二入力三重振子の運動に関する研究*
(蹴上がりの力学的過程と原理)鈴木 曠二^{*1}, 宮本 岳史^{*2}, 木村 茂雄^{*3}Motion of Triple Pendulum with Two Active Joints
(Mechanisms of the Kip Motion)

Kooji SUZUKI, Takefumi MIYAMOTO and Shigeo KIMURA

The purpose of this study is to clarify the mechanisms of the kip motion, or the upstart, which is a technique of the horizontal bar exercise. The player's motion was experimentally analyzed using a movie camera. Under the assumption that the player who performs the kip is considered to be a triple pendulum, the equations of the kip motion were derived and computer simulation was performed with various parameters. Furthermore, the kip motion of the triple pendulum with two active joints was executed and measured. It was concluded that successive motion in the kip can be divided into three phases, i. e., the swing phase, the kick phase and the stop phase. In the kick phase, which is the most important, two exact physical conditions must be satisfied, that is, certain timing of the kick and a certain attitude at the peak kicking moment are necessary.

Key Words: Dynamics of Machinery, Robotics, Triple Pendulum, Passive Joint, Biological Engineering, Sports Dynamics, Kinesiology, Kip, Upstart

1. はじめに

人間は、鉄棒運動において、骨格構造上の制約や筋力の限界などいろいろな制約のもとで、実にさまざまな技を行う。その多くはリンク系に関する動力学的な問題として扱うことが出来る。

本研究は、人間が鉄棒運動で行う基本的な技の一つである“蹴上がり”のメカニズム(その力学的過程と原理)を、明らかにしようとするものである。“蹴上がり”運動を最も単純なモデルに置き換えるなら、三重振子を二つの入力(固定軸は非駆動)で制御することによって、限定された状態から出発し、ある指定された状態に到達させる運動であると考えられる。これは、自由度より入力数が少ないものであるから、動力学的干渉力の影響が大きく、その制御は困難である。

これまでに“蹴上がり”のシミュレーションは行われている⁽²⁾が、そのメカニズムの詳細は必ずしも明らかにはなっていない。

本研究では、人間による蹴上がり運動(以下、試技または、practiceと呼ぶ)の実測値と、これから逆動力学的に算出した結果、および、計算機によるシミュレーション、さらに、三重振子模型による蹴上がり実験等によって解析を行った。

図1 第*i*リンクに関する記号

2. 記号

m : リンク質量	P : 関節点
l : リンク長さ	
l_G : リンク上におけるリンク重心位置	
I : リンクの重心回り慣性モーメント	
R : 関節位置ベクトル	
R_G : リンク重心位置ベクトル	
f : 関節力	M : 関節モーメント
g : 重力加速度	
E : 全エネルギー	E_{r} : 回転運動エネルギー
E_p : 位置エネルギー	E_{t} : 並進運動エネルギー
$[]_i$: 第 <i>i</i> リンク、または、第 <i>i</i> 関節に関するも	

* 平成2年7月14日 1990 Dynamics and Design Conferenceにおいて講演, 原稿受付 平成3年12月27日.

^{*1} 正員, 東海大学工学部(〒259-12 平塚市北金目1117).

^{*2} 准員, (財)鉄道総合技術研究所(〒185 国分寺市光町2-8-38).

^{*3} 正員, 神奈川工科大学(〒243-02 厚木市下荻野1030).

図2 “蹴上がり”の一連の動作(試技)

のであることを示す。

$[]_x, []_z$: X, Z方向成分

なお、回転に関する量は時計回りを正としている。

3. 三重振子の運動方程式

(“蹴上がり”のモデル)

“蹴上がり”を図1に示す鉛直な X-Z 平面内の運動と規定し、これを行う人間を、図2に示すように、肩関節(第2関節, P_2)・股関節(第3関節, P_3)で連結された、腕(手の指の付け根から肩峰まで、第1リンク)・胴体(頭頂から大転子まで、第2リンク)・脚(大転子からかかとまで、第3リンク)よりなる剛体3リンク系とみなし、腕の先端が鉄棒(図1のO点、第1関節, P_1)を軸として回転するものとした。第1リンクの運動方程式は以下の通りである。

$$\text{並進運動: } m_1 \ddot{\mathbf{R}}_{G1} = \mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_{12} + m_1 \mathbf{g} \quad (1)$$

$$\text{回転運動: } I_1 \ddot{\alpha}_1 = M_1 - M_{12} + (\mathbf{R}_{12} - \mathbf{R}_{G1}) \times \mathbf{f}_1 + (\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_{G1}) \times (-\mathbf{f}_{12}) \quad (2)$$

但し、 $\mathbf{f}_1 = \mathbf{0}$, $M_1 = 0$ である。

位置ベクトルの各成分を α_i で表して上式に用いれば、 α_i を変数とする、三角関数を多量に含んだ三本の長大な微分方程式が得られる。

4. 試技の測定と諸量の逆動力学的算出法

全質量および各リンク長さ l_i は、試技者から測定し、各リンク質量 m_i と重心位置 l_{Gi} は、各リンク間の質量比および重心位置の比⁽³⁾より算出した。各リンクの重心回り慣性モーメント I_i は、等分布質量の真直棒であるとして導出した。以上の値をまとめて表1に示す。

試技を撮影し、その映像から各関節点(P_1, P_2, P_3)とかかと(P_4)および腕、胴体、脚の重心位置(

表1 試技者、シミュレーションモデル、機型の諸元

		link 1 (arms)	link 2 (body)	link 3 (legs)
Mass (kg)	player	5.4	29.8	18.5
	simulation	5.4	29.8	18.5
	model	0.775	1.464	0.963
Length (m)	player	0.59-0.44	0.53-0.33	0.74-0.69
	simulation	0.58	0.50	0.79
	model	0.17	0.17	0.29
Distance to center of gravity (m)	player	0.32-0.24	0.21-0.13	0.31-0.28
	simulation	0.31	0.20	0.33
	model	0.085	0.088	0.095
Moment of inertia ($\text{kg} \cdot \text{m}^2$)	player	0.15	1.93	1.03
	simulation	0.15	1.93	1.03
	model	0.0186	0.0301	0.0308

R_{G1}, R_{G2}, R_{G3} の座標データを得た。図2は、それらの推移を示したものである。

これらの座標データから各部の角度を算出し、それらを数値微分して得た角速度、角加速度を用いて、関節モーメント M_i (図3)、関節力 $\mathbf{f}_i$ を逆動力学的に算出した。

なお、鉄棒のたわみや各リンクの伸縮による慣性モーメントの変化等は無視した。

5. シミュレーションの方法

「手首関節(固定軸)を非駆動関節と考え($M_1 = 0$)、各リンクの伸縮・屈曲が無い」モデルを用いて、各関節モーメント M_i を階段状に入力しつつ、Runge-Kutta-Gill法により上述の運動方程式を解いた。刻々の M_i の値の決定・修正は、反復計算の中で逐一修正しながら行っている。これは、一連の動作が試技のそれに類似したものとなること、およびある程度不自然であっても鉄棒上にあがることを目標として行った。

そして、“蹴上がり”に成功した一つのケース(図5(B), 図6, 7)をもとに、“蹴りモーメント”(7章の(2)参照)による角力積を一定として、タイミングを前後へ変化させたケース、“蹴りの姿勢”(8.3節参照)に影響を及ぼすモーメントを変化させたケース、“止めモーメント”(7章の(3)参照)を入力しないケース等のシミュレーションを行った。

なお、人体各部の値は試技と同一とし、積分の初期値は、試技における時刻 $t=0(\text{sec})$ (図2(A))での値を用いた。

6. 模型実験の方法

用いた模型は、固定軸を非駆動とし、肩関節と股関節をDCモータで駆動する二入力の三重振子である。これは、表1に示すように、長さに関して人間のほぼ1/3の大きさであるが、力学的に人間と相似なものではない。

非駆動関節を有するマニピュレータの制御は、第1章で述べたように非常に困難であるため、人間の感覚と経験によって入力電圧を操作して蹴上がりを行わせた。その際、模型実験による現象の時間を人間による試技と同程度とするため、運動面を傾けて設置した。

各リンク角度は、各関節に取り付けたエンコーダによって測定し、さらに、モータの電機子電流を検出してモータの発生する関節モーメント(図8)を算出した。

7. “蹴上がり”のメカニズムと三phase分割

以下の三章にわたり“蹴上がり”のメカニズムを示す。ここでは、図2(H)の形で鉄棒上に静止して終了する“蹴上がり”を扱う。

図3, 6, 8に示すように、試技, シミュレーション, 模型実験のいずれも、ほぼ同様のモーメント・パターンによって“蹴上がり”を行わせることができた。

試技, シミュレーション, 模型実験における、各関節モーメント M の変化(図3, 6, 8)とエネルギーの変化(図4, 7)等に注目すると、“蹴上がり”の一連の流れを、以下の三つのphaseに分割することが出来る(図2~4, 6~8の中に示す。).

(1) {振り(Swing) phase} (試技では $t \leq 1.14 \text{sec}$ まで)

このphaseの目的は、ブランコのさまざまなこぎ方(4), (5), (6)と同様の原理で加振することによって、エネルギー・レベルを上げて行くことにある。

図3 関節モーメントの変化 (試技)

図4 エネルギーの変化 (試技)

このphaseの終盤では、正の肩関節モーメントと股関節モーメント($M_2 > 0, M_3 > 0$)を発生して、胴を持ち上げつつ、脚を高く引き付けてゆく。ここでは、運動エネルギーの大部分は胴体にある。そして、{蹴りphase}に入る時点の位置エネルギー E_p (基準は鉄棒の高さ)は、“蹴りの姿勢”におけるそれをやや上回るに至る。

このphaseは、{蹴りphase}へ向けての予備動作であると言えよう。

(2) {蹴り(Kick) phase} (試技では $t \approx 1.14 \sim 1.66 \text{sec}$)

鉄棒上に到達するのに要するエネルギーを、関節モーメントの成す仕事によって追加供給し、全体の重心を急激に上昇させる期間であり、負の大きな股関節モーメント($M_3 < 0$, 以下、“蹴りモーメント”と呼ぶ)を発生している期間である。この間、肩関節モーメントは正($M_2 > 0$, “腕の引き付け”)である。“蹴上がり”の核心は、このphaseにある。詳細は8章に示す。

(3) {止め(Stop) phase} (試技では $t \approx 1.66 \sim 2.20 \text{sec}$)

残ったエネルギーを消費しつつ円滑に“蹴上がり”を完成させる期間であり、正の肩関節モーメントと正の股関節モーメント($M_2 > 0$ と $M_3 > 0$, 以下、この二つをまとめて“止めモーメント”と呼ぶ)を発生する。詳細については、9章で述べる。

8. “適切な蹴り”と その効果

…… {蹴り phase}

8・1 {蹴り phase} の力学的過程

“蹴り”は、“蹴上がり”の一連の動作の中で最も重要なところである。この phase は、“蹴りモーメント”がピークに達する頃(図2~4, 6~8の◆印)を境にして、前半と後半に分けることができる。

(1) 前半 …… 前半では、試技とシミュレーションによると、全体の重心をやや下げつつ(図4, 7の E_p 参照)、“蹴りの姿勢”(8・3節参照)を整えてゆく。この間、主に肩関節モーメント($M_2 > 0$, “腕の引き付け”)の成す正の仕事によって全エネルギー E を増やし、並進運動エネルギー E_{vt} を増加させる(図4)。その大部分は、胴の並進運動エネルギー E_{vt2} として蓄えられる。そして同時に、各リンクの自転はほとんど消滅する(図4, 7の E_{vr})。

(2) 後半 …… 後半にはいると、試技, シミュレーション, 模型実験ともに、胴体に対する脚の回転方向が反転するため、強力な“蹴りモーメント”による仕事は正の値に変わり、“腕の引き付け”による仕事とあわせて、全エネルギー E を急増させ(図4, 7)、体が鉄棒上にあがってなお余りある程の値に達する。

また、ここでは、“蹴り”と“腕の引き付け”による正の仕事と、蓄えられていた並進運動エネルギー E_{vt} が、位置エネルギー E_p に変換され、全体の重心の高さ(図4, 7の E_p 参照)は鉄棒の高さに向かって急上昇する。

同時に、各リンクの自転角速度は増してゆくが、この phase の終わりににおける運動エネルギーに占める回転運動エネルギーの割合($E_{vr} / (E_{vt} + E_{vr})$)は、試技(図4)では2/5, シミュレーション(図7)では1/3程度になるに過ぎない。そして、次の phase に引き継がれる。

8・2 並進運動エネルギーの生成

“蹴り phase”の要点は、並進運動エネルギー E_{vt} を大きくすることである。鉄棒上にあがるためには、この phase において、関節モーメントと重力のなす仕事によって、鉄棒周りの公転角速度、とりもなおさず、並進運動エネルギー E_{vt} が誘起されなければならない。

試技, シミュレーション, 模型実験共に、同様のモーメント・パターンによって大きな E_{vt} を生成しており(図4, 7)、さらに“蹴りモーメント”のピーク付近において、胴体と脚の自転がほぼ同時に小さくなっ

ている(E_{vr} : 小)。したがってこのあたりでは、胴体は図5(B)に示す角度のまま並進する。

多くの失敗したシミュレーション・ケースでは、姿勢の崩れが大きいほど、胴体と脚の反転のタイミングがずれると共に、上記の仕事が胴体と脚の自転を誘起することに使われて、 E_{vt} の生成がうまくゆかない。

試技および、シミュレーションと模型実験による多数の試行によると、十分な E_{vt} を生成することが出来るのは、“蹴りの姿勢”と“蹴りのタイミング”が、以下に詳解するような場合である。

8・3 “蹴りの姿勢”

本研究で言う“蹴りの姿勢”とは、“蹴りモーメント”($M_2 < 0$)のピーク(図2~4, 6~8の◆印)付近における姿勢のことである。図5にいろいろな場合の“蹴りの姿勢”を例示した。(A)○は試技の場合、(E)○は模型実験による成功例であり、その他はシミュレーション(図中 SM と略記)による“蹴上がり”成功例((B)○)と失敗例((C), (D), (F)×)である。

“蹴りの姿勢”は、次のようでなければならないと考えられる。

(1) 脚と胴体の相対角度が鋭角であること。なぜなら、股関節の構造上、脚は後方に回転することが出来ず、さらに股関節モーメント M_2 に限界があるから、“蹴り”による仕事を大きくするには、蹴る際の脚の振り幅が大きくとれる方が有利だからである。この角度が鋭角になって失敗したケースが、図5(C), (D)である。

(2) 胴体は、水平か腰がやや上がり気味であること。シミュレーションと模型実験による多数の試行によると、腰が大きく上がった(D)、下がった(F)した場合には失敗する。

図5 蹴りの姿勢の成功例(O)と失敗例(X)

8・4 “蹴りのタイミング”

“蹴り”は、次のような複合した条件を同時に満たすタイミングで行われなければならない。

- (1) 全体の重心が下がり始めた頃から“蹴り”始め、
- (2) 上述した“蹴りの姿勢”を形成する時に、“蹴りモーメント”がピークとなる。
- (3) そしてこの瞬間は、このphaseの中間より早い時点である。

(1)より早いタイミングで“蹴り”を始めたシミュレーション・ケースでは、“蹴上がり”を成功させることは出来なかった。図5(D)×がその例である。

(2)は前節(8・3)で述べたことの別の表現である。

(3)に反し、“蹴り”のピークを中間より遅い時点として、強引に上がらせたシミュレーション・ケースが、図6,7と図5(B)である。このケースでは、前半に全エネルギーを増加させることが出来なかったため、後半に、強力な“蹴りモーメント”を発生することによって、全エネルギーを短時間のうちに急増させている。なお、このような無理な操作は、次章後半で説明するように、{止めphase}に大きく影響することとなる。

ところでこのケースにおいて、“蹴りモーメント”の $M_2 < -80(\text{N}\cdot\text{m})$ の部分のみを、前後に僅か50(msec)移動させただけで、“蹴上がり”のパターンは崩れ、失敗した。当然のことながら、遅らせるより早めた場合の方が、その後の姿勢の乱れは少なかった。“蹴りのタイミング”はこのように微妙なものである。

8・5 {蹴りphase}のまとめ

“蹴上がり”の成否を決定付けるのは、“腕の引き付け”と“蹴り”による仕事によって十分な並進運動エネルギー E_{xt} が得られるか否かにある。そしてこのためには、“蹴りの姿勢”と“蹴りのタイミング”が適切でなければならない。さらにこれらは、次の{止めphase}における操作を見越したものでなければならない。

自由度より入力数が少ないことから生ずる制御の難しさは、特にこのphaseにあらわれている。

9. 調整動作としての{止めphase}

このphaseでは、“蹴り”の際のような微妙なタイミングや姿勢は要求されない。このphaseのポイントは、次の二点である。

- (1) 脚の相対回転運動の停止 … “蹴り”によって胴体からはなれて行く脚の相対回転運動を、正の股関節

モーメント($M_3 > 0$)によって止める。

- (2) “腕の引き付け”による“コンパクトな重心軌道” … 最終的な姿勢と全体の重心の目標位置は図2(H)の状態であるから、遠心力によって体の各部が鉄棒から離れることを抑えた上で、さらに胴体を鉄棒に引き寄せて、重心の軌道を鉄棒回りにコンパクトにしなければならない。これを行うのが、“腕の引き付け”

図6 関節モーメントの変化 (simulation)

図7 エネルギーの変化 (simulation)

図8 関節モーメントの変化 (模型実験)

($M_2 > 0$)である。

試技について分析すると次のようになる。正の股関節モーメントは、脚の運動を止めることに終始するので、これによる仕事は負であり、正の肩関節モーメントは胴体を僅かに引き付けるので、これによる仕事は小さな正の値である。この両者を合わせると、“止めモーメント”による仕事は負となる。この仕事によって、前のphaseから引き継いだ全エネルギー E の一部が消費され、残った運動エネルギー($E_{vi} + E_{vr}$)を位置エネルギー E_p に変換しつつ、人間は、鉄棒上に上がり、“蹴上がり”を完成する。

8. 4節の後半に説明したシミュレーションの場合(図6, 7)について、引続き分析すると次のようになる。{蹴りphase}後半の強力な“蹴りモーメント”によって生じた、胴体-脚間の激しい相対回転運動を短時間のうちに止めるために、{止めphase}に入ると直ちに、試技に較べて大きな“止めモーメント”を発生しなければならない。このように、{止めphase}では、これ以前に行われた不適切な操作による影響を処理することとなる。

ところで、{蹴りphase}が終わるまでに得られたエネルギーが目標位置に達するのに充分であれば、腕が鉄棒に拘束されている限り目標高さに達することは容易である。例えば、図6, 7のシミュレーション・ケースにおいて“止めモーメント”を加えなかった場合(図7の上部に示した $M_2 \approx 0$, $M_3 \approx 0$ の場合)でも、全体の重心の高さ(位置エネルギー E_p 参照)については目標に達している。

{止めphase}は、鉄棒上にあがるためというより、むしろ最終姿勢を所望の形にするための調整動作であると言えよう。

10. むすび

“蹴上がり”のメカニズムを要約すると次のようになる。

まず、{振りphase}で、加振によって、“蹴り”の態勢に持ち込むに足るだけのエネルギーを生成する。

次いで、{蹴りphase}の前半で主に胴体に並進運動エネルギーを与え、後半で、そのエネルギーおよび“蹴り”による正の仕事を、位置エネルギーに変換する。

そして、{止めphase}において、残ったエネルギーを消費しつつ“蹴上がり”の最終姿勢を完成させる。

“蹴上がり”において最も重要なのは、{蹴りphase}における“蹴りの姿勢”と“蹴りのタイミング”である。

また、シミュレーションに用いたような単純なモデルや、人間と物理的に相似でない模型であっても、人間が行うのと類似したパターンのもーメントを入力することによって、同じ力学的過程を経て“蹴上がり”を行わせることが出来るのは、興味深いことである。

最後に付記しておきたいのは、蹴上りを繰り返し行った試技者たちからもたらされたさまざまな経験的・感覚的な意見が、多くの重要な示唆を与えてくれたことである。

本研究を行うに際して助言を頂いた東海大学中川三男教授、協力を頂いた同学大学院生土屋英明氏、河合直樹氏、曾根寿与氏らに謝意を表する。

文献

- (1) 鈴木曠二, 宮本岳史, 木村茂雄, 蹴上りのメカニズム, 1990 D&D Conference 日本機械学会機械力学講演論文集(B), No. 900-44(1990-7), 517-522
- (2) 高島俊, 鉄棒運動の動力学的シミュレーション, 第6回日本物理学会学術公演会予講集, 1988-10, 39-42.
- (3) 三浦望慶・池上康男・松井秀治, 部分及び合成重心係数を用いての座標測定方式による合成重心の算出, 体育の科学, 24-8(1979), 517-522.
- (4) Curry, S.M., How Children Swing, Am.J.Phys., 44-10(1976), 924-926.
- (5) Tea, P.L.Jr. and Falk, H., Pumping on a Swing, Am.J.Phys., 36-12 (1968), 1165-1166.
- (6) Sanmartin, J.R., O Botafumeiro: Parametric Pumping in the Middle Ages, Am.J.Phys., 52-10(1984), 937-945.