流れによる容器内液面の自励振動*

(第3報, 完全流体モデル)

班目 春樹^{*1}, 岡本 孝司^{*1}, 萩原 剛^{*1}

Self-Induced Oscillation of Free Surface in a Tank with Circulating Flow (3rd Report, Ideal Fluid Model)

Haruki MADARAME, Koji OKAMOTO and Tsuyoshi HAGIWARA

A new model explaining the energy supply mechanism to self-induced sloshing in a tank with circulating flow is proposed. The oscillation energy is considered to be supplied by pressure fluctuations caused by the interaction between the circulating flow and the sloshing motion. When the direction of the under-water-surface stream of sloshing motion coincides with the steady circulation, the dynamic pressure increases and the ensuing static pressure reduction causes an imbalance between the fluid and the atmosphere. If the static pressure reduces more in the region where the free surface is descending, the work done by the imbalance supplies energy to the sloshing oscillation.

Key Words: Self-induced Oscillation, Sloshing, Circulating Flow, Wave, Flow-induced Vibration

1. 緒 言

著者らは先に、循環流の存在するく形容器内液面が自励的にスロッシングを生じる現象を発見し、報告した⁽¹⁾。その後、同様な現象の発生はほかのく形容器⁽²⁾、円筒容器⁽³⁾についても報告されている。

気泡の上昇運動がスロッシングを引起こすことは古くから知られている⁽⁴⁾⁽⁵⁾。しかしながら今回発見された現象の場合気泡は存在せず、気泡による振動でないことは明らかである。今回の現象とよく似たものとして、温度成層界面の自励振動がある⁽⁶⁾。この振動も上層流体がほぼ静止しており下層流体に循環流が存在する場合に発生するもので、振動発生条件となる循環流の位置、形状など類似性は強い。成層界面振動については数値解析によるシミュレーションも試みられており⁽⁷⁾、現象はよく再現できるものの、発生機構を論じた文献は少ない。著者らの一人は、界面において下層流体による上層流体の連行すなわち上層流体の下層流体中への取込みが顕著にみられることに着目し、上層流体の周期的連行が振動発生原因であるとするモ

デルを提唱した⁽⁸⁾。しかしながらこのモデルは今回の現象には適用できない。自由液面の上にある空気の中への連行は今回の現象では認められない。もし自由液面のスロッシングと温度成層界面のスロッシングが同一機構で生じているのなら、このモデルの見直しも必要となる。

著者らは前報において、循環流による液面の局所的盛上がりに着目し、平均液位が高くなるほど局所的盛上がり量が増えるような場合に振動を生じるとするモデルを提唱した⁽⁹⁾。このモデルは自励的スロッシングを生じる体系に独特な流れの性質に注目したもので、なぜある条件においてだけ振動が発生するのかを説明するには優れている。しかしながら、局所的盛上がりの移流など物理的意味のあいまいなものを取り入れるなど、やや明解さに欠ける。実際の現象は循環流とスロッシングが共存している上に、流動現象の非線形性による二次流れを伴う複雑なものである。現象の観察では、局所的盛上がりや表面の循環流を遡る遡上波の生成などの二次流れの発生にとらわれがちになる。しかしながら重要なのは二次流れなどの発生原因のほうである。本報では、液面の変形や二次流れを無視したモデルを用いてスロッシング発生機構を考察する。ここでは現象を構成する最少限の要素、循環流とスロ

* 原稿受付 平成4年1月13日。

^{*1} 正員、東京大学工学部附属原子力工学研究施設(●319-11 茨城県那珂郡東海村白方白根2-22)。

シング運動とを完全流体の流れに置き換え、数学的に最も単純な定式化によって両者の相互作用を分析する。

循環流れ場でのスロッシングは耐震設計の立場などからも研究がなされつつあるが⁽¹⁰⁾、自励振動は定常運転状態で生じるだけに十分把握しておく必要がある。すなわち現象として興味深いものであるばかりでなく、実際面においても原子力プラントや化学プラントなどの設計において考慮されるべき現象であり、今後さらに一層の研究を要する。

記 号

- A_1 : スロッシング振幅
- E : 全振動エネルギー
- ΔE : 振動エネルギー増分
- e : 渦中心の片寄り
- g : 重力加速度
- h : 液位 (水深)
- p_a : 大気圧
- p_s : 液面静圧
- t : 時間
- U_0 : 循環流による液面流速
- U_1 : スロッシングによる液面流速 (x 方向)
- $U_{\max}$: 循環流による液面最高流速
- V_1 : スロッシングによる液面流速 (y 方向)
- W : 容器幅
- x : 水平方向座標
- y : 垂直方向座標
- δ : 右端頂部とへこみ底部の液位差
- Γ : 渦の強さ
- ϕ_0 : 循環流の速度ポテンシャル
- ϕ_1 : スロッシングの速度ポテンシャル
- ρ : 液体密度
- ω : 円振動数

2. ポテンシャル流れモデル

二次元く形容器 $-W/2 < x < W/2$, $-h < y$ の内部に、 $y < 0$ まで液体が入っている状態を考える。その内部の流れが式(1)の速度ポテンシャルで与えられるとする。

$$\phi_0 = \frac{\Gamma}{2\pi} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{i=-\infty}^{\infty} (-1)^j \left\{ \tan^{-1} \frac{y - (2j+1)h/2}{x - 2iW - e} - \tan^{-1} \frac{y - (2j+1)h/2}{x - (2i+1)W + e} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

この流線を図1(a)に示す。流れは境界上で法線方向速度が零であり、また点 $(-h/2, e)$ に強さ $-\Gamma$ の渦

を有する以外は境界内部で渦なし流れ (ポテンシャル流れ) である。液面 $y=0$ での流速分布は式(2)となる。

$$U_0 = \frac{\Gamma}{2h} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \left\{ \operatorname{sech} \pi \frac{x - (2i+1)W + e}{h} - \operatorname{sech} \pi \frac{x - 2iW - e}{h} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

図2に液面流速分布を h/W , e/W をパラメータとして示す。液面の最高流速は渦の強さに比例する。また、 h/W が非常に小さいときは h に反比例して大きくなり、 h が大きいところでは指数関数的に小さくなる。 e/W は渦の片寄りを表すパラメータで、零のときは液面流速分布は左右対称であり、これが大きくなるほど非対称性が強くなる。

液面流速が式(2)で与えられ、かつ液面位置が $y=0$ のままであるとすると、液面での静圧分布はベルヌーイの定理から式(3)となる。

$$p_s = p_a - \frac{1}{2} \rho U_0^2 \dots\dots\dots (3)$$

ここに p_a は液面に接する大気の圧力で、よどみ点に

(a) 循環流れ場

(b) スロッシング場

図1 仮定した流れ場の流線

において液体の圧力は大気圧に釣合っているとした。実際には液面では常に液体の静圧と大気圧力が釣合っていないから液面の変形を生じ、静圧の高いところは盛上がり、低いところはへこむ。すなわち $x = \pm W/2$ では液面は盛上がり、 $x = e$ 付近にはへこみを生じる。この変形により境界条件が変わってくるから、フローパターンも若干影響を受ける。ここではこの定常的変形はスロッシングの励振機構と直接関係しないとして無視する。

く形容器内の基本モードのスロッシングは、循環流がない場合、式(4)の速度ポテンシャルで表すことができる。

$$\phi_1 = A_1 \frac{\omega W}{\pi} \frac{\cosh \pi(y+h)/W}{\sinh \pi h/W} \sin \pi x/W \sin \omega t \quad \dots\dots\dots (4)$$

ここに A_1 は液面振幅であり、ここでは非常に小さいと仮定する。円振動数 ω は重力加速度を g として式(5)で与えられる。

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi g}{W} \tanh \frac{\pi h}{W}} \quad \dots\dots\dots (5)$$

図1(b)に基本モードのスロッシングの流線を示す。スロッシング運動に伴う液面の流体速度は、水平方向、垂直方向それぞれ式(6)、(7)となる。

$$U_1 = A_1 \omega \coth \pi h/W \cos \pi x/W \sin \omega t \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$V_1 = A_1 \omega \sin \pi x/W \sin \omega t \quad \dots\dots\dots (7)$$

循環流とスロッシングが重畳しているときの流れの様子を、式(1)と式(4)の速度ポテンシャルの和から求

める。液面の水平方向の流速は式(2)と式(6)の和となり、循環流が液面を変形させないものと仮定すると液面の静圧分布はベルヌーイの定理から式(8)のように求まる。

$$\begin{aligned} p_s &= p_a - \frac{1}{2} \rho (U_0 + U_1)^2 - \rho \frac{\partial \phi_1}{\partial t} \\ &= p_a - \frac{\rho \Gamma^2}{8h^2} \left[\sum_{i=-\infty}^{\infty} \left\{ \operatorname{sech} \pi \frac{x - (2i+1)W + e}{h} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \operatorname{sech} \pi \frac{x - 2iW - e}{h} \right\}^2 \right] \\ &\quad - \frac{A_1 \omega \rho \Gamma}{2h} \coth \frac{\pi h}{W} \cos \frac{\pi x}{W} \\ &\quad - \sum_{i=-\infty}^{\infty} \left\{ \operatorname{sech} \pi \frac{x - (2i+1)W + e}{h} \right. \\ &\quad \left. - \operatorname{sech} \pi \frac{x - 2iW - e}{h} \right\} \sin \omega t \\ &\quad - \frac{A_1 \omega^2 \rho W}{\pi} \coth \frac{\pi h}{W} \sin \frac{\pi x}{W} \cos \omega t \quad \dots (8) \end{aligned}$$

ただし、上式において A_1 が小さいという仮定を利用し、 A_1^2 の項は省略している。循環流とスロッシングが重畳する流れ場においては、上式右辺第3項で表されるような液面静圧分布の周期的変動が現れる。このため、スロッシングを伴わない循環流のように液面が静的に変形するだけでなく、スロッシングと同周期での液面の動的変形を生じる。これは二次流れと呼ばれるものであり、この二次流れが発生することにより、液面で液体の静圧と大気圧力が釣合う。二次流れは、循環流が強くスロッシングの振幅も大きい場合には無視できないものとなり、特に容器中央付近の液面は大きく変形を受ける。

3. 励振力の推定

実際の現象では二次流れが生じ、液面において液体と大気の圧力は釣合っている。この二次流れの駆動力が、スロッシングを自励的に成長させる駆動力としても作用しているはずである。そこで二次流れの存在を無視し、液面において液体と大気の圧力に不釣合いがある場合を想定し、その不釣合いがスロッシングの成長にどのように寄与するかを調べる。

大気圧のほうが液体の圧力より高い部分の液面は大気圧によって押下げられ、逆に大気圧より高くなった部分の液体は吸上げられる。スロッシングで下向きに運動している液体に下向きの力が作用すれば、スロッシング運動は加速される。運動と力の向きが逆方向であればスロッシング運動は制動を受ける。これらの作用によってスロッシングになされる仕事量は振動1周期当たり式(9)のように計算される。

図2 液面流速分布

$$\Delta E = \oint_{-W/2}^{W/2} \oint_{-W/2}^{W/2} p_s \cdot V_1 dx dt$$

$$= \frac{\pi}{4} A_1^2 \omega \rho \Gamma \operatorname{cosech} \frac{\pi h}{W} \sin \frac{2\pi e}{W} \dots\dots\dots (9)$$

振幅 A_1 のスロッシングの全振動エネルギーは式(10)で与えられるので、振動1周期当たりのエネルギーの増加率は式(11)となる。

$$E = \frac{1}{8} A_1^2 \rho g W \dots\dots\dots (10)$$

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{2\omega \Gamma}{gh} \frac{\pi h}{W} \operatorname{cosech} \frac{\pi h}{W} \sin \frac{2\pi e}{W} \dots\dots\dots (11)$$

ここで、 Γ/h は液面での流れの速さを代表する量であり、 $(\pi h/W) \operatorname{cosech} (\pi h/W)$ は容器の縦横比すなわちアスペクト比 h/W の効果を、 $\sin (2\pi e/W)$ は渦すなわち循環流中心の片寄りの効果をそれぞれ表している。振動へのエネルギーの供給はほかの条件が同じなら表面流速に比例する。また、図3に示すようにアスペクト比が大きくなると振動に供給されるエネルギーは急速に小さくなる。さらに、表面流速がいくら大きくても渦が容器中心にある $e=0$ の場合には振動は成長しない。渦中心が上昇流側の容器壁と容器中心との中央にある場合に最も振動は成長しやすい。なお、渦中心が逆に下降流の側に片寄せた場合には、エネルギー供給量は負となり、強い制振力が作用する。

図3 アスペクト比の効果

図4 テストセクション形状

4. 循環流のフローパターン測定

以上の解析で仮定された流れ場のうち、スロッシング場は図4に示す実験体系⁽¹⁾内で実際に生じるものとほぼ同じと考えられるが、循環流れ場はこれを駆動している流入流出流れを無視するなど大きく簡略化している。したがって解析で得られた結果を実験と比較するには、循環流のフローパターンを測定する必要がある。第1報でも述べたように、自励スロッシングは図5のような定常流動がある場合に発生している。図5のフローパターンは液位 h が 750 mm と高く振動しない条件で求めたものであるが、液位が低くても図の右上に大きな循環流があるというパターンに基本的変化はない。ただし循環流の強さや渦中心位置は液位に強く依存する。容器内全部のフローパターンの測定は面倒であり、また渦中心位置を正確に求めることは難しい。解析結果との比較のために必要なのは主として液面流速分布である。そこで液面形状を測定しこれに代える。

図6はテストセクションへの流入流速を図5と同じく 1 m/s に保ち、液位を変化させていった場合のスロッシングを生じない状態での液面形状の変化を示し

図5 代表的フローパターン

図6 スロッシング発生条件における液面形状

たものである。図4の体系のままで液位を下げるとスロッシング発生条件を満たし、自動的にスロッシングが成長してくる。スロッシングが発生しない状態での液面形状をみるため、テストセクションの流入口側の液面付近に長さ200 mmのじゃま板を水平に設置することで振動を強制的に抑えている。なお、このじゃま板は垂直方向の流れに対し抵抗として作用するが、流れを完全に妨げるものではないのでフローパターンを大きく変えるものではない。

容器の右側壁に沿って循環流は上昇し、右端近くの液面を押上げている。この盛上がっているところはよどみ点となっていて、その左側の液面形状は放物線状をしている。この部分の液面流速は盛上がり点からの落差の平方根に比例して増加していき、最もへこんだ点の落差を δ で表すと液面最高流速は次式で代表されると考えてよい。

$$U_{\max} = \sqrt{2g\delta} \quad \dots\dots\dots (12)$$

したがってへこみの深さで液面流速がわかる。またへこみの位置は渦中心位置を代表している。図6より、液面流速は平均液位が500 mm程度のとき最も速くなり、渦中心位置も最も右によっていることが読取れる。液面形状の測定結果は解析で仮定した循環流による液面形状とほぼ一致している。解析結果を用いると、液面流速の効果 Γ/h と渦中心の片寄りの効果 $\sin(2\pi e/W)$ とから、平均液位が500 mm程度のときスロッシングへのエネルギー供給が大きくなると考えられる。この条件下では自励的スロッシングは平均液位530 mm以下で発生している。平均液位が下がるほどアスペクト比の効果で振動に供給されるエネルギーが増えることも考え合わせると、振動発生条件の実験結果は解析結果とよく合っているといえる。

図7 スロッシング非発生条件における液面形状

図4の容器で流入流速が異なる場合や容器形状自体が異なる場合においても、スロッシングの発生の有無とスロッシングのない状態のフローパターンとの関係は上記の場合とほぼ同様である。図7は図4の容器形状のうち流入口の高さだけを100 mmから20 mmに変えた場合の液面形状測定結果で、流入流速は2.5 m/sである。この容器形状ではどのような流入流速、平均液位でもスロッシングの成長はみられなかった。この結果にも平均液位500 mm程度で渦中心が右に寄ってくる傾向は現れている。しかしながら片寄り方は図6の場合より小さい。この場合にスロッシングが発生しなかった一つの理由と考えられる。しかしながら特に容器形状への依存性は複雑で、スロッシングの成長の有無をフローパターンのほうから予測することはかなり難しい。これを可能にするには、さらにデータを集積する必要がある。

5. 二次流れの影響

図8は図4の体系で液位が550 mm、入口流速が0.75 m/sのときに得られたスロッシング中の液面形状である。液面左端が下がり切った時点で左端よりやや中心寄りに小さな盛上がり形成され、それが左端の上昇とともに中心へ成長しながら伝ばしていく。伝ばは左端が下降を始めても続き、左端が下がり切る前に右端の近くへ達し、そこで消滅する。この定常循環流を遡る遡上波の成長・消滅は二次流れによるものであるが、式(8)からある程度は説明できる。液面左端の上昇中は定常循環流の向きとスロッシングによる流れの向きが液面で等しくなるので、ベルヌーイの定理

図8 スロッシング中の液面形状

から液体の静圧は低くなる。逆に液面左端の下降中には静圧は上昇する。この圧力変動により、左端上昇中に中心付近にへこみが形成され、下降中には逆に盛上ろうとする。ただし液面が局所的にへこむためにはそれだけの液体がどこかへ流れ出さなければならない。この液面付近の局所的流れは他の部分を逆に盛上げる。局所流れの圧力変動への追従は位相遅れ差を伴う。これらの理由で、遡上波の形成・伝播は式(8)から直ちに定量的に説明できるものではない。しかし基礎方程式を連立して解けば模擬可能なものであり、循環流とスロッシングの重畳場で必ず生じるもので自励的スロッシングの発生原因に直接関係するものではない。

二次流れを生じると、式(8)で高圧となる部分は二次流れのない場合より盛上がり、低圧となる部分はへこむと考えられる。したがって、図8の液面形状から二次流れなしのスロッシング中の液面形状を差引くことで、二次流れのない場合の圧力変動を推定することは可能なはずである。そうして求めた圧力変動がスロッシングにする仕事を計算したところほぼ零となった。しかしこのことから液面の静圧変動がエネルギー供給源ではないとは結論できない。第1に、定常状態ではスロッシングに供給されるエネルギー量は粘性などによる散逸エネルギー量と釣り合っているはずであり、それほど大きな量ではない。第2に、液面の変形は液体の移動により生じるもので、その慣性のため圧力変動に直ちに追従しておらず時間遅れを生じている。第3に、遡上波のような二次流れの発達も供給エネルギーを減らす働きを持っている可能性もある。したがって定常振幅の状態量を測り振動の発生の有無について議論することは、必ずしも正しいとはいえない。

図9 温度成層界面振動のテストセクション

以上のことから、式(8)の圧力差はあくまで仮想的なものではあるが、微小振動の成長を論じる場合には計測される量を用いるよりは妥当なものであることが知れよう。別の視点に立てば、自励的スロッシングの成長自体が遡上波の形成と同列の一種の二次流れである。遡上波の形成などを自励的スロッシング発生の原因とみるのは、結果と原因を混同したものである。ただし、上述のように定常振幅の大きさなどを考えるときには遡上波の形成などは無視できない。しかしながら定常振幅の推定は本論文の目的とするところではない。

6. 温度成層界面の揺動に関する考察

緒言でも述べたように、温度成層界面の自励振動はここで検討対象としている自由液面のそれと非常によく似た現象である。発生する実験体系と揺動のない場合の容器内部のフローパターンを図9と図10に示す⁽⁸⁾。この場合も下層流体の循環流の渦中心はそれが作り出す上昇流の側に片寄っている。上層流体はほぼ静止している。界面でわずかに上下流体の混合を生じることが自由液面の現象との相違点であるが、揺動していない場合の界面形状はベルヌーイの定理から導けるものであることなど、現象を支配している法則にほ

図10 フローパターン (流量 100 L/min, 温度 51 K の場合)

図11 二次モード卓越領域

とんど差はない。揺動を発生すると上層流体の下層流体中への周期的連行を生じることは実験的な事実であるが、これは二次流れの発生などと同様に副次的なものとするほうが自然である。すなわち温度成層界面の自励振動も下層流体の循環流と揺動との重畳による界面部の静圧変動が原因であり、揺動の発生が付随的に周期的連行も引き起こしているとするべきである。

温度成層界面の自励振動では二次モードも観測されている⁽⁸⁾。二次モードの振動1周期当たりのエネルギーの増加率は式(13)となる。

$$\frac{\Delta E}{E} = -\frac{2\pi\Gamma}{W} \operatorname{cosech} \frac{2\pi h}{W} \sin \frac{4\pi e}{W} \dots\dots\dots (13)$$

したがって式(14)の条件が満足されるとエネルギー増加率は二次モードのほうが大きくなる。

$$-2 \cos \frac{2\pi e}{W} > \sqrt{\cosh \frac{2\pi h}{W}} \dots\dots\dots (14)$$

この条件を図11に示す。渦中心が液面に近いところがあり、かつ渦中心の片寄りがある場合は、成長するモードは基本モードから二次モードに移ることが理解できる。

温度成層界面の自励振動に対して本モデルが適用できるか否かをさらに検討するには、今後フローパターン測定などの実験が必要である。

7. 結 言

循環流の存在するく形容器内液面が自励的にスロッシングを生じる現象について、その発生機構を説明するモデルを提唱した。

循環流のある場でのスロッシングでは、スロッシングによる液面の流れの向きが循環流によるそれと同じであるとき液面流速は速く、逆のとき遅くなる。液面流速が速いときベルヌーイの定理から液体の静圧は液面で低下し、大気圧より低くなり、押下げる力が大気

から作用する。スロッシングで下向きに運動している液体に下向きの力が作用し、逆に上昇中には上向きの力が作用するような条件では、スロッシング運動は加速される。

循環流とスロッシング運動を完全流体の流れに置き換え、数学的に最も単純な定式化によってスロッシングの発生条件を求めた。その結果、循環流中心がそれ自身の作り出している上昇流側にある壁のほうに片寄っているとき、振動エネルギーが供給されることが導かれた。エネルギー供給量は液面流速が速く容器が浅い場合に大きくなる。

実験によりスロッシングのないときの循環流のフローパターンを調べ、振動発生領域は振動に大きなエネルギーが供給されるようなフローパターンとなっていることを確認した。また、温度成層界面の自励振動についても考察し、これも同じモデルで説明できる可能性のあることを示した。

なお、本研究は平成3年度文部省科学研究費補助金(一般研究B)の助成を受けている。ここに謝意を表す。

文 献

- (1) 岡本・班目・萩原, 機論, 57-535, C(1991), 647.
- (2) 天野・岩野, 機論, 57-538, B(1991), 1947.
- (3) 江口・田中, 日本原子力学会1990年秋の大会予稿集, (1990-10), E 36.
- (4) Baker, J. G. and Mikina, S. J., *J. Appl. Mech.*, 3 (1936), A121.
- (5) 班目, 機械の研究, 8(1971), 1129.
- (6) Tanaka, S., Moriya, S. and Wada, A., *Nucl. Sci. Eng.*, 88 (1984), 445.
- (7) Maekawa, I., *Nucl. Eng. Des.*, 120 (1990), 323.
- (8) 班目, 機論, 53-496, C(1987), 2502.
- (9) 岡本・班目・萩原, 機論, 57-535, C(1991), 654.
- (10) Hara, F., *JSME Int. J.*, Ser. III, 33 (1990), 330.