線接触熱弾性流体潤滑の一解法*
(第2報, 解析方法と結果の吟味)岡村 広正^{*1}, 藤原 清^{*1}A New Approach to the Solution of Thermal
Elastohydrodynamic Lubrication in Line Contacts
(2nd Report, TEHL Solving Method and Considerations of the Results)

Hiromasa OKAMURA and Kiyoshi FUJIWARA

Basic equations for the thermal elastohydrodynamic lubrication (TEHL) in line contacts were described in the 1st report. By introducing a nondimensional parameter y , the thermal Reynolds equation and energy equation can be expressed in very simple forms. Using these equations, TEHL problems can be solved by the Newton-Raphson method, which is the same as isothermal EHL. The only difference from the isothermal problem is that partial differential coefficients are the function of the parameter y , that is a function of the energy equation. Calculated results of pressure, temperature, film thickness and traction coefficients are shown and discussed. From the conclusions, the method described here is very useful and in the case of a large slip ratio, compressive heating and convection cooling terms are negligible.

Key Words: Tribology, EHL, TEHL, Line Contacts, Newton-Raphson Method

1. 緒 言

前報⁽¹⁾では, TEHLの基礎式として, (1)熱 Reynolds 方程式, (2)エネルギー方程式を誘導した。また, 付随して壁温計算式, トラクション係数計算式, 動力損失計算式, などを示した。

本報では, その具体的な解析方法を示すとともに, 解析を実施し, その結果について検討する。

記 号

B_0 : TEHLの無次元数 $= k\eta_{00}/(\beta E'^2 R^2)$
 b : ヘルツ接触半幅 $= R\sqrt{8W/\pi}$ m
 C_i : 影響係数 Pa^{-1}
 C_p : 比熱 J/(kg·K)
 $C_1 \sim C_n$: エネルギー方程式における係数
 D_{ij} : 影響係数
 D : 無次元比熱 $\rho C_p/(\beta E')$
 E' : 等価ヤング率 Pa

F : 無次元熱膨張率 $= \nu/\beta$
 G : 無次元材料パラメータ $= \alpha E'$
 G^* : $= G\sqrt{W/(2\pi)}$
 H : 無次元油膜厚さ $= hR/b^2$
 h : 油膜厚さ m
 H_c : $dP/dX=0$ となる H の値
 H_{00} : H を求めるときの無次元定数
 k : 潤滑油の熱伝導率 W/(m·K)
 N : ノード数
 n : 反復回数
 P : 無次元圧力 p/p_H
 p : 油膜圧力 Pa
 p_H : 最大ヘルツ圧 $= E'\sqrt{W/(2\pi)}$
 R : 等価半径 m
 S_1 : 壁温計算式の係数
 s : スリップ比 $(u_1 - u_2)/\bar{u}$
 $S_1 = k_f \sqrt{\pi b} / \{(\pi \rho_s C_s k_s \bar{u})^{1/2} (2RW\beta)\}$
 U_0 : 無次元速度パラメータ $= \eta_{00} \bar{u}/(E'R)$
 $\bar{u}$: 物体の平均速度 $= (u_1 + u_2)/2$ m/s
 u_1, u_2 : 潤滑面 1, 2 の速度 m/s
 W : 無次元荷重パラメータ $w/(E'R)$
 w : 単位幅当たりの荷重 N/m

* 平成3年6月15日 秋田地方講演会および平成3年7月17日 宮崎地方講演会において講演, 原稿受付 平成3年10月28日。

^{*1} 正員, トヨタ自動車(株)東富士研究所 (〒410-11 裾野市御宿1200)。

X : 無次元座標 x/b

X' : ローカル座標

x : 転がり方向の座標 m

x_s : 接触域入口 X 座標

x_b : 接触域出口 Y 座標

y : 発熱に関する無次元パラメータ $=\sqrt{\beta\Delta\theta}$

z : 油膜厚さ方向の座標 (原点は油膜中央) m

α : 潤滑油の圧力粘度指数 Pa^{-1}

β : 潤滑油の温度粘度指数 K^{-1}

Δ_i : $=X_{i+1}-X_i$

δ : 弾性変形量

$\Delta\theta$: 油膜中央の上昇温度 $=\theta_m-\theta_s$ K

$\Delta\theta_s$: 壁面上昇温度 $=\theta_s-\theta_0$ K

$\varepsilon(\theta_s)$: η_0/η_{00}

η : 潤滑油の粘度 $\text{Pa}\cdot\text{s}$

η_0 : 物体表面温度における粘度

η_{00} : 基準温度における粘度

Θ : 無次元温度 $=\beta\theta$

θ : 油膜温度 K

θ_m : 油膜中央の温度 K

θ_s : 壁面温度 K

θ_0 : 初期油膜温度 K

ν : 熱膨張率 K^{-1}

ρ : 密度 kg/m^3

y の関数

$$K(y) = \frac{1}{y^3} \left\{ -y + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \exp(y^2) \operatorname{erf}(y) \right\}$$

$$M(y) = \frac{2y}{\sqrt{\pi} \exp(y^2) \operatorname{erf}(y)} = \frac{1}{1+y^2 K(y)}$$

$$N(y) = (1-2y^2)K(y) - \frac{2}{3}$$

$$L(y) = \frac{N(y)}{2y}$$

2. 解析基礎式

2.1 エネルギー方程式 前報で示したように、エネルギー方程式は次式となる。

$$E_{vh} + E_{ch} = E_{dc} + E_{vc} \quad \cdots \cdots (1)$$

左から順に Viscous heating 項, Compressive heating 項, Conduction cooling 項, Convection cooling 項である。ここで

$$E_{vh} = \frac{4W^3}{\pi^3} H^3 \exp(-G^*P) \left(\frac{dP}{dX} \right)^2 K(y) \\ + s^2 U_0^2 \varepsilon \exp(G^*P) M(y) \frac{\pi}{8WH} \quad \cdots \cdots (2)$$

$$E_{ch} = \frac{2W^3}{\pi^3} F H^3 \exp(-G^*P) \left(\frac{dP}{dX} \right)^2 \{N(y)$$

$$-2\Theta_s K(y)\} + \frac{2W}{\pi} F \frac{dP}{dX} U_0 \varepsilon H \left(\Theta_s + \frac{2}{3} y^2 \right) \quad \cdots \cdots (3)$$

$$E_{dc} = 8B_0 \varepsilon y^2 \frac{\pi}{8WH} \quad \cdots \cdots (4)$$

$$E_{vc} = \frac{32}{3} \sqrt{\frac{8W}{\pi}} D U_0 \varepsilon H y \frac{dy}{dX} \\ + 2 \left(\frac{8W}{\pi} \right)^{5/2} D H^3 \exp(-G^*P) \\ \times \frac{dP}{dX} L(y) \frac{dy}{dX} \quad \cdots \cdots (5)$$

エネルギー方程式(1)において、Convection cooling の項 E_{vc} を無視する場合には、 y のみの関数となる。したがって、ニュートンラフソンの方法で容易に解が得られる。

Convection cooling の項を含むときは y に関する1階の微分方程式となるので、境界条件が必要となる。接触域出口では発熱がないとすると、次のようになる。

$$X = X_b \text{ にて } y = 0 \quad \cdots \cdots (6)$$

$$\left(\frac{dy}{dX} \right)_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{X_{i+1} - X_i} \quad \cdots \cdots (7)$$

とし、 y_{i+1} が既知とすると y_i のみが未知数となるので、エネルギー方程式は次のような形になる。

$$C_1 + (C_2 + C_3)K(y_i) + (C_3 + C_7 + C_5)y_i^2 \\ + C_6 M(y_i) + C_4 N(y_i) + C_8 y_i \\ + C_{10} L(y_i) + C_{11} y_i L(y_i) = 0 \quad \cdots \cdots (8)$$

ここで、 $C_1 \sim C_{11}$ は付録1に示した。

すなわち、エネルギー方程式を出口から入口に向かって順次解いていくことが可能で、それぞれの点では、式(8)に表されるような代数方程式をニュートンラフソン法で解いていけばよい。

2.2 油膜厚さの式 等温理論と同様に、

$$H_i = H_{00} + \frac{1}{2} X_i^2 + \sum_{j=1}^N D_{ij} P_j \quad \cdots \cdots (9)$$

影響係数 D_{ij} は EHL の計算精度に影響するので、精密に求めていきたい。Hamrock⁽²⁾ は区分積分法によって精密な D_{ij} を求めることに成功し、巧妙に特異点の問題を取り除いている。著者らも基本的にはこの方法を採用するが、Hamrock は弾性変形式を一度部分積分した形にして区分積分を行っている。著者らはそ

の必要性はないと思うので、直接区分積分する方法をとる。弾性変形量を δ とすると

$$\delta = -\frac{1}{2\pi} \int_{x_a}^{x_b} P(S) \ln(X-S)^2 dS \quad \dots\dots\dots (10)$$

i 点の変形量 δ_i を

$$\delta_i = \sum_{j=1}^N D_{ij} P_j \quad \dots\dots\dots (11)$$

としたい。

このため、 X_a, X_b を区分的に積分する。すなわち

$$\delta_i = \sum_{j=1}^N d\delta_{ij} \quad \dots\dots\dots (12)$$

式(10)における S 座標は X 座標と同じ尺度であるが、式(14)の $d\delta_{ij}$ を求めるときはローカル座標に変換する。

$$\begin{aligned} d\delta_{ij} &= \frac{-1}{2\pi} \int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} P(S) \ln(X_i - S)^2 dS \\ &= \frac{-1}{2\pi} \int_{x_{j-1}-X_j}^{x_{j+1}-X_j} P(X') \ln\{(X_i - X_j) - X'\}^2 dX' \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (13)$$

ここで二次の Lagrange の補間公式を使うと、

$$P(X') = L_0(X')P_{j-1} + L_1(X')P_j + L_2(X')P_{j+1} \quad \dots\dots\dots (14)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} L_0(X') &= (X'^2 + D_1 X')/d_1 \\ d_1 &= (X_{j-1} - X_j)(X_{j-1} - X_{j+1}) \\ D_1 &= (X_j - X_{j+1}) \\ L_1(X') &= (X'^2 + D_2 X' + E_2)/d_2 \\ d_2 &= (X_j - X_{j-1})(X_j - X_{j+1}) \\ D_2 &= (2X_j - X_{j-1} - X_{j+1}) \\ E_2 &= (X_j - X_{j-1})(X_j - X_{j+1}) \\ L_2(X') &= (X'^2 + D_3 X')/d_3 \\ d_3 &= (X_{j+1} - X_{j-1})(X_{j+1} - X_j) \\ D_3 &= (X_j - X_{j-1}) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (15)$$

以上より、式(13)は

$$\begin{aligned} d\delta_{ij} &= \frac{-1}{2\pi} \int_{x_{j-1}-X_j}^{x_{j+1}-X_j} \{L_0(X')P_{j-1} + L_1(X')P_j \\ &\quad + L_2(X')P_{j+1}\} \ln\{(X_i - X_j) - X'\}^2 dX' \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (16)$$

これを

$$d\delta_{ij} = dD_{i,j-1}P_{j-1} + dD_{i,j}P_j + dD_{i,j+1}P_{j+1} \quad \dots\dots\dots (17)$$

と書くことにすると

$$\begin{aligned} dD_{i,j-1} &= \frac{-1}{2\pi} \int_{x_{j-1}-X_j}^{x_{j+1}-X_j} \frac{(X'^2 + D_1 X')}{d_1} \\ &\quad \times \ln\{(X_i - X_j) - X'\}^2 dX' \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (18)$$

$$\begin{aligned} dD_{i,j} &= \frac{-1}{2\pi} \int_{x_{j-1}-X_j}^{x_{j+1}-X_j} \frac{(X'^2 + D_2 X' + E_2)}{d_2} \\ &\quad \times \ln\{(X_i - X_j) - X'\}^2 dX' \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (19)$$

$$\begin{aligned} dD_{i,j-1} &= \frac{-1}{2\pi} \int_{x_{j-1}-X_j}^{x_{j+1}-X_j} \frac{(X'^2 + D_3 X')}{d_3} \\ &\quad \times \ln\{(X_i - X_j) - X'\}^2 dX' \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (20)$$

ここで

$$\begin{aligned} X_{j-1} - X_j &= A, \quad X_{j+1} - X_j = B, \quad X_i - X_j = C, \\ C - X' &= Z \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (21)$$

また、

$$\left. \begin{aligned} C - A &= X_i - X_{j-1} = Z_{\min} \\ C - B &= X_i - X_{j+1} = Z_{\max} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (22)$$

とおく。また一般に

$$\left. \begin{aligned} \int Z^2 \ln Z^2 dZ &= \frac{1}{3} \left(Z^3 \ln Z^2 - \frac{2}{3} Z^3 \right) \\ \int Z \ln Z^2 dZ &= \frac{1}{2} \left(Z^2 \ln Z^2 - Z^2 \right) \\ \int \ln Z^2 dZ &= Z \ln Z - 2Z \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (23)$$

$$\begin{aligned} \therefore dD_{i,j-1} &= -\frac{1}{2\pi} \left[-\frac{1}{d_1} \int_{Z_{\min}}^{Z_{\max}} Z^2 \ln Z^2 dZ \right. \\ &\quad + \frac{D_1 + 2C}{d_1} \int_{Z_{\min}}^{Z_{\max}} Z \ln Z^2 dZ \\ &\quad \left. - \frac{C^2 + D_1 C}{d_1} \int_{Z_{\min}}^{Z_{\max}} \ln Z^2 dZ \right] \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (24)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} K &= Z_{\max}^3 \left(\frac{-1}{3} \ln Z_{\max}^2 + \frac{2}{9} \right) - Z_{\min}^3 \left(\frac{-1}{3} \ln Z_{\min}^2 + \frac{2}{9} \right) \\ M &= Z_{\max}^2 (\ln Z_{\max}^2 - 1) - Z_{\min}^2 (\ln Z_{\min}^2 - 1) \\ N &= Z_{\max} (\ln Z_{\max}^2 - 2) - Z_{\min} (\ln Z_{\min}^2 - 2) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (25)$$

また

$$a_1 = \frac{1}{A(A-B)}, \quad a_2 = \frac{C+D_1/2}{A(A-B)}, \quad a_3 = \frac{-C^2-D_1C}{A(A-B)} \quad \dots\dots\dots (26)$$

とおくと

$$\left. \begin{aligned} dD_{i,j-1} &= \frac{-1}{2\pi} (a_1 K + a_2 M + a_3 N) \\ \text{同様に} \\ dD_{i,j} &= \frac{-1}{2\pi} (a_4 K + a_5 M + a_6 N) \\ dD_{i,j+1} &= \frac{-1}{2\pi} (a_7 K + a_8 M + a_9 N) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (27)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} a_4 &= \frac{1}{AB}, \quad a_5 = \frac{C+D_2/2}{AB}, \quad a_6 = \frac{-C^2-D_2C-E_2}{AB} \\ a_7 &= \frac{1}{B(B-A)}, \quad a_8 = \frac{C+D_3/2}{B(B-A)}, \quad a_9 = \frac{-C^2-D_3C}{B(B-A)} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (28)$$

こうして、 j 点で評価した $d\delta_{ij}$ が求まった。これをすべての点に適用すると、1 区間当たり 2 回積分された

ことになるので

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \{ (j-1)dD_{i,j-1} + (j)dD_{i,j} + (j+1)dD_{i,j+1} \} \quad \dots\dots\dots (29)$$

ここで、 $(j-1)dD_{i,j+1}$ は $(j-1)$ 点で評価した値を示す。すべての点に適用するのではなく、一つとびに計算することもある。その場合は

$$\left. \begin{array}{l} j: \text{偶数} \quad D_{ij} = (j)dD_{i,j} \\ j: \text{奇数} \quad D_{ij} = (j-1)dD_{i,j+1} + (j+1)dD_{i,j-1} \end{array} \right\} \quad \dots\dots\dots (30)$$

式(29)、(30)どちらの式でもよいが、結果はほとんど変わらない。

2.3 負荷条件式における係数

$$\int_{x_a}^{x_b} PdX = \frac{\pi}{2} \quad \text{において}$$

$$\int_{x_a}^{x_b} PdX = \sum_{i=1}^N C_i P_i \quad \dots\dots\dots (31)$$

と書くときにはこれも Lagrange の二次公式を適用して

$$C_i = \frac{1}{2} \left[\frac{\{(X_{i-1}-X_{i-2})+(X_i-X_{i-1})\}\{2(X_i-X_{i-1})-(X_{i-1}-X_{i-2})\}}{6(X_i-X_{i-1})} + \frac{\{(X_i-X_{i-1})+(X_{i+1}-X_i)\}^3}{6(X_i-X_{i-1})(X_{i+1}-X_i)} \right. \\ \left. + \frac{\{(X_{i+1}-X_i)+(X_{i+2}-X_{i+1})\}\{2(X_{i+1}-X_i)-(X_{i+2}-X_{i+1})\}}{6(X_{i+1}-X_i)} \right] \quad \dots\dots\dots (32)$$

2.4 表面温度 表面温度式には近似計算が必要となるため、次の式により計算した。

$$\Theta_{si} - \Theta_0 = \beta S_i (X_{i+1} - X_i) \\ \times \sum_{j=1}^i \left\{ \left| \frac{X_{i+1} + X_i}{2} - X_j \right| \left| \frac{X_{i-1} + X_i}{2} - X_j \right| \right\}^{1/4} \quad \dots\dots\dots (33)$$

3. TEHL の解法

これまで準備してきたことをふまえて、いよいよ TEHL の解法を示す。未知数は等温問題と同じく H_{00} , H_c および P_j , $j=2, \dots, N$ である。

前報で示したように、無次元化した熱 Reynolds 方程式は式(34)で示される。

$$K(y) \frac{dP}{dX} = \frac{\pi^2 U_0 \varepsilon}{2 W^2} \exp(G^* P) \frac{H - H_c}{H^3} \quad \dots\dots\dots (34)$$

熱 Reynolds 方程式(34)を次のように変形する。

$$f_i(H_{00}, H_c, P_j) \\ = H_i^3 K(y_i) \{ \exp(-G^* P_{i+1}) - \exp(-G^* P_i) \} \\ + \frac{\pi^2 G^* U_0}{2 W^2} \varepsilon \Delta_i (H_i - H_c) = 0 \quad \dots\dots\dots (35)$$

上式の変形に対して重要なノウハウが二つ含まれている。一つは

$$-G^* \exp(-G^* P) \frac{dP}{dX} = \frac{d}{dX} \{ \exp(-G^* P) \} \quad \dots\dots\dots (36)$$

であり、差分形にしたときに精度が向上する。

もう一つは、無縁根を含ませないということから Euler の差分

$$\frac{d}{dx} \{ \exp(-G^* P) \} \\ = \frac{\exp(-G^* P_{i+1}) - \exp(-G^* P_i)}{X_{i+1} - X_i} \quad \dots\dots\dots (37)$$

が用いられている。式(35)の $f_i \rightarrow 0$ とすれば解が求まったことになる。この f_i をニュートンラフソン法によって $f_i \rightarrow 0$ とすれば解が求まる。すなわち、ニュートンラフソンの反復形は次のようになる。

$$\mathbf{A}^{(n)} \mathbf{X}^{(n+1)} = \mathbf{B}^{(n)} \quad \dots\dots\dots (38)$$

n は反復回数である。ここに

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial H_c} & \frac{\partial f_1}{\partial P_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial P_N} & \frac{\partial f_1}{\partial H_{00}} \\ \frac{\partial f_2}{\partial H_c} & \frac{\partial f_2}{\partial P_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial P_N} & \frac{\partial f_2}{\partial H_{00}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_N}{\partial H_c} & \frac{\partial f_N}{\partial P_2} & \dots & \frac{\partial f_N}{\partial P_N} & \frac{\partial f_N}{\partial H_{00}} \\ 0 & C_2 & \dots & C_N & 0 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (39)$$

$$\mathbf{X} = [H_c \ P_2 \ \dots \ P_N \ H_{00}]^T \quad \dots\dots\dots (40)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial H_c} + \sum_{j=2}^N \frac{\partial f_1}{\partial P_j} P_j + \frac{\partial f_1}{\partial H_{00}} H_{00} - f_1 \\ \frac{\partial f_2}{\partial H_c} H_c + \sum_{j=2}^N \frac{\partial f_2}{\partial P_j} P_j + \frac{\partial f_2}{\partial H_{00}} H_{00} - f_2 \\ \vdots \\ \frac{\partial f_N}{\partial H_c} H_c + \sum_{j=2}^N \frac{\partial f_N}{\partial P_j} P_j + \frac{\partial f_N}{\partial H_{00}} H_{00} - f_N \\ \frac{\pi}{2} \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (41)$$

これらの中に含まれる微係数はそれぞれ y の関数である。この点が等温理論との違いになる。

$$\frac{\partial f_i}{\partial H_{00}} = 3H_i^2 K_i \{ \exp(-G^* P_{i+1}) - \exp(-G^* P_i) \}$$

$$+ H_i^3 \frac{\partial K_i}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial H_{00}} \{ \exp(-G^* P_{i+1}) - \exp(-G^* P_i) \} + \frac{\pi^2 G^* U_0}{2 W^2} \times \Delta_i \left\{ \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial H_{00}} (H_i - H_c) - \varepsilon_i \right\} \dots\dots\dots (42)$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial H_c} = -\frac{\pi^2 G^* U_0}{2 W^2} \Delta_i \left\{ \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial H_c} (H_i - H_c) - \varepsilon_i \right\} \dots\dots\dots (43)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_i}{\partial P_j} = & 3 H_i^2 \frac{\partial H_i}{\partial P_j} K_i \{ \exp(-G^* P_{i+1}) - \exp(-G^* P_i) \} \\ & + H_i^3 \frac{\partial K_i}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial P_j} \{ \exp(-G^* P_{i+1}) - \exp(-G^* P_i) \} \\ & + H_i^3 K_i (-G^*) \{ \exp(-G^* P_{i+1}) \delta(i+1, j) - \exp(-G^* P_i) \delta(i, j) \} \\ & + \frac{\pi^2 G^* U_0}{2 W^2} \Delta_i \left\{ \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial P_j} H_i + \varepsilon_i \frac{\partial H_i}{\partial P_j} \right\} \dots\dots\dots (44) \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_i}{\partial P_j} = D_{ij}, \quad \frac{\partial K_i}{\partial y_i} = K'(y_i) \quad [K(y) \text{ の式を } y \text{ で微分}] \\ \frac{\partial H_i}{\partial H_{00}} = 1, \quad \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial H_c} = 0 \end{aligned}$$

である。

$\frac{\partial y_i}{\partial H_{00}}, \frac{\partial y_i}{\partial P_j}, \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial H_{00}}, \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial P_j}$ については、エネルギー方程式、表面温度式、粘度の回帰式などを用いて求めることになる。大変長くなるので、以下、考え方だけを示すことにする。

エネルギー方程式は差分化したあとの形は

$$F_1(y_i, H_i, \theta_{si}, \varepsilon_i, P_{i-1}, P_i, P_{i+1}) = 0 \dots\dots\dots (45)$$

ここで

$$\theta_{si} = F_2(y_j, H_j), \quad j=1, \dots, i \dots\dots\dots (46)$$

$$\varepsilon_i = F_3(\theta_{si}) \dots\dots\dots (47)$$

式(45)を H_{00} で偏微分すると

$$F_1 \left(\frac{\partial y_i}{\partial H_{00}}, \frac{\partial H_i}{\partial H_{00}}, \frac{\partial \theta_{si}}{\partial H_{00}}, \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial H_{00}} \right) = 0 \dots\dots\dots (48)$$

ここで H_{00}, P_i は求める未知数であり、この際の独立変数であるから $\frac{\partial P_i}{\partial H_{00}}$ などは考えない。

また、

$$\frac{\partial \varepsilon_i}{\partial H_{00}} = \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial \theta_{si}} \cdot \frac{\partial \theta_{si}}{\partial H_{00}} \dots\dots\dots (49)$$

ここで $\frac{\partial \varepsilon_i}{\partial \theta_{si}}$ は、粘度と温度の関係式から求められる。

一例を付録2に示した。

$$\frac{\partial \theta_{si}}{\partial H_{00}} = F_2 \left(\frac{\partial y_j}{\partial H_{00}}, \frac{\partial H_j}{\partial H_{00}} \right), \quad j=1, \dots, i \dots\dots\dots (50)$$

ここで $\frac{\partial y_j}{\partial H_{00}}$ を番号 i が小さいほうから順に求めてく

ると $\left\{ \frac{\partial y_j}{\partial H_{00}}, j=1, \dots, j-1 \right\}$ は既知量となる。また

$\frac{\partial H_j}{\partial H_{00}} = 1$ であるから、結局 $\frac{\partial \theta_{si}}{\partial H_{00}} = F_2 \left(\frac{\partial y_i}{\partial H_{00}} \right)$ であ

る。したがって式(48)は

$$F_1 \left(\frac{\partial y_i}{\partial H_{00}}, \text{その他の既知量} \right) = 0 \dots\dots\dots (51)$$

となるから $\frac{\partial y_i}{\partial H_{00}}$ について解くことができる。

同様に式(45)を P_j で偏微分すると

$$F_1 \left\{ \frac{\partial y_i}{\partial P_j}, D_{ij}, \frac{\partial \theta_{si}}{\partial P_j}, \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial P_j}, \delta(i-1, j), \delta(i, j), \delta(i+1, j) \right\} = 0 \dots\dots\dots (52)$$

$$\frac{\partial \varepsilon_i}{\partial P_j} = \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial \theta_{si}} \cdot \frac{\partial \theta_{si}}{\partial P_j} \dots\dots\dots (53)$$

$$\frac{\partial \theta_{si}}{\partial P_j} = F_2 \left(\frac{\partial y_k}{\partial P_j}, D_{kj} \right), \quad k=1, \dots, i \dots\dots\dots (54)$$

図1 計算の流れ図

図2 油膜内温度分布 ($G=3737$, $W=3.2 \times 10^{-5}$, $U=10^{-11}$, $s=0$)

ここでも $\frac{\partial y_i}{\partial P_j}$ は i の番号の小さいほうから解いてくると $\left\{ \frac{\partial y_k}{\partial P_j}, k=1, \dots, j-1 \right\}$ は既知量となるから $\frac{\partial y_i}{\partial P_j}$ について解くことができる。

以上ですべての微係数が求まったことになるので式(38)を解くことができる。

最後に出口の位置 X_0 は、油膜厚さ $H_i = H_c$ となる位置から求められることは等温理論と同様である。一連の計算について、簡単な流れ図を図1に示す。

4. 計算結果

図2, 3はDowson⁽³⁾論文に近い入力値を使って、油膜内温度分布を図示したものである。文献⁽³⁾では ρ の影響が考慮されているが、本計算では便宜上 ρ を一定としたため直接比較はできないが、少なくとも定性的な傾向の一致は認められる。図2, 3の圧力スパイク直下の上昇温度は、文献⁽³⁾に比して高くなっているようである。この原因としては、 ρ を一定としたため圧力スパイクが高くなったことにあるのか、温度分布を二次式に近似したことにあるのか詳細は不明である。いずれにしても実験による検証が必要と思われる。

図4は、圧力、油膜厚さに関する等温EHLとTEHLの比較である。発熱を考慮すると、若干圧力スパイクが低くなる。油膜厚さも若干薄くなるが、その差は大きくない。入力値は、 $G=3960$, $W=1.5 \times 10^{-5}$, $U=5 \times 10^{-12}$, $B=2 \times 10^{-21}$, $F=1.5 \times 10^{-2}$, $D=1.8 \times 10^{-4}$, $\theta_0=13.15$ である。今後この値で計算した。

図5, 6はTEHL解析におけるスリップ比 s の影響を示したものである。圧力スパイクは s が大きくなると低くなる。油膜厚さも s が大きくなると薄くなるがその差は大きいとは言えない。一般にスリップ比が大きくなると発熱の影響が大きくなるが、これらはエ

図3 油膜内温度分布 ($G=3737$, $W=3.2 \times 10^{-5}$, $U=10^{-11}$, $s=0.1$)

ネルギー方程式の中で、スリップ比 s が二乗の形で入っていることに原因している。

図7, 8はエネルギー分布を示す。 $s=0$ のときは $s=0.3$ に比して1けたエネルギーが小さくなる。スリップ比 s が大きくなるとViscous heatingとConduction coolingが支配的になり、他の要因は無視できるようになる。

図9~12は油膜中央の上昇温度について、図7, 8に対応した結果を示す。図9, 10は図7に示したようにエネルギーが小さいことに対応して上昇温度も小さ

図4 等温EHLとTEHLの比較

図6 H に対する s の影響

図5 P に対する s の影響

図7 エネルギー分布 ($s=0$)

図8 エネルギー分布 ($s=0.3$)

図9 $\Delta\theta$ 分布 ($s=0$) ($E_{vh} = E_{dc}$)

図10 $\Delta\theta$ 分布 ($s=0$) ($E_{vh} + E_{ch} = E_{dc} + E_{vc}$)

図 11 $\Delta\theta$ 分布 ($s=0.3$)
($E_{vh}=E_{dc}$) 図 12 $\Delta\theta$ 分布 ($s=0.3$)
($E_{vh}+E_{ch}=E_{dc}+E_{vc}$) 図 13 $\Delta\theta_s$ 分布 図 14 B_0 に対応した $\Delta\theta$ 分布

い。図 11, 12 は図 8 に対応して上昇温度は大きくなる。加えて図 11 と図 12 はほぼ同じ分布であり、 s が大きいときは $E_{vh}=E_{dc}$ で十分であることを示している。 $s=0$ のときでも、ある程度 $E_{vh}=E_{dc}$ で議論できそうである。特別な事情で詳細に検討したいときに限り、エネルギー方程式は 4 項全部を考えた方がよいと考える。

図 13 は壁温上昇温度の計算例である。油膜中央と同様に、スリップが増加すると上昇温度は大きくなる。TEHL のパラメータ B_0 についてその影響を調べたのが図 14 である。 B_0 は比較的影響が大きく、その値が小さいほど発熱が大きい。

図 15 はトラクション係数を示したものである。TEHL ではスリップ比 s の増加に伴い、等温 EHL と比べて小さくなっている。また、 s の増加に伴い、その増加割合は減少する。

5. 結 論

以上の結果から以下のような結論としたい。

(1) 油膜厚さ方向に温度分布が二次式と仮定すると TEHL の問題は、大変シンプルなものとなる。Dowson の計算結果と比較すると、定性的な一致はみられる。

(2) 無次元パラメータ y を用いて、熱 Reynolds 方程式およびエネルギー方程式を記述し、ニュートンラフソン法による解法を示し、その有用性を示した。

図 15 トラクション係数

(3) 一般的に油膜の発熱を考慮した場合、圧力スパイクおよび油膜厚さは若干減少する。

(4) エネルギー方程式としては、ほとんどの場合 Viscous heating = Conduction cooling で十分と考えられる。

(5) パラメータ B_0 は、その値が小さくなるほど、発熱が大きくなる。パラメータ D の影響は小さい。

(6) トラクション係数は、スリップ比 s が大きくなると増加割合は減少する。この原因はエネルギー方程式の中で s^2 の形で効いてくるためである。

本研究について、京都大学名誉教授森美郎先生にご指導を受けた。ここに厚くお礼申し上げる。また、武蔵工業大学染谷常雄教授、東京大学田中正人教授、および東燃(株)三井博士に折にふれて助言をいただいた。ここに感謝の意を表する。

付録 1 エネルギー方程式における係数

$$C_1 = -16\gamma F U_0 A_i \epsilon_i \theta_i$$

$$C_2 = -32\gamma^2 F A_i^2 \theta_i$$

$$C_3 = -\frac{32}{3} \gamma^2 F U_0 A_i \epsilon_i$$

$$C_4 = 16\gamma^2 F A_i^2$$

$$C_5 = 32\gamma^2 A_i^2$$

$$C_6 = s^2 U_0^2 \epsilon_i^2$$

$$C_7 = -8B \exp(-G^* P_i) \epsilon_i$$

$$C_8 = -\frac{32}{3} \left(\frac{8W}{\pi} \right)^{3/2}$$

$$\times D \frac{y_{i+1}}{\Delta_i} U_0 H_i^2 \epsilon_i \exp(-G^* P_i)$$

$$C_9 = \frac{32}{3} \left(\frac{8W}{\pi} \right)^{3/2}$$

$$\times D \frac{1}{\Delta_i} U_0 H_i^2 \epsilon_i \exp(-G^* P_i)$$

$$C_{10} = 128 \left(\frac{8W}{\pi} \right)^{3/2} D \frac{y_{i+1}}{\Delta_i} \gamma H_i^2 A_i \exp(-G^* P_i)$$

$$C_{11} = -128 \left(\frac{8W}{\pi} \right)^{3/2}$$

$$\times D \frac{y_{i+1}}{\Delta_i} \gamma H_i^2 A_i \exp(-G^* P_i)$$

ここで

$$\begin{aligned}
A_i &= H_i^2 \frac{d(\exp(-G^*P))_i}{dX_i} \\
&= H_i^2 \{a_{i-1} \exp(-G^*P_{i-1}) + a_i \exp(-G^*P_i) \\
&\quad + a_{i+1} \exp(-G^*P_{i+1})\} \\
a_{i-1} &= -\frac{\Delta_2}{\Delta_1(\Delta_1 + \Delta_2)}, \quad a_i = -\frac{\Delta_1 - \Delta_2}{\Delta_1 \Delta_2} \\
a_{i+1} &= \frac{\Delta_1}{\Delta_2(\Delta_1 + \Delta_2)}, \quad \Delta_1 = X_i - X_{i-1}, \quad \Delta_2 = X_{i+1} - X_i \\
\gamma &= \frac{W^2}{\pi^2 G^*}
\end{aligned}$$

である。

付録2 $\frac{\partial \varepsilon_i}{\partial \theta_{si}}$ の求め方の一例

壁温 $\theta_s(^{\circ}\text{C})$ における粘性 $\eta_s[\text{Pa}\cdot\text{s}]$ の回帰式として

$$\eta_0 = \exp\left(\frac{a_0 + a_1 \theta_s}{a_2 + \theta_s}\right) \text{ を使ってみる。ある基準温度 } \theta_{s0}$$

における粘性は

$$\eta_{00} = \exp\left(\frac{a_0 + a_1 \theta_{s0}}{a_2 + \theta_{s0}}\right)$$

したがって, $\varepsilon_i = \frac{\eta_0(\theta_{si})}{\eta_{00}(\theta_{si})}$, および無次元温度 $\theta_{si} =$

$\beta \theta_{si}$ より

$$\frac{\partial \varepsilon_i}{\partial \theta_{si}} = \frac{a_1 a_2 - a_0}{\beta(a_2 + \theta_{si}/\beta)^2} \exp\left(\frac{a_0 + a_1 \theta_{si}/\beta}{a_2 + \theta_{si}/\beta}\right)$$

文 献

- (1) 岡村・藤原, 機論, 58-550, C(1991), 1897.
- (2) Houpert, L. G. and Hamrock, B. J., *Trans. ASME J. Tribol.*, 108-3(1986), 411.
- (3) Dowson, D. and Whitaker, A. V., *Proc. Inst. Mech. Eng.*, 180 pt. 3 B(1965-1966), 57.