度と反対方向であることから、 θ_x 軸と θ_y 軸に関する内部減衰力の成分を $-D'_{\theta x}$ と $-D'_{\theta y}$ とするとそれらは次式で表現される。

$$D'_{\theta x} = \frac{h \dot{\theta}_x}{\sqrt{\theta_x^2 + \theta_y^2}}, \quad D'_{\theta y} = \frac{h \dot{\theta}_y}{\sqrt{\theta_x^2 + \theta_y^2}} \dots\dots\dots (4)$$

この表現は、Tondl 著書に紹介されている内部減衰の表現の一つとも一致する⁽⁸⁾。運動方程式(1)に代入するため、これを静止座標による表示になおすと次式となる。

$$D_{\theta x} = \frac{h(\dot{\theta}_x - \omega \dot{\theta}_y)}{\sqrt{d}}, \quad D_{\theta y} = \frac{h(\dot{\theta}_y - \omega \dot{\theta}_x)}{\sqrt{d}} \dots\dots (5)$$

ここに、 $d = \dot{\theta}_x^2 + \dot{\theta}_y^2 + 2\omega(\dot{\theta}_x\theta_y - \dot{\theta}_y\theta_x) + \omega^2(\theta_x^2 + \theta_y^2)$ の記号を用いてある。

2.4 固有振動数 振動数方程式は式(1)より

$$G(p) \equiv 1 + i_p \omega p - p^2 = 0 \dots\dots\dots (6)$$

これから固有振動数 p が求まるが、その根 $p_r (>0)$ と $p_b (<0)$ の変化は、図 2 の $p-\omega$ 線図で示される。例えば、前向き歳差運動様式の $1/2$ 次分数調波振動の共振点 ω_0 は曲線 p_r と直線 $p=(1/2)\omega$ との交点で与えられる。

3. 非線形内部減衰力と線形復元力の系

比較のため、内部減衰力が非線形で復元力が線形である系の特性をまず調べる。軸受として複列自動調心玉軸受を用いた装置で、回転する部材間に内部減衰が

図 2 理論モデルの $p-\omega$ 線図

働いた場合がこれに相当する。この場合は式(1)で $N_{ax}=N_{ay}=0$ とおいた式を解くが、後述の場合と異なり、特定の共振点付近に限定することなく、回転速度 ω の広い範囲を対象として解析する。まず、振動数 ω の前向き歳差運動様式の調和振動(記号 $[\omega]$ で表す。)に加え、振動数 p_f の自励振動 $[p_f]$ が一定振幅で発生すると予想して解の形を次のように仮定する。

$$\begin{aligned}\theta_x &= R_p \cos(p_f t + \delta_p) + P \cos(\omega t + \beta) \\ \theta_y &= R_p \sin(p_f t + \delta_p) + P \sin(\omega t + \beta)\end{aligned}\quad \dots\dots\dots(7)$$

ただし、 $R_p \neq 0$ とする ($R_p = 0$ の定常解のときには第2項だけとなって軸のふれまわり中に部材間のすべりはなく、式(1)の D_{ax} と D_{ay} の項は消えるため運動方程式が異なる)。これを式(1)に代入し、振動数 p_f と ω について調和バランスをとる。なお、振幅 R_p , P と位相角 δ_p , β はゆっくり変化すると仮定し、微小パラメータ ε と同程度(記号 $O(\varepsilon)$ で表す。)の量まで考慮すると振動成分 $[p_f]$ については次の式が得られる。

$$\begin{aligned}(2p_f - i_p\omega)\dot{R}_p &= -cp_f R_p \mp h \\ (2p_f - i_p\omega)R_p \dot{\delta}_p &= 0\end{aligned}\quad \dots\dots\dots(8)$$

ここに、複号の前の-は $\omega < \omega_c$ 、+は $\omega > \omega_c$ の場合を表す。この式から、主危険速度より高速側 ($\omega > \omega_c$) のとき定常解 $R = R_{p0}$, $\delta = \delta_{p0}$ が次のように求まる。

$$R_{p0} = h/(cp_f) \dots\dots\dots(9)$$

この計算結果を図3に実線で示す。

振動数 ω の調和振動成分については次式を得る。

$$\begin{aligned}(2 - i_p)\omega \dot{P} &= -c\omega P - F \sin \beta \\ (2 - i_p)\omega P \dot{\beta} &= G(\omega) - F \cos \beta\end{aligned}\quad \dots\dots\dots(10)$$

この成分は内部減衰の影響を受けない。

運動方程式を直接数値積分して行ったシミュレーションの結果を図3に丸印で記入してある。解析結果とよく一致している。

このように、内部減衰が作用するとき、主危険速度より高速側で振動数 p_f の自励振動が発生し、それ

図3 内部減衰力と線形復元力の作用する系の応答

は内部減衰と外部減衰によるエネルギーの出入りが釣り合ったところで一定振幅 R_{p0} の定常振動になる。

4. 前向き歳差運動様式の1/2次分数調波振動

4.1 内部減衰力がなく非線形復元力のみある場合

まず最初に、比較のため内部減衰がない系における前向き歳差運動様式の1/2次分数調波振動 $[(1/2)\omega]$ (便宜上、前向き歳差運動様式であることを+、後向き歳差運動様式であることを-で示す。)の共振点 ω_0 付近の応答を考える。後述の実験装置で軸受内輪と軸との間のすべりが止まればこの状態が実現される。この場合は式(1)で $D_{ax}=D_{ay}=0$ とおいた式を解くが、既報⁽⁹⁾で示したとおり、解を $O(\varepsilon)$ 精度で仮定して近似的に解かねばならない。その解の $O(\varepsilon^0)$ の項は次のようである。

$$\begin{aligned}\theta_x &= R \cos(\omega_f t + \delta) + P \cos(\omega t + \beta) + \dots \\ \theta_y &= R \sin(\omega_f t + \delta) + P \sin(\omega t + \beta) + \dots\end{aligned}\quad \dots\dots\dots(11)$$

ここに、 $\omega_f = (1/2)\omega$ とおいてある。定常解 $R = R_0$ に関する共振曲線は次式で与えられる⁽⁹⁾。

$$\begin{aligned}R_0 &= 0 \\ \{G_1 + 4\beta^{(0)}(R_0^2 + 2P^2)\}^2 + (c\omega_f)^2 &= 4\varepsilon^{(1/2)}P^2\end{aligned}\quad \dots\dots\dots(12)$$

ここに、 $G_1 = G(\omega_f)$, $\varepsilon^{(1/2)} = \varepsilon_c^{(1/2)} + \varepsilon_s^{(1/2)}$ である。この計算結果と安定判別の結果を図4に示す。また、数値シミュレーションの結果も丸印で記入してある。

4.2 内部減衰力と非線形復元力が作用する場合の理論解析

(a) 自励振動が発生する解 3章と同様に自励振動 $[p_f]$ が発生する場合が予想されるので、それについて解析する。いま振動数 p_f , ω の成分があると、ばね特性の非線形性のため各種の振動数の成分が派生する。その派生項のなかで、振動数 $\omega - p_f$ はこの共振点

図4 内部減衰力が作用しないときの1/2次分数調波振動の共振曲線

付近で $\omega - p_f \approx \omega - \omega/2 = \omega/2 \approx p_f$ となってこの自動振動にかかわると考えられるのでこれも考慮する。便宜上 $\omega - p_f$ を記号 q_f で表し、さらにこの成分も共振により大きくなると考え、解を $O(\varepsilon)$ 精度で次のようにおく。

$$\left. \begin{aligned} \theta_x &= R_p \cos \theta_p + R_q \cos \theta_q + P \cos \theta_\omega \\ &+ \varepsilon(a \cos \theta_p + b \sin \theta_p) + \varepsilon(e \cos \theta_q + f \sin \theta_q) \\ \theta_y &= R_p \sin \theta_p + R_q \sin \theta_q + P \sin \theta_\omega \\ &+ \varepsilon(a' \sin \theta_p + b' \cos \theta_p) + \varepsilon(e' \sin \theta_q + f' \cos \theta_q) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (13)$$

ここに、 $\theta_p = p_f t + \delta_p$, $\theta_q = q_f t + \delta_q$, $\theta_\omega = \omega t + \beta \approx \omega t + \pi$ である。解(13)を運動方程式(1)に代入し、振動数 p_f, q_f について、 $G_p \equiv G(p_f) = 0$, $G_q \equiv G(q_f) = O(\varepsilon)$, $G \equiv G(\omega) = O(\varepsilon^0)$ であることに注意しながら $O(\varepsilon)$ 精度で調和バランスをとる。その計算において、内部減衰項の処理に工夫が必要となる。解(13)を式(5)に代入すると

$$\frac{1}{\sqrt{d}} = \frac{n}{\sqrt{1+m \cos \{(p_f - q_f)t + (\delta_p - \delta_q)\}}} \quad \dots\dots\dots (14)$$

ここに、 $m = (2p_f q_f R_p R_q) / (q_f^2 R_p^2 + p_f^2 R_q^2)$, $n = 1 / \sqrt{q_f^2 R_p^2 + p_f^2 R_q^2}$ である。これは周期関数であるから $\theta = (p_f - q_f)t + (\delta_p - \delta_q)$ について $1/(n\sqrt{d}) = a_0 + a_1 \cos \theta + b_1 \sin \theta + \dots$ と展開するとその係数は通常のフーリエ係数として求まるが、さらに $0 < m \leq 1$ であることに注目してそれらを m のべき級数で展開すると次のように近似できる。

図5 べき級数近似の一例

$$\left. \begin{aligned} a_0 &\approx 1.000 + 3.804m + 0.155m^2 + 0.387m^3 \\ &- 1.134m^4 + 1.157m^5 \equiv A_0(m) \\ a_1 &\approx -4.094 \times 10^{-17} - 0.528m + 0.714m^2 \\ &- 4.450m^3 + 8.588m^4 - 5.808m^5 \equiv A_1(m) \\ b_1 &\approx 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (15)$$

この近似による精度の一例を図5に示す。

式(13)の θ_p, θ_q について調和バランスをとると次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} A_f \dot{R}_p &= -cp_f R_p + hn\{q_f R_p A_0 + (1/2)p_f R_q A_1\} \\ &- 2\{\varepsilon_c^{(1)} \sin(\delta_p + \delta_q) - \varepsilon_s^{(1)} \cos(\delta_p + \delta_q)\} R_q P \\ A_f R_p \dot{\delta}_p &= 4\beta^{(0)}(R_p^2 + 2R_q^2 + 2P^2)R_p \\ &- 2\{\varepsilon_c^{(1)} \cos(\delta_p + \delta_q) + \varepsilon_s^{(1)} \sin(\delta_p + \delta_q)\} R_q P \\ A_f \dot{R}_q &= -cq_f R_q + hn\{p_f R_q A_0 + (1/2)q_f R_p A_1\} \\ &- 2\{\varepsilon_c^{(1)} \sin(\delta_p + \delta_q) - \varepsilon_s^{(1)} \cos(\delta_p + \delta_q)\} R_p P \\ A_f R_q \dot{\delta}_q &= G_q R_q + 4\beta^{(0)}(2R_p^2 + R_q^2 + 2P^2)R_q \\ &- 2\{\varepsilon_c^{(1)} \cos(\delta_p + \delta_q) + \varepsilon_s^{(1)} \sin(\delta_p + \delta_q)\} R_p P \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (16)$$

ここで、 n, A_0, A_1 が R_p, R_q の関数であることに注意する。上式で $\dot{R}_p = \dot{R}_q = \dot{\chi} (= \dot{\delta}_p + \dot{\delta}_q) = 0$ とおいた式

(a) 振幅 R_{p0} の変化

(b) 振幅 R_{q0} の変化

図6 内部減衰と非線形ばね特性が共存するときの共振点 ω_0 付近の共振曲線

から定常解 $R_p = R_{p0}$, $R_q = R_{q0}$, $\chi = \chi_0$ が得られる。またその安定判別は、既報⁽¹⁰⁾と同様な方法で行うことができる。

定常解の発生振動数は次式で与えられる。

$$p_j' = p_j + \delta p, \quad q_j' = q_j + \delta q \quad \dots\dots\dots (17)$$

以上の解析から得られた振幅の変化を図6に、またその振動数を図7に示す。図中の①、②の番号は対応する1組の解であることを示す。

まず図6の曲線①の解について考察する。それに対応する振動数を図7(a)に示すが、図2の固有振動数 p_f に近い値の p_j' に加えて $q_j' (= \omega - p_j')$ も共存していることがわかる。そして、これら二つの曲線が交わるあたりから、ほぼ $+(1/2)\omega$ の振動数も現われている。図6において、共振点の両側では p_j' に対応する振幅 R_{p0} は大きく、派生成分である振幅 R_{q0} は小さい。また振動数がほぼ $+(1/2)\omega$ の成分の振幅は R_{p0} と R_{q0} のいずれについても共振点を越えると急に増大しており、この成分が $1/2$ 次分数調波振動に引込まれた解を表している。この引込まれた解では $p_j' = q_j' = (1/2)\omega$ であるから式(13)より $R_{p0} + R_{q0}$ が分数調波振動の振幅

(a) 図6の曲線①に対応する成分

(b) 図6の曲線②に対応する成分

図7 内部減衰と非線形ばね特性が共存するときの共振点 ω_0 付近の発生振動数

を与える。以上のように、解(13)は、自励振動 $[p_f]$ と引込まれた結果である分数調波振動 $[(1/2)\omega]$ の両方を与えることができるが、後者については近似解の誤差のため振動数が正確に $+(1/2)\omega$ になっていない。この分数調波振動の解については以下で改めて検討する。

次に曲線②の解について考察する。図7(b)より、このときには振動数 p_j' に派生成分に相当する値が入り、 q_j' に非線形項と内部減衰項がないときの p_f に相当する値が入っている。さらに振幅曲線として p_j' に対応する R_{p0} が小さく、 q_j' に対応する R_{q0} が大きく現われている。したがって、曲線②は実質的に曲線①と同じものを与えていることがわかる。つまり、本来振幅 R_{p0} , R_{q0} として1組の解しかないものが、近似計算の結果、極めて近い2組の解として現われたと考えられる。

(b) 分数調波振動に引込まれた解 上記の解析によると、共振点 ω_0 付近では自励振動が振動数 $+(1/2)\omega$ の分数調波振動に引込まれた解が存在するようであるが、近似誤差のため振動数が正確に $+(1/2)\omega$ になっていない。ここでは最初からこの分数調波振動の解を仮定して解を求めてみる。まず共振点 ω_0 付近の解を式(11)の形に仮定する。3章と同様な計算により次の式を得る。

$$\left. \begin{aligned} A_f \dot{R} &= -c\omega_f R + h \\ &\quad - 2(\epsilon_c^{(1)} \sin 2\delta - \epsilon_s^{(1)} \cos 2\delta) R P \\ A_f R \dot{\delta} &= G_1 R + 4\beta^{(0)}(R^2 + 2P^2)R \\ &\quad - 2(\epsilon_c^{(1)} \cos 2\delta + \epsilon_s^{(1)} \sin 2\delta) R P \end{aligned} \right\} \dots\dots (18)$$

この式から求めた定常解を2種類の内部減衰 h の値に対して図8に示す。 $h=0$ の場合である図4とあわせて考えると、 $h=0$ のとき $R=0$ の解から分岐していた共振曲線が $R=0$ の解から離れ、同時に $R=0$ の解はすべて安定となることがわかる。またその振幅も内

図8 分数調波振動 $[(1/2)\omega]$ に引込まれた解

部減衰とともに増大する。この解析結果は、自励成分 $[p_f]$ がなくて強制振動である $1/2$ 次分数調波振動だけが発生する解が可能であることを示している。

4.3 数値シミュレーション 非線形内部減衰力と非線形ばね力が共存する場合について、運動方程式 (1) を直接数値積分してシミュレーションを行った。得られた振幅 R_0 と R_{p0} の変化を図 9 に、またそれに対応する振動数の変化を図 10 に示す。

振幅変化の図 9 には、比較のため図 6, 8 の中から関連する近似解をとりだして記入してあるが、シミュレーション結果とよく一致している。図中には振動波形の例も示してある。共振点前後では調和振動 $[+\omega]$ と振動数 $p_f, q_f (= \omega - p_f)$ などの自励振動が共存しているため、その包絡線がゆるやかに変動している波形が得られている。共振点付近になると自励振動成分が分数調波振動に引込まれ、調和振動 $[+\omega]$ と正確に $+(1/2)\omega$ の振動数をもつ分数調波振動が共存する一

定振幅の波形に移る。

振動数の図 10 には、比較のため図 7 (a) の近似解も記入してある。また、自励振動が発生している波形のスペクトル分布の一例も示すが、振動数 ω, p_f, q_f の成分が存在していることが確認できる。

5. 後向き歳差運動様式の $1/2$ 次分数調波振動

後向き歳差運動様式の $1/2$ 次分数調波振動 $[-(1/2)\omega]$ の共振点 ω_0 (図 2 参照) 付近についても同様に解析できる。そこでは、自励振動 $[p_f]$ が分数調波振動 $[-(1/2)\omega]$ に引込まれ、強制振動である分数調波振動と調和振動 $[+\omega]$ だけが発生することが可能であるが、自励振動 $[p_f]$ と分数調波振動 $[-(1/2)\omega]$ は振動数の絶対値は近くともふれまわりの方向が異なるため、前者から後者に自然に移行することはない。そのいずれが発生するかは初期条件による。その解析の結果得られた近似解と数値シミュレーションの結果を図 11 に

図 9 内部減衰と非線形ばね特性が共存するときの共振点 ω_0 付近のシミュレーション (共振曲線)

(a) 振幅の変化

(b) 発生振動数

図 10 内部減衰と非線形ばね特性が共存するときの共振点 ω_0 付近のシミュレーション (振動数)

図 11 内部減衰と非線形ばね特性が共存するときの後向き歳差運動様式の $1/2$ 次分数調波振動

示す。

6. 実験装置と実験結果

6.1 実験装置 図12に示すように、1個の円板Rが取付けられた円形断面の弾性軸Sが鉛直に支持されている。軸の寸法は直径12 mm、長さ $l=700$ mm ($a:b=1:4$) であり、また回転体は直径300 mm、厚さ14 mmである。軸の上端は複列自動調心玉軸受(#1200)で単純支持されている。下端は単列深みぞ玉軸受(#6204)で支持されているので、その位置での軸の傾きが軸受の角度の δ の中にあるとすれば単純支持に、外に出れば固定支持となって軸の復元力に非線形ばね特性が現われる。

図12(b)に下端軸受部の詳細を示す。軸受内輪とジャーナル部の間の摩擦が原因で自励振動が発生する。

この装置は4自由度系であり、四つの固有振動数 $p_1 > p_2 > 0 > p_3 > p_4$ をもつ。 $p_2 = +\omega$ となる主危険速度は

図12 実験装置

図13 分数調波振動 $[(1/2)\omega]$ についての実験結果

1100~1200 rpm 付近にあるが、その値は下端軸受部の状態によって変化する。

6.2 実験結果

(a) 自励振動について 自励振動の強さは軸受部詳細図に示された軸受とつばとのすきま δ に依存し、すきまがないようにナットで締めつけると自励振動は発生しなかった。ナットを少し緩め、極めてわずかなすきま(図では強調して δ を大きくして描いてある)を設けると主危険速度より高速側の広い範囲で振動数 p_2 の自励振動が発生した。図13は成長した自励振動が約0.7 mmの振幅で定常振動となった例であり、またこのときの振幅は、回転速度の広い範囲でほぼ一定であった。なお、振幅が小さく下端軸受部での軸の傾きが角度の δ の中にあるときには、軸と軸受内輪の間のすべりががないため内部減衰の作用はなく、調和振動 $[+\omega]$ だけ生じる。そのときの共振曲線(□, ○印)も測定された。この状態で初期外乱を与えると自励振動が成長し始める。

(b) 引込現象について 図12のように自励振動が一定振幅で持続しているときには、前向き歳差運動様式の $1/2$ 次分数調波振動の共振点 ω_{p2} 付近で分数調波振動が発生するとそれに引込まれ自励振動は消滅した。振動波形の例を図14に示す。

7. 結 論

復元力に非線形ばね特性をもち、内部減衰が作用する回転軸系の $1/2$ 次分数調波振動について以下のことが明らかとなった。

- (1) 主危険速度より高速側で自励振動が発生する。
- (2) この自励振動は、内部減衰と外部減衰による

(a) 自励振動と調和振動が共存する場合

(b) $1/2$ 次分数調波振動と調和振動が共存する場合

図14 分数調波振動 $[(1/2)\omega]$ についての実験結果

エネルギーの出入りが釣合ったところで一定振幅の持続振動となる。

(3) 前向き歳差運動様式の $1/2$ 次分数調波振動の共振点付近では、自励振動は強制振動である分数調波振動に引込まれ、自励振動が発生しない回転速度の領域がある。また、その付近で回転速度を変えると、自励振動は分数調波振動に移行する。

(4) 引込みの結果生じている分数調波振動の振幅は、自励作用がないときの振幅より大きい。

(5) 後向き歳差運動様式の $1/2$ 次分数調波振動の共振点付近では、引込現象の結果、自励振動が消え分数調波振動だけが発生することも可能であるが、その

どちらが発生するかは初期状態に依存する。

文 献

- (1) 石田, 機習教, (1991-4), 61.
- (2) Tondl, A. (前沢訳), 回転体の力学, (1971), 5, コロナ社.
- (3) Newkirk, B. L., *Gen. Elect. Rev.*, March, (1924), 169.
- (4) Kimball, A. L., *Gen. Elect. Rev.*, April, (1924), 244.
- (5) Van der Pol, *Phil. Mag.* 3(1927), 65.
- (6) 山本・石田・川角, 機論, 41-341, (1975), 133.
- (7) 山本・石田, 機論, 41-345, (1975), 1374.
- (8) 文献(2)の15ページ.
- (9) 石田・ほか3名, 機論, 55-511, C(1989), 636.
- (10) 石田・ほか2名, 機論, 50-456, C(1984), 1390.
- (11) 山本, 機論, 12-111, (1955), 153.