数値逆ラプラス変換の連続体の振動問題への適用に関する一考察*

橋 本 良 夫^{*1}

A Note on the Application of the Numerical Inversion Method of the Laplace Transform to the Vibration Problems of a Continuous System

Yoshio HASHIMOTO

The numerical inversion method of the Laplace transform, FILT (fast inversion of Laplace transform), which was developed by Hosono, yields an admirable accuracy when the singular points of the Laplace transform have finite values. In the forced vibration problems of a finite continuous system, FILT cannot estimate the effect of higher natural modes accurately because the Laplace transform of the displacement has infinite singular points that are distributed discretely and form an unbounded sequence. In spite of this fact, FILT is useful in such vibration problems. The results obtained using FILT agree with the ones obtained using the mode acceleration method except at an early stage.

Key Words: Vibration of Continuous System, Transient Response, Laplace Transform, Numerical Inversion, Forced Vibration

1. ま え が き

ラプラス逆変換を数値的に行うために各種の方法が提案されている。その中でも細野によって提案された FILT (fast inversion of Laplace transform)⁽¹⁾⁽²⁾ は、誤差の制御、プログラムの容易さなど優れた特徴を持っている。著者もこの方法を移動荷重を受けるはりの振動問題に適用し、精度の良い結果が得られることを以前報告⁽³⁾した。

この FILT の誤差に関しては開発者の細野自身が詳しく研究しており、像関数の特異点の虚部が有限の値を取る場合にはラプラス逆変換が高精度に計算できることが示されている。

ところが、有限の大きさの連続体の振動問題の場合、固有値が離散的に無数に存在し、その虚部の最大値は無限大となる。したがって、厳密に言えば、このような問題に FILT を適用することはできない。しかし、現実には、このような問題に対して FILT を適用しても、かなり精度のよい結果が得られることが多い。

本報告では、有限な大きさの連続体の振動問題に FILT を適用して得られる近似解について簡単な検討

を行ったのでその結果を報告する。

2. 理論的な検討

2・1 FILT の基礎式 ラプラス変換およびラプラス逆変換は次のように定義される。

$$\tilde{f}(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \tilde{f}(s) e^{st} ds \quad \dots\dots\dots (2)$$

ここで、 $i = \sqrt{-1}$ である。以後、簡単のためラプラス変換を記号 $\sim$ で表すことにする。

関数 $f(t)$ のラプラス変換 $\tilde{f}(s)$ を FILT を用いて逆変換することによって得られる関数 $f_F(t)$ は次のように表される。

$$f_F(t) = L^{-1}\{\tilde{f}(s)\} = \frac{e^a}{t} \left\{ \sum_{n=1}^k \tilde{f}_n + \frac{1}{A_{p0}} \sum_{l=1}^p A_{pl} \tilde{f}_{k+l} \right\} \quad \dots\dots\dots (3)$$

ここで、

$$\tilde{f}_n = (-1)^n \text{Im}[\tilde{f}(s_n)], \quad s_n = \frac{a + i(n-0.5)\pi}{t}$$

$$A_{pp} = 1, \quad A_{p, l-1} = A_{pl} + \rho C_{l-1}$$

であり、 ρC_l は組合せである。以後、簡単のため FILT による逆変換を記号 $L^{-1}\{\}$ で表すことにする。式(3)の右辺第2項は無限級数の計算をオイラー変換に

* 原稿受付 平成3年12月4日。

^{*1} 正員、九州大学応用力学研究所(〒816 春日市春日公園6-1)。

よって加速するためのものであり、オイラー変換が有効なためには、 k を t の一次式

$$k = k_1 + k_2 t \dots\dots\dots (4)$$

として、

$$k_2 = \frac{J_{\max}\{\tilde{f}(s)\}}{\pi} \dots\dots\dots (5)$$

とすればよいことが示されている⁽¹⁾。なお、 $J_{\max}\{\tilde{f}(s)\}$ は像関数 $\tilde{f}(s)$ の特異点の中で虚部が最大となるものの虚部の値を表すものとする。このように FILT では、4 個のパラメータ a, k_1, k_2 および p によって誤差を制御する。

2・2 FILT の連続体の振動問題への適用 ここでは、有限な大きさの連続体の振動問題として固有モードの直交性が成り立つ場合を考える。このとき、変位 u を固有モード ϕ_n と一般化座標 q_n の一次結合

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) q_n(t) \dots\dots\dots (6)$$

で表すと、減衰がない場合、一般化座標 q_n の強制振動の方程式は、

$$\frac{d^2 q_n}{dt^2} + \omega_n^2 q_n = f_n(t), \quad (n=1, 2, \dots, \infty) \dots\dots (7)$$

と表すことができる。ここで、 ω_n は固有振動数、 f_n は一般化力である。これより、初期条件として静止条件をとると、変位 u の厳密解は、

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) \int_0^t f_n(\tau) \frac{\sin \omega_n(t-\tau)}{\omega_n} d\tau \dots\dots\dots (8)$$

また、そのラプラス変換 $\tilde{u}$ は、

$$\tilde{u}(x, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) \frac{\tilde{f}_n(s)}{s^2 + \omega_n^2} \dots\dots\dots (9)$$

となる。このとき、 $s = \pm i\omega_n$ は $\tilde{u}$ の特異点であり、 $\omega_n \rightarrow \infty (n \rightarrow \infty)$ であるから、FILT を用いて $\tilde{u}$ を逆変換する場合、式(5)によって k_2 を決めるなら、 $k_2 = \infty$ としなければならない。このことより、厳密に言えば、このような問題に FILT を適用することはできないことになる。

しかし、現実には k_2 を有限な値にとって計算してもかなり精度のよい結果が得られることが多い。そこで、 $\tilde{f}_n(s)/(s^2 + \omega_n^2)$ を考えると、 $|s| < \omega_n$ のとき、

$$\frac{\tilde{f}_n(s)}{s^2 + \omega_n^2} = \tilde{f}_n(s) \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{s^{2j}}{\omega_n^{2j+2}}, \quad |s| < \omega_n \dots\dots (10)$$

と表すことができる。したがって、 k_2 が $\omega_n > \pi k_2 > J_{\max}\{\tilde{f}_n(s)\}$ となる場合、 $\tilde{f}_n(s)/(s^2 + \omega_n^2)$ を FILT を用いて逆変換すると、 $|s_{k+p}| < \omega_n$ が成り立つような時刻 t においては、

$$L^{-1}\left\{\frac{\tilde{f}_n(s)}{s^2 + \omega_n^2}\right\} = \frac{f_n(t)}{\omega_n^2} - \frac{1}{\omega_n^4} \frac{d^2 f_n(t)}{dt^2} + \dots \dots\dots (11)$$

となることが予想される。さらに $\omega_n \gg 1$ なら、

$$L^{-1}\left\{\frac{\tilde{f}_n(s)}{s^2 + \omega_n^2}\right\} \approx \frac{1}{\omega_n^2} f_n(t) \dots\dots\dots (12)$$

になるものと考えられる。したがって、 $\omega_{N+1} > \pi k_2 > \omega_N$ とした場合、 t が大きくなると、次の近似式が成立するものと思われる。

$$L^{-1}\{\tilde{u}(x, s)\} \approx \sum_{n=1}^N \phi_n(x) \int_0^t f_n(\tau) \times \frac{\sin \omega_n(t-\tau)}{\omega_n} d\tau + \sum_{n=N+1}^{\infty} \phi_n(x) \frac{f_n(t)}{\omega_n^2} \dots (13)$$

ただし、

$$\omega_N \geq J_{\max}\{\tilde{f}_n(s)\}, \quad (n=1, 2, \dots, \infty) \dots\dots\dots (14)$$

が成り立っているものとする。なお、式(13)の右辺は、有限要素法などの動的応答解析のときに用いられる Mode Acceleration Method⁽⁴⁾ を無限自由度を有する系に拡張したものであることからここでも同じ名前で呼ぶことにする。式(13)においては、低次モードの影響は正確に計算されるが、高次モードの影響は準静的なものとして計算されている。このように Mode Acceleration Method を適用すると、いくつかの低次モードのみを用いて解いた場合に比べ一般に解の精度が向上する。

以上の考察より、有限な大きさの連続体の振動問題に FILT を適用した場合、時刻 t が大きくなると、得られる結果は Mode Acceleration Method を用いたものとほぼ等しくなることが予想される。

3. 数値例による検討

前記の予想を確認するために、簡単なモデルについて数値的な検討を行う。ここでは FILT を用いて計算した結果と、厳密解、低次モードのみを考えた低次モード解および Mode Acceleration Method より計算した結果を比較する。なお、比較には次のようなノルムを用いた。

$$\|f(t)\| \equiv \sqrt{h \left(\frac{f_0^2 + f_M^2}{2} + \sum_{n=1}^{M-1} f_n^2 \right)} \dots\dots\dots (15)$$

ここで、

$$h = (t_1 - t_0)/M, \quad f_n = f(t_0 + nh), \quad (n=0, 1, \dots, M)$$

である。なお、上記の $\|f(t)\|$ は、

$$\sqrt{\int_{t_0}^{t_1} \{f(t)\}^2 dt}$$

を等間隔の台形則で近似したものである。また、計算はすべて倍精度計算とし、 k_2 以外の FILT のパラメータは

$$a = k_1 = p = 12$$

として⁽²⁾ 計算を行っている。

3・1 集中荷重が作用する弦の場合 非常に簡単

な例として集中荷重が作用する弦の振動問題

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f(t)\delta(x-\xi), \quad 0 < x, \xi < 1 \quad (16)$$

を考える。ここで、 $u(x, t)$ は弦の変位、 $f(t)$ は荷重の大きさ、 $\delta(x)$ はディラックのデルタ関数、 ξ は荷重の作用する点である。境界条件および初期条件は次のように与えられているものとする。

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0$$

これより、変位 $u(x, t)$ を

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin n\pi x q_n(t) \quad (17)$$

とおくと、

$$\frac{d^2 q_n}{dt^2} + \omega_n^2 q_n = 2f(t) \sin n\pi \xi, \quad (n=1, 2, \dots, \infty) \quad (18)$$

となる。ここで、 $\omega_n = n\pi$ である。これより、変位の厳密解 $u_E(x, t)$ は、

$$u_E(x, t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sin n\pi x \sin n\pi \xi \times \int_0^t f(\tau) \frac{\sin \omega_n(t-\tau)}{\omega_n} d\tau \quad (19)$$

となる。なお、上式の級数は収束が遅いので、実際の厳密解の計算には、

$$u_E(x, t) = \frac{1}{2} [F(t-|x-\xi|)H(t-|x-\xi|) - F(t-|x+\xi|)H(t-|x+\xi|) + G(t-|x-1|)H(t-|x-1|) - G(t-|x+1|)H(t-|x+1|)] \quad (20)$$

を用いた。ここで、 $H(t)$ はヘビサイド関数であり、

$$F(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$$

$$G(t) = \begin{cases} -F(t-1+\xi)H(t-1+\xi) \\ + F(t-1-\xi)H(t-1-\xi), & 0 \leq t \leq 2 \\ -F(t-1+\xi) + F(t-1-\xi) \\ + G(t-2), & 2 < t \end{cases}$$

である。さらに、厳密解 $u_E(x, t)$ のラプラス変換は、

$$\tilde{u}_E(x, s) = \frac{\tilde{f}(s)}{2s} \left[e^{-s|x-\xi|} + \frac{1}{1-e^{-2s}} (e^{-s(2+\xi-x)} - e^{-s(2-\xi-x)} - e^{-s(\xi+x)} + e^{-s(2-\xi+x)}) \right] \quad (21)$$

となる。また、 N 個の低次モードのみを考えた場合の低次モード解 $u_M(x, t, N)$ および $u_M(x, t, N)$ に Mode Acceleration Method を適用した場合の解 $u_A(x, t, N)$ は、それぞれ、次のように表される。

$$u_M(x, t, N) = 2 \sum_{n=1}^N \sin n\pi x \sin n\pi \xi$$

$$\times \int_0^t f(\tau) \frac{\sin \omega_n(t-\tau)}{\omega_n} d\tau \quad (22)$$

$$u_A(x, t, N) = u_M(x, t, N)$$

$$+ 2f(t) \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\sin n\pi x \sin n\pi \xi}{\omega_n^2}$$

$$= u_M(x, t, N)$$

$$- 2f(t) \sum_{n=1}^N \frac{\sin n\pi x \sin n\pi \xi}{\omega_n^2}$$

$$+ \frac{f(t)}{2} \{ \xi + (1-2\xi)x - |x-\xi| \} \quad (23)$$

また、FILT による解 $u_F(x, t, N)$ は

$$u_F(x, t, N) = L^{-1} \{ \tilde{u}_E(x, s) \}, \quad k_2 = \frac{\omega_N}{\pi} = N \quad (24)$$

とする。上式中の第2式 $k_2 = \omega_N/\pi = N$ は FILT のパ

図1 モード数 N によるノルムの変化-弦の場合
[$f(t)=1$, $x=\xi=0.4$, $t_0=0.1$, $t_1=40.1$]

図2 モード数 N によるノルムの変化-弦の場合
[$f(t)=1$, $x=\xi=0.4$, $t_0=30$, $t_1=70$]

ラメータ k_2 を $k_2 = \omega_N / \pi$ とすることを意味している。このように k_2 を指定することによって、 N 次以下の低次モードの影響はほぼ正確に計算される。

まず、 $f(t)=1$, $x=\xi=0.4$ および $h=0.2$ としたときの計算結果を図 1, 2 に示す。ここで、 $\xi=0.4$ としたのは逆対称モードも励起するためである。図は、モード数 N を変化させたときのノルム $\|u_F(x, t, N) - u_M(x, t, N)\|$, $\|u_F(x, t, N) - u_A(x, t, N)\|$ および $\|u_F(x, t, N) - u_E(x, t)\|$ の変化を示している。図 1 は $t_0=0.1$ および $t_1=40.1$, また、図 2 は $t_0=30$ および $t_1=70$ としたときの結果である。この図よりモード数 N , つまり k_2 が大きくなるとともに、FILT による解 $u_F(x, t, N)$ が厳密解 $u_E(x, t)$ に近づいていくことがわかる。また、図 1 においてはさほどでもないが、図 2

においては $\|u_F(x, t, N) - u_A(x, t, N)\|$ がほかのノルムに比べてけた違いに小さいことがわかる。

次に、 $f(t)=t$, $x=\xi=0.4$ および $h=0.2$ としたときの計算結果を図 3, 4 に示す。図 3 は $t_0=0.1$ および $t_1=40.1$, また、図 4 は $t_0=30$ および $t_1=70$ としたときの結果である。この場合も、 $f(t)=1$ としたときの結果と同じ傾向を示している。

3.2 集中荷重が作用するはりの場合 次の例として、集中荷重が作用するはりの振動問題

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f(t)\delta(x-\xi), \quad 0 < x, \xi < 1 \cdots (25)$$

を考える。境界条件および初期条件は次のように与えられているものとする。

図 3 モード数 N によるノルムの変化-弦の場合
[$f(t)=t$, $x=\xi=0.4$, $t_0=0.1$, $t_1=40.1$]

図 5 モード数 N によるノルムの変化-はりの場合
[$f(t)=1$, $x=\xi=0.4$, $t_0=0.01$, $t_1=12.7424$]

図 4 モード数 N によるノルムの変化-弦の場合
[$f(t)=t$, $x=\xi=0.4$, $t_0=30$, $t_1=70$]

図 6 モード数 N によるノルムの変化-はりの場合
[$f(t)=1$, $x=\xi=0.4$, $t_0=5$, $t_1=17.7324$]

図7 モード数 N によるノルムの変化-はりの場合
 $[f(t)=t, x=\xi=0.4, t_0=0.01, t_1=12.7424]$

図8 モード数 N によるノルムの変化-はりの場合
 $[f(t)=t, x=\xi=0.4, t_0=5, t_1=17.7324]$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad \frac{\partial^2 u(0, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(1, t)}{\partial x^2} = 0$$

$$u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0$$

これより、変位の厳密解 $u_E(x, t)$ および低次モード解 $u_M(x, t, N)$ は、式(19)および式(22)とまったく同じ形で表される。ただし、この場合、固有振動数は $\omega_n = (n\pi)^2$ になる。また、Mode Acceleration Method を適用した場合の解 $u_A(x, t, N)$ は次のように表される。

$$\begin{aligned} u_A(x, t, N) = & u_M(x, t, N) \\ & - 2f(t) \sum_{n=1}^N \frac{\sin n\pi x \sin n\pi \xi}{\omega_n^2} \\ & + \frac{f(t)}{12} \{ |x - \xi|^3 + (2\xi - 1)x^3 - 3\xi x^2 \\ & + (2\xi^2 - 3\xi + 4)\xi x - \xi^3 \} \dots\dots\dots (26) \end{aligned}$$

なお、厳密解 $u_E(x, t)$ のラプラス変換 $\tilde{u}_E(x, s)$ は次式で表される。

$$\begin{aligned} \tilde{u}_E(x, s) = & \frac{\tilde{f}(s)}{4(\sqrt{s})^3} \left[ie^{i\sqrt{s}|x-\xi|} - e^{-\sqrt{s}|x-\xi|} \right. \\ & + \frac{1}{e^{-2\sqrt{s}} - 1} (e^{-\sqrt{s}(2+\xi-x)} - e^{-\sqrt{s}(2-\xi-x)}) \\ & - e^{-\sqrt{s}(\xi+x)} + e^{-\sqrt{s}(2-\xi+x)} \\ & + \frac{i}{e^{2i\sqrt{s}} - 1} (e^{i\sqrt{s}(\xi+x)} - e^{i\sqrt{s}(2-\xi+x)}) \\ & \left. - e^{i\sqrt{s}(2+\xi-x)} + e^{i\sqrt{s}(2-\xi-x)} \right] \dots\dots\dots (27) \end{aligned}$$

これより、FILT による解 $u_F(x, t, N)$ は

$$\begin{aligned} u_F(x, t, N) = & L^{-1} \{ \tilde{u}_E(x, s) \}, \quad k_2 = \frac{\omega_N}{\pi} = N^2 \pi \\ & \dots\dots\dots (28) \end{aligned}$$

とする。

まず、 $f(t)=1, x=\xi=0.4$ および $h=6.3662 \times 10^{-2}$

としたときの計算結果を図5, 6に示す。図5は $t_0=0.01$ および $t_1=12.7424$ 、また、図6は $t_0=5$ および $t_1=17.7324$ としたときの結果である。次に、 $f(t)=t, x=\xi=0.4$ および $h=6.3662 \times 10^{-2}$ としたときの計算結果を図7, 8に示す。図7は $t_0=0.01$ および $t_1=12.7424$ 、また、図8は $t_0=5$ および $t_1=17.7324$ としたときの結果である。はりの場合の結果も弦の場合の結果とほぼ同じ傾向を示している。

わずかな数例の計算結果であるが、時刻 t が大きくなると FILT による計算結果が Mode Acceleration Method を用いた計算結果とほぼ等しくなることが確認された。

4. あとがき

以上の簡単な検討より次のことがいえる。細野によって開発された数値逆ラプラス変換法 FILT を有限な大きさの連続体の振動問題に適用した場合、原理的にすべてのモードの影響を正確に計算することはできない。しかし、時刻 t が大きくなると、FILT による計算結果は Mode Acceleration Method を用いた計算結果とほぼ等しくなり、一般に低次モードのみを用いた低次モード解より高精度の結果が得られる。

文 献

- (1) 細野, BASIC による高速ラプラス変換, (1984), 47, 共立出版.
- (2) 細野, *bit*, 15-10(1983), 1158.
- (3) 橋本, 九大応力研所報, 63(1987), 189.
- (4) Petyt, M., *Introduction to Finite Element Vibration Analysis*, (1990), 479, Cambridge University Press.