電磁力による片持はりのカオス*

朱 勤^{*1}, Dariusz GAFKA^{*2}, 谷 順二^{*3}
高木 敏行^{*3}, 大友 規矩雄^{*3}

Chaotic Behavior of a Cantilever Beam Subjected to Magnetic Force

Qin ZHU, Dariusz GAFKA, Junji TANI,
Toshiyuki TAKAGI and Kikuo OTOMO

The chaotic vibration of a cantilever beam with a permanent magnet and an additional mass on its free tip was studied experimentally. The beam was installed vertically and its clamped end was excited by harmonic force. Another permanent magnet was fixed under the free tip of the beam. Experimental evidence for the existence of a strange attractor in this deterministic dynamic system was presented. It is found that chaotic responses of the beam are much larger than its resonant ones. The range of chaotic vibrations changes obviously with the decrease in the distance between two magnets. The bifurcation diagram shows that the response of the beam suddenly comes into chaos from the regular vibration with the increase in the exciting amplitude. Experimental Poincaré maps agree well with the numerical results.

Key Words: Nonlinear Vibration, Chaos, Cantilever Beam, Magnetic Force, Experiment

1. 緒 言

非線形振動系におけるカオスは広く研究されており、すでに多数の文献が見られる^(1~2)。電磁力と弾性変形が連成する電磁力・弾性体系もカオスを発生する代表的なものであるが⁽³⁾、吸引系について Moon ら⁽⁴⁾と磁気座屈のはりについて谷ら⁽⁵⁾の若干の研究が見られる程度である。しかし、工業技術の進歩によって電磁力を高度に用いた機械や構造物などがますます開発されており、このような構造物には電磁力効果によって不安定振動現象が励起されることが考えられる。

本研究では、先端に磁石と附加質量をもつ鉛直片持はりが先端の磁石と反発する磁石の真上にある場合を取りあげる。はりの固定端を水平方向に周期的に加振し、応答をひずみ計で検知し、その非線形的

な挙動を求めた。すなわち、加振振動数を一定にした場合について、加振振幅の増加に伴ってはりの応答が規則的な振動から不規則なカオスの挙動に移移することを調べ、分岐、ストレンジアトラクター (Strange Attractor) などカオス運動の特性を考察した。また、導出した Duffing タイプの運動方程式を用いて、ポアンカレ写像図を求めた。

2. 基礎式

本研究で使う片持はりの解析モデルと座標を図 1

図 1 片持はりと座標

* 平成3年6月13日 電磁力関連のダイナミックスシンポジウムにおいて講演, 原稿受付 平成3年10月14日.

^{*1} 准員, 東北大学大学院 (〒980 仙台市青葉区荒巻字青葉).

^{*2} 東北大学流体科学研究所 (〒980 仙台市青葉区片平2-1-1).

^{*3} 正員, 東北大学流体科学研究所.

に示す。その自由端の運動方程式は式(1)の微分方程式で与えられる。(6)

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\delta y + \alpha x - \beta x^3 + A\Omega^2 \cos z \\ \dot{z} &= \Omega \end{aligned} \right\} \dots\dots (1)$$

x : はりの先端の変位
 y : はりの先端変位の速度
 z : 加振位相角
 ω_0 : はりの固有振動数
 a_0 : はり先端の静変位

図 2 実験で用いた片持はり

Ω : 加振周波数
 A : 加振振幅 (加振変位を $A \cos \Omega t$ で表す)
 δ : システムの減衰係数
 $\cdot$: 時間 t に関する微分

固有振動数 ω_0 ははりの二つの安定静止状態 $\pm a_0$ まわりの微小振動のものである。 ω_0 と a_0 をシステムの磁力に関するパラメータ α と β で表わすと、

$$\omega_0 = \sqrt{2\alpha} \dots\dots\dots (2)$$

$$a_0 = \sqrt{\alpha/\beta} \dots\dots\dots (3)$$

$$\alpha = \frac{B^2 S - 2\mu_0 ab LG}{2\mu_0(\rho b L h + m)G} \dots\dots\dots (4)$$

$$\beta = \frac{B^2 S}{2\mu_0(\rho b L h + m)G^3} \dots\dots\dots (5)$$

$$a = D \int_0^L (\Phi'')^2 dx_2 + \rho g h \int_0^L (L - x_2) (\Phi')^2 dx_2 \dots\dots (6)$$

$$w(x_2, t) = x(t) \Phi(x_2) \dots\dots\dots (7)$$

$$\int_0^L \Phi^2(x_2) dx_2 = 1, \quad \Phi(L) = 1 \dots\dots\dots (8)$$

ここで、

μ_0 : 真空透磁率
 b : はりの幅
 h : はりの厚さ
 L : はりの長さ
 G : 二つの磁石の間隔
 ρ : はりの密度
 m : 附加質量
 B : 二つ磁石の間の磁束密度
 S : 磁束の存在する領域 (磁石の断面積)
 w : はりのたわみ

図 3 実験装置の概略図

図 4 実験のカオスの区域

図 5 パワースペクトラムと応答の時間信号

式(1)~(7)を用いて、はりの応答をシミュレーションし、計算結果からポアンカレ写像をつくる。

3. 実験

磁力・はり系でカオスが起きる条件とその非線形現象の特性を実験的に解明した。図2に示す片持はりを用いて実験を行った。はりは長さ130.0 mm、幅15.0 mm、厚さ0.5 mmであり、下部の自由端に附加質量と永久磁石が接着されている。また、上部の固定端は加振器と連結している。実験のパラメータは、はりの固定端の水平加振振幅(A)、加振周波数(Ω)と、自由端に付ける磁石と固定磁石(同極)の間隔(G)の三つである。この三つのパラメータを調節してさまざまなはりの応答を調べた。

3.1 実験装置および実験方法

実験装置および計測装置の概略をブロックダイアグラムで図3に示す。加振機はB & K社のTYPE 4810であり、片持はりの自由端の高さは高精度に位置決めされるようにした。二つ磁石間の磁場の強さをガウスメータで測定した。はりの応答波形 $X(t)$ を、はりの上部に貼り付けたひずみゲージで測定し、加振信号 $Z(t)$ と共にパーソナルコンピュータを用いたカオス実験観測システム⁽⁵⁾に導入した。同時に、これらをFFTアナライザの入力信号とした。

さまざまな磁石間隔について、自由端に水平方向の小さな衝撃力を加えることによってシステムの固有振動数 ω_0 を測定した。一方、強制振動の応答については、一定加振周波数 Ω と一定加振振幅 A を維持して、

図 6 分岐線図

図 7 リャプノフ指数

(a) (Phase=0°)

(b) (Phase=90°)

図 8 実験のポアンカレ写像図

(a) (Phase=0°)

(b) (Phase=90°)

図 9 シミュレーションのポアンカレ写像図

応答波形を観測した。加振周波数の範囲は5 Hz から40 Hz まで、加振振幅範囲は、全振幅で1.0 mm から4.0 mm までであった。実験では、はりの応答出力のパワースペクトラムによって、カオス現象を判別し

た。また、カオス振動が発生する加振周波数と加振振幅の領域を測定した。さらにカオス状態の点が連なっているストレンジアトラクタになっていることやカオス挙動の分岐などを調べた。

3.2 実験結果および考察

図4は加振振幅と加振周波数の関係を示しており、この図よりカオスが発生する領域が分かる。この図は磁石と磁石の間隔 G を設定し、加振振幅を一定にして、加振周波数を 5 Hz から 40 Hz まで 1 Hz ずつ増加して、カオスが起きる範囲を求めたものである。(a) は磁石と磁石の間隔 $G = 3$ mm の場合、(b) は $G = 5$ mm の場合である。同図において上の線はカオスが発生する上限で、下の線は下限を示している。この図から、加振の周波数がはりの一次の固有振動数 ($G=3$ mm では 15.37 Hz、 $G=5$ mm では 10.45 Hz) の付近であれば、カオスが発生しやすいということがわかる。また、磁石と磁石の間隔を小さくすれば、つまりはりの先端に受ける磁力を増加すればカオス運動が起きる加振振幅が大きくなることがわかる。

図5は磁石間隔 $G=5$ mm、加振振幅 $A=1.5$ mm の場合のはりの振動応答波形およびパワースペクトラムを示している。(a) の場合は、はりが安定な一つの平衡点まわりの振動が共振状態になっている状態で、(b) の場合は、カオス状態になっている。この図から、カオス振動時の応答は共振時の応答より大きいことが分かる。この原因は共振する時は、はりが一つの平衡点 ($x_1 = 0$) を中心に振動するが、カオス振動時は、両方の平衡点 ($x_1 = \pm a_0$) と一つの不安定平衡点 ($x_1 = 0$) に対してランダム的な振動をするためと考えられる。これは(b)の場合の応答波形からはっきりわかる。この現象は座屈した強磁性片持はり⁽⁵⁾と類似のものであり、電磁力による弾性系の運動に共通のものと考えられる。実構造物においても、このようなカオス振動を避けることを考慮して設計しなければならない。

図6は、加振振幅がはりの応答に及ぼす影響を調べるため実験データから得た分岐線図である。横軸は加振振幅であり、縦軸は位相 0 度のポアンカレマップの点である。加振振幅を増加させると、応答波形は規則的なものから急にカオス的になることが分かる。図7は加振振幅 1.0 mm から 4.0 mm までの応答波形をサンプリングして、文献(7)の方法を利用し計算で得られたリアプノフ指数である。加振振幅が 1.4 mm 以下であれば、リアプノフ指数がマイナスであるが、1.4 mm 以上の場合、指数がプラスになっている。図6と図7共に、実験モデルの分岐特性を示している。

間隔 $G=5$ mm、加振振幅 $A=2.0$ mm、加振周波数

$\Omega = 10.6$ Hz のときの実験から得られたポアンカレ写像を図8に示す。また、実験系のパラメータの値を用いて式(1)よりシミュレーションによって得られるポアンカレ写像を図9に示す。両者の形は類似しており、シミュレーションのモデルの妥当性を示している。

4. 結 論

先端に磁石と附加質量をもつ片持はりのカオス挙動について、実験観測を行い以下のような結論が得られた。

(1) はり先端の磁石と固定磁石の間隔が一定のとき、カオスが発生する加振周波数ははりの安定平衡点の共振振動数の付近である。その間隔を狭くすると、カオスが起きる加振振幅は大きくなる。

(2) はりのカオス振動が発生すると、はりは二つの安定平衡点の間をランダムに運動する。その時の応答振幅は共振の応答振幅より大きい。

(3) はりのカオス運動の複雑な分岐現象が実験的に観測される。

(4) 計算機シミュレーションによって得られたポアンカレ写像は実験データと形状がほぼ一致する。

文 献

- (1) Hao Bai-Lin, *Chaos (I)*, (1984), World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.
- (2) Hao Bai-Lin, *Chaos (II)*, (1990), World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.
- (3) F. C. Moon, *Chaotic Vibrations*, (1987), John Wiley & Sons Inc.
- (4) F. C. Moon and P. J. Holmes, A Magnetoelastic Strange Attractor, *J. Sound Vib.*, 65-2 (1979), 275.
- (5) J. Tani, Q. Zhu, T. Takagi and K. Ohtomo, Experiments on Chaotic Motions of a Magnetoelastically Buckled Beam, to be published in *Int. J. of Applied Electromagnetics in Materials*.
- (6) D. Gafka and J. Tani, Chaos in Multi-Well Potential Magnetoelastic Systems, Reports of the Institute of Fluid Science, Tohoku University, Vol.3 (1991), 1.
- (7) Wolf. A., et al, Determine Lyapunov Exponents from a Time Series, *Physica*, 16D (1985), 285.