機関・負荷系における回転運動の挙動特性について*

(線形・連続系の場合)

守田 栄之^{*1}, 松本 久^{*2}

About the Characteristics of Behavior of the Rotational Motion for Engine-Load Systems (In the Case of a Linear and Continuous System)

Shigeyuki MORITA and Hisashi MATSUMOTO

Static and dynamic behaviors of a rotational motion system composed of a prime mover and its load depend upon the relationship of torque-speed characteristics of both. Previous knowledge of the behavior is limited regarding the stability or instability of the system, and no further investigation such as regarding improvement of the system characteristics can be found. However, as computer feedback control of a rotational motion system becomes popular, the improvement of this method becomes very important in order to realize this excellent behavior. From this point of view, our study is concerned with the analysis and synthesis of how to improve the characteristics. The 1st-, 2nd- and 3rd-order systems were treated as object rotational systems on the assumption that these systems were linear and continuous.

Key Words: Rotational Motion, Stability, Response, Automatic Control, Internal Combustion Engine, Linear System, Continuous System

1. ま え が き

原動機と負荷が成す回転運動系の静的、動的挙動は両者のトルク～回転数特性の相互関係による。この挙動特性については Schwieter が安定、不安定のことを多少論じており⁽¹⁾、また一般の「機械力学」の書物⁽²⁾にも概論的に安定、不安定のことと述べられている程度で、あまりにも当然のこととして受けとめられてそれ以上の研究は見当たらないようである。

しかしながら、たとえば自動車の分野で一例を挙げると、ガソリン機関のスロットル弁を現用のようなアクセル直結ではなくコンピュータ経由で動かす"Drive by Wire"方式が有力であるが⁽³⁾、この場合後述のとおり機関出力トルクや回転数の情報をフィードバックすることによって、より良好な静的、動的特性が期待でき、このような挙動特性をあらかじめ詳細に解明しておくことは非常に重要となってきた。

本論文はこのような観点から線形、連続系の回転運動系についてその挙動特性を簡単な理論で詳細に解明

し、特に閉ループ系構成により任意の挙動特性を実現する方法について解析、整理する。

対象系としては一次、二次、および三次系を取り挙げた。ただし紙面の都合上、解析処理の手順は一次系のみについて詳述し、二次、三次系は同様の処理手順により求めた結果のみにとどめる。また対象原動機としてはレシプロ型のガソリン機関とディーゼル機関を例に挙げ論じるが、全ての回転型原動機に適用できる。以下に使用記号を示す。他はその都度説明を加える。

q_a : 吸気流量	... $\text{kg} \cdot \text{m}^3$
q_f : 燃料流量	... $\text{kg} \cdot \text{m}^3$
n : 機関回転数	... $[\text{s}]$
$\bar{n}$: 指令回転数	... $[\text{s}]$
S : ラプラス演算子	... $[\text{s}]$
T_e : 機関トルク	... $[\text{Nm}]$
T_L : 負荷トルク	... $[\text{Nm}]$
θ : スロットル弁開度	... $[\text{rad}]$

2. 一次閉ループ系基礎理論

* 原稿受付 平成3年10月2日。

*¹ 正員、大阪市立大学工学部 (〒558 大阪市住吉区杉本3-3-138)。*² 学生員、大阪市立大学大学院。

2・1 静特性 図1(a)に対象とする一次システムのブロック線図をガソリン機関の例で示す。図のように静的要素に近似した吸気および燃料噴射系と燃焼室系、そしてピストン、クランク等の一次の可動部より成る。ここでは各偏微分係数等は該当運転点近傍で線形近似し、空燃比は一定で T_e は g_a に比例すると仮定している⁽¹⁾⁽²⁾。

図1(b)は燃焼室要素を r 成分と n 成分とに分割することによって等価変換したもので、ここで $g_a = g_{ar} + g_{an}$ 、 $T_e = T_{er} + T_{en}$ である。外乱負荷 T_{ld} は後述するトルク～回転数平面において運転平衡点をトルク軸方向に上下に変化させるだけとなるので図1(b)以下では描かない。なお $\partial T_e / \partial n$ は負荷のみならず機関自体の摩擦も含む。

図1(c)は図1(b)を更に等価変換したもので、対象系は簡単な一次系表示となりフィードバック(FB)伝達関数 $\{(\partial T_e / \partial n) + (\partial T_e / \partial \theta)\}$ の符号で安定性が決まること判る。

図1 対象系モデルと等価変換

ここで図2(a)のようなトルク～回転数平面($T \sim n$ 面)を導入し、スロットル開度 θ の該当運転点を原点 O として機関線 $(\partial T_e / \partial \theta)$ 、負荷線 $(\partial T_e / \partial n)$ を描き交差角 ϕ_1 、 ϕ_2 、 ϕ を符号も含めて図のように定め次式のとおき記号 f_1 、 f_2 を定義する。

$$\partial T_e / \partial \theta = \tan \phi_1 \cdot f_1 \quad \dots(1)$$

$$\partial T_e / \partial n = \tan \phi_2 \cdot f_2 \quad \dots(2)$$

そうすると図1(c)のFB伝達関数 $\{(\partial T_e / \partial n) + (\partial T_e / \partial \theta)\}$ の正負は交差角 ϕ により定まり、Negative FBかPositive FBかで次の三つの場合に分けられる。

(i) $\phi > 0$: Negative FB, 安定

(ii) $\phi = 0$: 臨界

(iii) $\phi < 0$: Positive FB, 不安定

このあたりまでが参考文献⁽¹⁾⁽²⁾などで一般周知の挙動特性である。

なおディーゼル機関ではラック位置 R 、噴射燃料 f を用いて図1における記号を $\theta \rightarrow R$ 、 $g_{ae} \rightarrow g_{er}$ 、 $g_{an} \rightarrow g_{en}$ と変更すればよい。

よく知られているように、ガソリン機関と違ってディーゼル機関は燃料噴射プランジャーポンプ特性などによって図2の機関線が右上がり(負荷線は通常右上がり)、両線のなす ϕ が $\phi < 0$ つまり $f_1 + f_2 < 0$ なる運転領域が広く、図1の閉ループ系のままでは運転不能で、ガバナーと称される人為的なNegative FBがメジャーループとして装備される。図1(d)は記号 f_1 、 f_2 により(c)を整理したもので、回転慣性系に関わる伝達関数を以下では $G'_0(s)$ とする。また左端の k をアクチュエータ・ゲインと称することとする。

次に図2(b)のように $T \sim n$ 面で負荷線はそのままにして θ を $\angle \theta$ だけ大きくし、機関トルクを $\angle T_e$ だけ増大させたときの平衡点を O' とする。そのときの回転数増分を $\angle n$ とすると図より式(3)、(4)を得る。

$$f_1 = \angle T_{er} / \angle n, \quad f_2 = (\angle T_{en} - \angle T_{er}) / \angle n \quad (3)$$

$$\angle n = \{1 / (f_1 + f_2)\} \angle T_{er} \quad \dots(4)$$

これは図1(d)の $G'_0(s)$ において $s \rightarrow 0$ としたときの分子 $1 / (f_1 + f_2)$ に $k(\partial T_{er} / \partial \theta)$ による $\angle T_{er}$ を乗じたものと一致し、この $1 / (f_1 + f_2)$ は $t \rightarrow \infty$ のときの n 整定値を表わすいわば G'_0 感度である。図3は ϕ_1 、 ϕ_2 をパラメータとしてこれを計算したものである。たとえば負荷線を $\phi_2 = \pi/6$ に固定して $\phi_1 = 0$ (T_e 一定)とすると感度は $1 / (f_1 + f_2) = 1.7$ となる。また $\phi_1 = \pi/2$ (n 一定)とすると $1 / (f_1 + f_2) = 0$ となり負荷変化にかかわらず一定回転数を維持するガバナーとなる。 $\phi_1 = \phi_2 = \pi/6$ つまり $\phi = 0$ に一例を点線で示すように臨界では G'_0 感度は無限大となり逆

図2 トルク～回転数面

図3 G_e 感度 $1/(f_1 + f_2)$

符号に跳躍する。

2・2 動特性 図1(d)でゲイン定数 K 、時定数 τ を式(5)、(6)とすると開ループ系全体の伝達関数 $G_k(s)$ は式(7)、そのインディシャル応答は式(8)となる。

$$K = k \left(\frac{\partial T_{eo}}{\partial \theta} \right) / (f_1 + f_2) \quad \dots(5)$$

$$\tau = J / (f_1 + f_2) \quad \dots(6)$$

$$G_k(s) = K / (1 + \tau s) \quad \dots(7)$$

$$n(t) = K \{ 1 - \exp(-t/\tau) \} \hat{n}(t) \quad \dots(8)$$

したがって時間応答は機関、負荷両者の J ($J = J_e + J_l$) と両者の交差角正接 $(f_1 + f_2)$ による式(6)の時定数 τ により図2(c)となる。

3. 一次閉ループ系基礎理論

3・1 閉ループ系一般伝達関数 図4(a)のように開ループ系(点線内の前向き伝達関数)に対して k_T 、 k_n なるFBを施すことによって任意の挙動特性を実現し得る。これは例えば車両の場合、乗り心地を決定する重要な因子となる。前述のディーゼル機関においても、以下のような理論解析はともかく実用的にこのようなFB制御がおこなわれている。

FBゲイン k_n は回転数 n に関するもので、 k_T はトルクに関するものである。後者はトルク計よりFB信号を得てもよいが、線形仮定であるので図のように θ より得るほうがこの場合容易である。両信号を重み k_n 、 k_T でFBする意味は、この比を変化させることで図2(a)、(b)の機関線の傾斜 ϕ を変え、交差角 ϕ を変化させて後述の式(10)、(11)により静的、動的挙動特性を任意に実現しようというものである。

比を変えることに先立って、閉ループ系の伝達関数 $G_k(s)$ を求めると、図4(b)の等価変換より式(9)～

図4 閉ループ系モデルと等価変換

表 1 一次系挙動一覧表

	K	τ	e_s	伝達関数 $G(s) = \frac{K'}{1 + \tau \cdot s}$ インディシャル応答 $n(t) = K' \{ 1 - \exp(-t/\tau) \}$ $\bar{n}(t)$
(i)	$\frac{k(\partial \text{Te}_\theta / \partial \theta)}{f_1 + f_2 + k(\partial \text{Te}_\theta / \partial \theta)}$	$\frac{J}{f_1 + f_2 + k(\partial \text{Te}_\theta / \partial \theta)}$	$\frac{(f_1 + f_2) \bar{n}}{f_1 + f_2 + k(\partial \text{Te}_\theta / \partial \theta)}$	
(ii)	$\frac{k(\partial \text{Te}_\theta / \partial \theta)}{(1+k)(f_1 + f_2)}$	$\frac{J}{f_1 + f_2}$	0	
(iv)	$\frac{k(\partial \text{Te}_\theta / \partial \theta)}{(1+k k_r)(f_1 + f_2) + k k_0(\partial \text{Te}_\theta / \partial \theta)}$	$\frac{J(1+k k_r)}{(1+k k_r)(f_1 + f_2) + k k_0(\partial \text{Te}_\theta / \partial \theta)}$	$\frac{(1+k k_r)(f_1 + f_2) \bar{n}}{(1+k k_r)(f_1 + f_2) + k k_0(\partial \text{Te}_\theta / \partial \theta)}$	

表 2 二次系挙動一覧表

	K'	ω_h	ζ	e_s
(i)	1	$\{ k(\partial \text{Te}_\theta / \partial \theta) / J \}^{1/2}$	$\frac{f_1 + f_2}{2 \{ J k(\partial \text{Te}_\theta / \partial \theta) \}^{1/2}}$	0
(ii)	$\frac{(\partial \text{Te}_\theta / \partial \theta)}{f_1 + f_2}$	$\{ k(f_1 + f_2) / J \}^{1/2}$	$\frac{J k + f_1 + f_2}{2 \{ J k(f_1 + f_2) \}^{1/2}}$	0
(iv)	$\frac{(\partial \text{Te}_\theta / \partial \theta)}{k_r(f_1 + f_2) + k_0(\partial \text{Te}_\theta / \partial \theta)}$	$\{ k \{ k_r(f_1 + f_2) + k_0(\partial \text{Te}_\theta / \partial \theta) \} \}^{1/2}$	$\frac{J k k_r + f_1 + f_2}{2 \{ J k \{ k(f_1 + f_2) + k_0(\partial \text{Te}_\theta / \partial \theta) \} \}^{1/2}}$	$\frac{k_r(f_1 + f_2) \bar{n}}{k_r(f_1 + f_2) + k_0(\partial \text{Te}_\theta / \partial \theta)}$

伝達関数 $G_c(s) = K' \{ \omega_h^2 / (s^2 + 2 \zeta \omega_h s + \omega_h^2) \}$

特性根とインディシャル応答

- (a) $\zeta > 1$ (非振動)の場合: $s_1, s_2 = (-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}) \omega_h$

$$n(t) = K' \left[1 + \frac{1}{s_1 - s_2} \{ s_2 \exp(s_1 t) - s_1 \exp(s_2 t) \} \right] \bar{n}(t)$$
- (b) $\zeta = 1$ (臨界)の場合: $s_1 = s_2 = -\omega_h$

$$n(t) = K' \{ 1 - (1 + t) \exp(-\omega_h t) \} \bar{n}(t)$$
- (c) $\zeta < 1$ (振動)の場合: $s_1, s_2 = -\zeta \omega_h \pm j \omega_h \sqrt{1 - \zeta^2}$

$$n(t) = K' \left\{ 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \exp(-\zeta \omega_h t) \sin(\omega_h \sqrt{1 - \zeta^2} t + \alpha) \right\} \bar{n}(t)$$

$$\alpha = \tan^{-1}(\sqrt{1 - \zeta^2} / \zeta)$$

図7 ϕ_2 による ω_n , ζ , $\zeta\omega_n$ の挙動 図8 ϕ_2 , k による二次系根軌跡の一例

して図示したものである。図8は一例として図中のパラメータ値の場合の ϕ_2 による根位置の変化を複素平面（第2、第3象限は対称、 $\zeta=0$ は実軸上）に k をパラメータとして表わしたものである。

5. 三次閉ループ系

図9に対象とした三次系を示す。0 アクチュエータが直流電動機であるような場合も実用的に多いが、この場合に相当する。

三次系の場合はアクチュエータモータの時定数 T_m がパラメータとして加わりさらに複雑になるが、前述までと同種の処理により表3となる。

図10は一例として $T_m=0.1$ のときの ϕ_2 , k による根軌跡を示す。当然ながら三次系では不安定な場合も出現する。最後に図11はインディシャル応答を図中のパラメータ値の場合につき計算した一例である。

図9 三次対象系と k_r , k_n フィードバック 図10 ϕ_2 , k による三次系根軌跡の一例

表3 三次系挙動一覧表

	K	ω_h	ζ	e_s
(ii)	$-\frac{k(\partial T_{e\theta}/\partial \theta)}{J T_{\theta} \omega_h^2 \alpha}$	$\left[-\frac{k(\partial T_{e\theta}/\partial \theta)}{J T_{\theta} \alpha} \right]^{1/2}$	$\frac{T_{\theta} \phi_0 + J(1+T_{\theta} \alpha)}{2} \left[\frac{-\alpha}{J T_{\theta} k(\partial T_{e\theta}/\partial \theta)} \right]^{1/2}$	0
(iii)	$-\frac{k(\partial T_{e\theta}/\partial \theta)}{J T_{\theta} \omega_h^2 \alpha}$	$\left[-\frac{k \phi_0}{J T_{\theta} \alpha} \right]^{1/2}$	$\frac{T_{\theta} \phi_0 + J(1+T_{\theta} \alpha)}{2} \left[\frac{-\alpha}{J T_{\theta} k \phi_0} \right]^{1/2}$	0
(iv)	$-\frac{k(\partial T_{e\theta}/\partial \theta)}{J T_{\theta} \omega_h^2 \alpha}$	$\left[-\frac{k(k_T \phi_0 + k_0(\partial T_{e\theta}/\partial \theta))}{J T_{\theta} \alpha} \right]^{1/2}$	$\frac{T_{\theta} \phi_0 + J(1+T_{\theta} \alpha)}{2} \left[\frac{-\alpha}{J T_{\theta} k(k_T \phi_0 + k_0(\partial T_{e\theta}/\partial \theta))} \right]^{1/2}$	$\frac{k_T \phi_0 \bar{n}}{k_T \phi_0 + k_0(\partial T_{e\theta}/\partial \theta)}$

伝達関数 $G_c(s) = \frac{a_1}{s-a} + \frac{a_2 s + a_3}{s^2 + 2\zeta \omega_h s + \omega_h^2}$, ただし $a_1 = \frac{k(\partial T_{e\theta}/\partial \theta)}{J T_{\theta}(\omega_h^2 + \alpha(2\zeta \omega_h - \alpha))}$, $a_2 = -a_1$, $a_3 = (\alpha - 2\zeta \omega_h) a_1$

特性根とインデックス応答

(a) $\zeta > 1$ の場合 : $s_1 = \alpha$, $s_2, s_3 = (-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}) \omega_h$

$$n(t) = K[1 + K \exp(\alpha t) + K_2 \exp\{(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}) \omega_h t\} + K_3 \exp\{(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}) \omega_h t\}] \bar{n}(t)$$

$$K_1 = a_1/(\alpha K) , \quad K_2 = \frac{a_2(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}) \omega_h + a_3}{2K(\zeta^2 + \zeta \sqrt{\zeta^2 - 1} - 1) \omega_h^2} , \quad K_3 = \frac{a_2(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})}{2K(\zeta^2 + \zeta \sqrt{\zeta^2 - 1} - 1)}$$

(b) $\zeta < 1$ の場合 : $s_1 = \alpha$, $s_2, s_3 = -\zeta \omega_h \pm j \omega_h \sqrt{1 - \zeta^2}$

$$n(t) = K[1 + K \exp(\alpha t) + K_2 \exp(-\zeta \omega_h t) \sin(\sqrt{1 - \zeta^2} \omega_h t + \beta)] \bar{n}(t)$$

$$K_1 = a_1/(\alpha K) , \quad K_2 = \frac{1}{K \omega_h^2} \left[\frac{a_3 \omega_h^2 - 2 a_2 a_3 \zeta \omega_h + a_3^2}{1 - \zeta^2} \right]^{1/2} , \quad \beta = \tan^{-1} \frac{a_3 \sqrt{1 - \zeta^2}}{a_2 \omega_h - a_3 \zeta}$$

(c) $\zeta = 1$ の場合 : $s_1 = \alpha$, $s_2 = -\omega_h$ (重根)

$$n(t) = K[1 + K \exp(\alpha t) + K_2(1 + K_3 t) \exp(-\omega_h t)] \bar{n}(t)$$

$$K_1 = a_1/(\alpha K) , \quad K_2 = -a_3/(K \omega_h^2) , \quad K_3 = \omega_h(a_2 \omega_h - a_3)/a_3$$

(d) 3 重根の場合 : $s = \alpha$

$$n(t) = K[1 - \{1 - \alpha t + (\alpha^2 t^2/2)\} \exp(\alpha t)] \bar{n}(t)$$

図 1.1 三次系時間挙動の一例

6. あとがき

以上、回転運動系の静的、動的挙動を解析し表 1、表 2、表 3 を得た。これらにより線形、連続系として取り扱える場合は該当閉ループ系のゲイン k_1 、 k_m の比を決定し、適正な挙動の系を設計することが可能である。

四次以上の系では代表根扱いにより本三次系の表で間に合う場合が多いのではないかと考えている。また非線形対象においてもそれがあまり強いものでなければ区分線形化による運転領域の継ぎ合わせで対応できる場合が多いのではないかと考えている。

文 献

- (1) P. H. Schweitzer: Auto. Eng., 44 7(1954 7), pp. 285
- (2) たとえば、日本機械学会編：(新版) 機械工学便覧, A3, (1986), 日本機械学会
- (3) 守田：駆動・制動系制御アルゴリズムの総合化に関する考察, 自動車技術会講演会前刷集 911, pp. 21 24
- (4) 守田, 他 2 名：機論, 52 485, B(1979 2), pp. 286 293
- (5) 守田・松本：機論, 49 438, B(1983 2), pp. 526 531