線接触における EHL 潤滑面下の応力の解析*

藤 原 清^{*1}, 岡 村 広 正^{*1}

Study of Subsurface Stresses under EHL Conditions in Line Contacts

Kiyoshi FUJIWARA and Hiromasa OKAMURA

The internal stress in elastohydrodynamic lubrication (EHL) of rolling/sliding line contacts is calculated to discuss the possibility of pitting from the surface. Pressure distributions are calculated for three cases: 1) isothermal EHL (IEHL), 2) thermal EHL (TEHL) and 3) non-Newtonian EHL of a circular model by Hamrock (NEHL). For each case, the maximum shear stress $\tau_{\max}$ is calculated and discussed. Conclusions are as follows: 1) The maximum value of $\tau_{\max}$ becomes larger and appears near the surface when the pressure spike P_s or the tangential traction Q becomes larger. 2) In case of Newtonian oil, Q becomes larger when the slip ratio increases. Q and P_s are reduced in the order of NEHL, TEHL, and IEHL. 3) When $\tau_{\max}$ appears near the surface, τ_{xy} also takes the maximum value at the same point. 4) Whichever theory we use, there are some cases where $\tau_{\max}$ appears near the surface due to the extremely high pressure spike even if Q is zero.

Key Words: Tribology, EHL, TEHL, Non-Newtonian, Pitting, Maximum Shear Stress

1. 緒 言

流体潤滑下の転がり疲労におけるピッチングが物体表面から発生するのか、内部から発生するのか、という問題はピッチングの本質を考える上で重要な問題である。疲労の評価応力には種々の説があり、小長⁽¹⁾によれば、①ヘルツ最大応力説、②表面引張応力説、③表面最大せん断応力説、④最大せん断応力説、⑤軸方向最大せん断応力説、⑥せん断・垂直重畳応力説、⑦相当応力説、などである。この中で特に③④が基本的かつ有力視されている方法ではないかと思う。

油潤滑された転がり滑り接触においては、当然のこととして EHL 問題として扱われているが、周知のように、EHL では圧力スパイクが発生し、これによって物体内部の応力分布がゆがんでくる。Dowson⁽²⁾らは、圧力スパイクが存在するときの物体内部の最大せん断応力分布を計算し、物体表面にその最大値が存在することを示した。森⁽³⁾は、この圧力スパイク直下応力の解析は、EHL の精密計算が必要であるために長い間放置されていたのであり、今後の課題であると解説し

ている。その後 Sadeghi⁽⁴⁾が、物体表面に圧力に加えて油膜せん断応力（接線力）がかかるときの計算式と応力線図を示している。しかし、いまだ計算例は少なく、ピッチングとの関係を結び付けるには至っていないように思える。

また、一口に EHL 解析といっても、潤滑油をニュートン流体として扱う等温 EHL、発熱を考慮する TEHL があり、最近では潤滑油を非ニュートン流体として扱う EHL、TEHL も行われている。

そこで本報では、各種の EHL 解析により、圧力スパイクを伴う圧力分布とともに油膜せん断応力（接線力）が作用する場合の応力解析を行い、特に物体表面からのピッチング発生の可能性を検討した。この問題では、圧力スパイクの高さや圧力こう配が密接に関係するので、できるだけ詳細に計算するように、いくつかの手法を用いることにした。

記 号

B : TEHL の無次元数 $= k\eta_0/(\beta E'^2 R^2)$

b : ヘルツ接触半幅 $= R\sqrt{8W/\pi}$ m

E' : 等価ヤング率 Pa

G : 無次元材料パラメータ $= \alpha E'$

* 平成 3 年 10 月 17 日 第 69 期全国大会講演会において講演、原稿受付 平成 4 年 2 月 19 日。

^{*1} 正員、トヨタ自動車(株)東富士研究所(〒410-110 裾野市御宿 1200)。

G^* : $G\sqrt{W/(2\pi)}$
 h : 油膜厚さ m
 H : 無次元油膜厚さ $=hR/b^2$
 H_c : $dP/dX=0$ となる H の値
 H_{00} : H を求めるときの無次元定数
 k : 潤滑油の熱伝導率 $W/(m\cdot K)$
 P : 無次元圧力 $=p/p_H$
 p : 油膜圧力 Pa
 p_H : 最大ヘルツ圧 $=E'\sqrt{W/(2\pi)}$
 q : 油膜せん断応力 Pa
 Q : 無次元油膜せん断応力 $=q/P_H$
 R : 等価半径 m
 s : スリップ比 $=(u_1-u_2)/\bar{u}$
 U_0 : 無次元速度パラメータ $=\eta_{00}\bar{u}/(E'R)$
 U : $U_0\varepsilon$
 $\bar{u}$: 物体の平均速度 $=(u_1+u_2)/2$ m/s
 W : 無次元荷重パラメータ $=w/(E'R)$
 w : 単位幅当たりの荷重 N/m
 X : 無次元座標 $=x/b$
 x_a : 接触域入口の x 座標 m
 x_b : 接触域出口の x 座標 m
 x : 転がり方向の座標 m
 y : 発熱に関する無次元パラメータ $=\sqrt{\beta\Delta\theta}$
 Y : 物体内部方向の無次元座標 m (原点は物体表面)
 z : 油膜厚さ方向の座標 m (原点は油膜中央)
 α : 潤滑油の圧力粘度指数 Pa^{-1}
 β : 潤滑油の温度粘度指数 K^{-1}
 $\dot{\gamma}$: せん断速度 s^{-1}
 ε : η_0/η_{00}
 θ : 油膜温度 K
 $\Delta\theta$: 油膜中央の上昇温度 K
 η : 潤滑油の粘度 $Pa\cdot s$
 $\bar{\eta}$: 無次元粘度 $=\eta/\eta_0$
 η_0 : 物体表面温度における粘度
 η_{00} : 基準温度における粘度
 ρ : 密度 kg/m^3
 τ : 無次元せん断応力
 τ_{max} : 無次元静的最大せん断応力の最大値
 τ_{st} : 無次元静的最大せん断応力
 τ_{xy} : 無次元動的せん断応力

2. 計 算 方 法

2.1 EHL 計算法 本報では、ニュートン流体の等温 EHL, TEHL, 非ニュートン流体の EHL の 3

とおりの計算を行った。この論文に限り、それぞれ IEHL, TEHL, および NEHL と略記することにする。

圧力を P , 油膜厚さを H , 油膜せん断応力(接線力)を Q として通常 EHL 解析で用いられる無次元化をして計算を行った。無次元化は付録 1 に示した。

① 等温 EHL (IEHL) EHL の問題は、圧力に関する偏微分方程式であるレイノルズ方程式と、弾性変形を考慮した油膜厚さ式、負荷条件式を連立したものである。

無次元化したレイノルズ方程式は、

$$\frac{dP}{dX} = \frac{3\pi^2 U}{4W^2} \exp(G^*P) \frac{H-H_c}{H^3} \dots\dots\dots (1)$$

解法には、ニュートンラフソン法を用いた。具体的な解法は文献⁽⁵⁾と同じ方法とした。

② 熱弾性流体潤滑 (TEHL) 著者らの論文^{(6)~(8)}に示したように、温度上昇に関する無次元パラメータ y を用いた解法を用いる。油膜厚さ方向の温度分布を二次曲線と仮定し、温度上昇を求めるエネルギー方程式としては、粘性発熱=伝導冷却とする。

エネルギー方程式は

$$y = \sqrt{\beta\Delta\theta} \text{ とすると}$$

$$8By^2 = \frac{32W^4}{\pi^4} \exp(G^*P) H^4 \left(\frac{dP}{dX}\right)^2 K(y) + s^2 U^2 \exp(G^*P) M(y) \dots\dots\dots (2)$$

ここで、 $K(y)$, $M(y)$ は付録 2 に示した。

無次元化した熱レイノルズ方程式は、

$$K(y) \frac{dP}{dX} = \frac{\pi^2 U}{2W^2} \exp(G^*P) \frac{H-H_c}{H^3} \dots\dots\dots (3)$$

具体的な解法は文献⁽⁶⁾と同じ方法とした。

③ 非ニュートン流体の EHL (NEHL) 非ニュートン流体のモデルには限界せん断応力 τ_L を用いた circular model を用いた。

$$\dot{\gamma} = \frac{du}{dz} = \frac{\tau}{\eta} \{1 - (\tau/\tau_L)^2\}^{-1/2} \dots\dots\dots (4)$$

τ_L は、 $\tau_L = \tau_0 + \gamma p$ より求める。

τ_0 : 大気圧でのせん断応力, γ : 比例定数, p : 圧力

無次元化したレイノルズ方程式は

$$\frac{dP}{dX} = \frac{3\pi^2 U}{4W^2} \bar{\eta}^* \frac{H-H_c}{H^3} \dots\dots\dots (5)$$

ここで、 $\bar{\eta}^*$ は付録 3 に示した。

具体的な解法および数値は Lee & Hamrock⁽⁹⁾ の論文と同じとした。

2.2 応力の解析方法 平面ひずみの場合、最大せん断応力を τ_{max} としているが、この論文ではこれを τ_{st} と記し、 τ_{st} の最大値を τ_{max} と記すことにした。進行方向に振幅をもつ動的せん断応力 τ_{xy} についても計

算を行った。圧力 P 、油膜せん断応力 Q による応力の具体的な計算方法を以下に示す。

$$\sigma_x = -\frac{2}{\pi} \left\{ \int_{x_a}^{x_b} \frac{Y(X-X')^2}{\Lambda^4} P(X') dX' + \int_{x_a}^{x_b} \frac{(X-X')^3}{\Lambda^4} Q(X') dX' \right\} \dots\dots\dots (6)$$

$$\sigma_y = -\frac{2}{\pi} \left\{ \int_{x_a}^{x_b} \frac{Y^3}{\Lambda^4} P(X') dX' + \int_{x_a}^{x_b} \frac{Y^2(X-X')}{\Lambda^4} Q(X') dX' \right\} \dots\dots\dots (7)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{2}{\pi} \left\{ \int_{x_a}^{x_b} \frac{Y^2(X-X')}{\Lambda^4} P(X') dX' + \int_{x_a}^{x_b} \frac{Y(X-X')^2}{\Lambda^4} Q(X') dX' \right\} \dots\dots\dots (8)$$

ここで $\Lambda = \{(X-X')^2 + Y^2\}^{1/2}$

最大せん断応力 τ_{st} は

$$\tau_{st} = \frac{1}{2} \{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2\}^{1/2} \dots\dots\dots (9)$$

最大せん断応力を生じる方向 A は、

$$A = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left\{ \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2\tau_{xy}} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

以上の方法により解析を行った。

3. 計算結果

入力条件には、比較的大きい圧力スパイクが得られる条件として、 $W=3 \times 10^{-5}$, $U=1 \times 10^{-11}$, $G=3960$, $B \equiv \eta_0 k / (E^2 R^2 \beta) = 2 \times 10^{-21}$ を用いた。これ以外の数値を用いた場合は、括弧内にその数値を示した。

た。

圧力 P 、物体表面に作用する油膜せん断応力 Q 、最大せん断応力 τ_{st} 、動的せん断応力 τ_{xy} は p_H (最大ヘルツ圧) で除した無次元数、座標 X, Y は b (ヘルツ接触半幅) で除した無次元数である。

図1にはヘルツ圧分布直下の応力分布を示す。 τ_{st} の最大値 τ_{max} は $X=0, Y=0.78$ で0.30の値をとり、その作用する方向は 45° である。 τ_{xy} は $X=-0.80, Y=0.50$ で最小値 -0.25 , $X=0.80, Y=0.50$ で最大値0.25をとる。この振幅が大きいためピッチング発生の原因として動的せん断応力説が有力視されている。

図2にIEHLによる、スリップ比 $s=0.02$ のときの P, H, Q および直下応力の分布を示す。図1と比較して圧力こう配と油膜せん断応力の影響により応力分布はかなりゆがんでいる。ここでは、 τ_{max} が物体表面に現れ、その値も大きくなっている。この状態では τ_{xy} も τ_{st} とほとんど同じ大きさとなる。

図3には同条件におけるTEHLの計算結果を示す。TEHLでは発熱を考慮するため、IEHLよりも圧

(a) P, H, Q 分布

(a) 無次元最大せん断応力分布

(b) ①断面

(b) 無次元最大せん断応力分布

(c) ②断面

(d) ③断面

図1 ヘルツ圧分布直下の最大せん断応力分布

(c) ①断面

(d) ②断面

図2 P, H, Q の分布とその直下の最大せん断応力分布 (IEHL)

(a) P, H, Q 分布

(b) 無次元最大せん断応力分布

図3 P, H, Q の分布とその直下の最大せん断応力分布 (TEHL) (a) $s=0$ における無次元最大せん断応力分布

(b) ①断面

(c) $s=0.01$

(d) ②断面

(e) $s=0.02$

(f) ③断面

(g) $s=0.03$

(h) ④断面

図4 スリップの増加と $\tau_{\max}$ の位置 (TEHL)

カスパイクが若干小さくなり、 Q も小さくなるために $\tau_{\max}$ は最表面には現れない。

しかし、図4の $s=0.03$ の場合に示すようにスリップが増加すると $\tau_{\max}$ が最表面に現れることになる。スリップが加わると、物体表面の応力が増加し、物体内部と合わせると2点の極大値が生じるようになる。この表面の応力は油膜せん断応力の影響を強くうけている。さらにスリップが増加すると、一層大きくなった表面の応力に引きずられる形で $\tau_{\max}$ は浅い位置に現れるようになり、ついには表面の応力の方が大きくなり $\tau_{\max}$ が最表面に現れることになる。また、物体表面では $\tau_{\max}$ と τ_{xy} はほぼ同じ大きさである。

図5は、スリップと Q の最大値である $Q_{\max}$ の関係を示す。解析方法それぞれについてスリップが増加すると Q が増加することを示している。TEHLは発熱の影響によりIEHLよりも Q が小さくなる。NEHLでは限界せん断応力以上にはならないために、IEHL、TEHLに比べてかなり小さい値となり、スリップが増加しても $Q_{\max}$ はあまり増加しない。一般的に Q の最大値と圧力スパイクの高さは、IEHL、TEHL、NEHLの順に小さくなる。 Q の増加は、圧力スパイクが鋭いほど、または荷重が大きいほど顕著になる。

図6、7は、解析方法がそれぞれについて、スリップが増加すると $\tau_{\max}$ が増加し、表面近くに現れることを示している。これは、図5のようにスリップの増加により Q が増加するためである。 $\tau_{\max}$ がヘルツ理論よりも大きく、しかも表面で発生していることはピッチン

図5 スリップの増加と油膜せん断応力の最大値

図6 スリップの増加と $\tau_{\max}$

グ発生原因としての一つの可能性を示している。TEHLでは圧力スパイクが小さいことと Q が小さいことを受けて、IEHLよりも $\tau_{\max}$ は小さく、その位置も物体内部となりやすい。NEHLでは、スリップによらず Q が小さいため、この入力条件では $\tau_{\max}$ にはほとんど変化がない。

図8は、図4に対応して、それぞれのスリップにおける $\tau_{\max}$ の作用する方向 A を示す。 $\tau_{\max}$ が物体内部

図7 スリップの増加と $\tau_{\max}$ のY方向の位置

図8 スリップの増加と A の変化 (TEHL)

(a) P, H, Q 分布

(b) 無次元最大せん断応力分布

図9 P, H, Q の分布とその直下の最大せん断応力分布 (NEHL, $W=2.7 \times 10^{-5}$, $U=1 \times 10^{-11}$, $G=5000$)

の場合はほぼ 45° をなすが、スリップの増加により $\tau_{\max}$ が表面に近づくとともに $A=0^\circ$ 、すなわち物体表面と平行となる。

図9には圧力スパイクが大きい条件($W=3.0 \times 10^{-5}$, $U=1 \times 10^{-11}$, $G=5000$, $s=0$)におけるNEHLの計算結果を示す。NEHLでは Q が比較的小さい、圧力スパイクも小さくなりやすいために $\tau_{\max}$ が表面に現れにくい、このように $\tau_{\max}$ が表面に現れる場合もある。このような条件では、IEHL, TEHLでも $s=0$ で $\tau_{\max}$ が表面に現れる。このように圧力スパイクが大きい場合には、スリップの有無に関わらず $\tau_{\max}$ が最表面に現れる。一般的傾向として、 U および G が増加すると圧力スパイクは増加し、そのこう配が大きいほど $\tau_{\max}$ も増加し、表面近くに現れる。

なお、圧力スパイクの高さは、 η の表示方法、油の密度 ρ 、計算におけるメッシュの取り方、などに依存するため未だ若干の検討の余地はあると思われるが、定性的な傾向としては間違っていないと考えている。

4. 結 論

(1) 表面にEHL圧力分布と油膜せん断応力分布が作用するときの物体内部の最大せん断応力 τ_{st} は、圧力こう配と油膜せん断応力の影響を強く受けてゆがんでくる(図2, 4, 9)。すなわち、圧力スパイクが高いほど、また油膜せん断応力が大きいほど $\tau_{\max}$ が物体表面に現れ、その値はヘルツ圧力分布下よりも大きくなる。このことは物体表面からのピッチング発生の原因につながっている可能性がある。

(2) 油をニュートン流体として扱うとき、スリップの増加により油膜せん断応力が増加し(図5)、これにより $\tau_{\max}$ が物体表面に現れ、その値も大きくなる(図4, 6, 7)。非ニュートン流体の場合はスリップの影響が小さい。一般的傾向として、物体表面に作用する圧力スパイクの高さ、油膜せん断応力は、IEHL, TEHL, NEHLの順に小さくなる。

(3) 表面に $\tau_{\max}$ が現れる場合、 τ_{xy} は τ_{st} とほぼ同じ分布となっている。したがって、動的せん断応力説、静的最大せん断応力説ともに同じ結論といえる(図2, 4)。またこの場合 $\tau_{\max}$ の作用する方向は表面にほぼ平行となる(図8)。

(4) 解析方法に関わらず、油膜せん断応力がなくても圧力スパイクのこう配のみにより $\tau_{\max}$ が最表面に現れる場合がある(例えば、図9の条件)。

終わりに、本研究について、京大名誉教授森美郎先生にご指導を受けた。ここに厚く御礼申し上げる。また、武蔵工大染谷常雄教授、東大田中正人教授に折り

図 10 $K(y)$ 図 11 $M(y)$

にふれて助言をいただいた。ここに感謝の意を表する。

付 録 1

等温理論と整合性を取りつつ、次のような無次元化を行う。

$$X = \frac{x}{b}, \quad b = \sqrt{\frac{8wR}{\pi E'}}, \quad \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

$$\frac{1}{E'} = \frac{1}{2} \left(\frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \right)$$

$$P = \frac{p}{p_H}, \quad p_H = E' \sqrt{\frac{W}{2\pi}}$$

$$H = \frac{Rh}{b^2} = \frac{h}{R} \frac{\pi}{8W}$$

$$U_0 = \frac{\eta_{00}\bar{u}}{E'R}, \quad G = \alpha E', \quad G^* = G \sqrt{\frac{W}{2\pi}}$$

$$W = \frac{w}{E'R}, \quad s = \frac{u_1 - u_2}{\bar{u}}$$

付 録 2

TEHL 解析に必要な y の関数 $K(y)$, $M(y)$ については

$$K(y) = \frac{1}{y^3} \left\{ -y + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \exp(y^2) \operatorname{erf}(y) \right\}$$

$$M(y) = \frac{2y}{\sqrt{\pi} \exp(y^2) \operatorname{erf}(y)} = \frac{1}{1+y^2 K(y)}$$

$K(y)$, $M(y)$ の y に関するグラフを図 10, 11 に示す。

付 録 3

NEHL 解析に必要なとなる $\bar{\eta}^*$ については

$$\bar{\eta}^* = \frac{T^3 \bar{\eta}^*/6}{\sin^{-1} e - e}$$

ここで

$$e = \bar{\tau}_b \sqrt{1 - \bar{\tau}_a} - \bar{\tau}_a \sqrt{1 - \bar{\tau}_b}$$

$$T = \frac{2WH}{\pi \bar{\tau}_l} \frac{dP}{dX}$$

$$\bar{\tau}_b = \bar{\tau}_a + T$$

$$\bar{\tau}_a = -\frac{T}{2} + sA_o \sqrt{\frac{1}{s^2 A_o^2 + 1} - \frac{T^2}{4}}$$

$$A_o = \frac{\bar{\eta}}{H \bar{\tau}_l} \frac{\pi U}{8W}$$

文 献

- (1) 小長, 豊田中央研究所 R&D レビュー, 24-2(1989-8), 13.
- (2) 森, EHL の基礎, 日本潤滑学会第 22 回東京講習会教材, (1977-2), 1-20.
- (3) Dowson, D. and Whitaker, A. V., *Proc. Instn. Mech. Engrs.*, Vol. 180 Pt 3B, (1965), 66.
- (4) Sadeghi, F. and Sui, P. C., *Trans. ASME, J. Trib.*, Vol. 111(1989), 180.
- (5) Houpert, L. G. and Hamrock, B. J., *Trans. ASME, J. Trib.*, Vol. 108(1986), 411.
- (6) Okamura, H. and Fujiwara, K., *Proc. JSLE ITC Nagoya*, (1990), 1-611.
- (7) 岡村・藤原, 機講論, No. 911-2(1991-6), 121.
- (8) 岡村・藤原, 機講論, No. 918-2(1991-7), 178.
- (9) Rong-Tsong Lee and Hamrock, B. J., *Trans. ASME, J. Trib.*, Vol. 112(1990), 486.