近似法による補強リブ付き板殻構造最小重量設計法の効率化*

(第2報, 座屈・振動制約問題)

山崎 光悦^{*1}, 中村 宗伸^{*2}

Efficient Approximation Method in Minimum Weight Design of Stiffened Plate and Shell Structures (2nd Report, Problems under Buckling Load and Natural Frequency Constraints)

Koetsu YAMAZAKI and Munenobu NAKAMURA

Taylor series approximation (TSA) has been used to form an approximate subproblem to the actual design problem for efficiency. The nonlinearity of buckling and natural frequency constraints has required imposition of strict move limits or high-quality approximation. A new approximation method for the eigenvalue constraints of stiffened plate and shell structures is suggested, and the efficiency of minimum weight design is discussed. The approximation suggested here is based on the Rayleigh quotient approximation (RQA) and improves the quality of the approximate eigenvalue constraints by approximating the modal strain and kinetic energies instead of the eigenvalue itself. The approximate subproblem is solved by a sequential quadratic programming method. Numerical examples show that the Rayleigh quotient approximation achieves stable convergence with generous move limits.

Key Words: Design Engineering, Optimum Design, Structural Analysis, Rayleigh Quotient Approximation, Stiffened Plate Structure, Shell Structure

1. 結 言

航空機構造を始め軽量化が必要な大形構造物では、薄板や殻に補強リブの付いた構造が採用されることが多く、その設計法を考えると、それら構造物自身を持つ固有振動数や座屈荷重が重要な要因となる。このような構造の最適設計を行う際には、構造物の固有振動数や座屈荷重を求める解析過程と重量など目的関数を最小化する最適化過程を繰返し実施するため、解析モデルが大規模化するにつれて構造解析には多大な計算時間やコストがかかり、最適設計も非効率なものとなる。

そのような現状に対し著者らは、前報⁽¹⁾で変位・応力制約問題に対して板厚やリブ寸法の逆変数を用いた効率的な近似解法を提案した。

本研究では、固有値制約下の補強リブ付き板殻構造の最小重量設計問題を対象とし、テーラー級数近似とレーリー商に基づくCanfieldが提案した骨組や板構造に対する近似法⁽²⁾の有効性と効率について検討した結果について報告する。

2. 近似構造最適設計理論

2・1 最小重量設計問題と直接近似法 図1に示すような補強リブ付き板殻構造の最小重量設計問題は、平板または殻の板厚 t_p 、補強材のリブ板厚 t_w 、リブ丈 h_w を設計変数 $X=(t_p, t_w, h_w)^T$ とすると、一般に以下のように定式化できる。

$$f = \rho(k_p t_p + \sum k_w h_w t_w) \rightarrow \min \quad \cdots \cdots (1)$$

図1 補強リブ付き板殻構造設計モデル

* 原稿受付 平成4年3月27日。

^{*1} 正員, 金沢大学工学部(〒920 金沢市小立野2-40-20)。^{*2} 学生員, 金沢大学大学院。

subject to

$$g_{Fi}(X) = \omega_a - \omega_i \leq 0 \quad (i=1,2,\dots) \quad (2)$$

$$g_{Bi}(X) = P_a - P_{cri} \leq 0 \quad (i=1,2,\dots) \quad (3)$$

$$t_p \leq t_p \leq t_p^U,$$

$$t_w \leq t_w \leq t_w^U, \quad h_w \leq h_w \leq h_w^U \quad (4)$$

f は目的関数としての重量, ρ は材料密度を表す, k_p , k_w はモデルに対応して定まる定数, Σ はリブ部の体積の総和を表す, また ω_i , P_{cri} は固有振動数, 座屈荷重を表し, ω_a , P_a はそれら許容値の下限である, g_{Fi} , g_{Bi} は固有振動数および座屈荷重の不等式制約条件で, 設計変数の非線形関数となる。さらに, 設計変数の上付添字 U , L はそれぞれ設計変数の上, 下限値を表す。

本研究では, 上記設計問題に対して1回の構造解析, 設計感度解析を実施し, 現設計点近傍で目的関数を二次関数に, 制約条件を設計変数のテーラー展開に基づく線形近似, あるいはレーリー商に基づく近似範囲の広い式に近似して近似設計問題を構成する。その近似問題を設計変数の移動制約の下に逐次二次計画法などの非線形計画法によって解く。この近似過程を逐次繰返すことにより, 少ない構造解析回数で最終的な最適設計点を見出すことができると期待できる。

2.2 レーリー商近似と直接近似 上述の近似手法を振動数制約, 座屈荷重制約問題に適用する場合, 制約条件に広範囲の近似が可能であれば, 構造解析回数を減少させ, より効率的な最適化が可能になる。そこで, 図2に示すような補強リブ付き平板モデルについて固有振動数制約, 座屈荷重制約を広範囲に近似するためのレーリー商近似を検討した。

一般に, レーリー商近似は, 第 i 次のモードベクトルを ϕ_i , 剛性マトリックスを K , 質量マトリックスを M とすると

$$\lambda_i = \omega_i^2 = \frac{\phi_i^T K \phi_i}{\phi_i^T M \phi_i} = \frac{U_i}{T_i} \quad (5)$$

図2 補強リブ付き平板モデル

として与えられる。ただし, λ_i は固有値, U_i はひずみエネルギー, T_i は運動エネルギーを示す。また, 固有値は次式で正規化するものとする。

$$\phi_i^T M \phi_i = 1 \quad (6)$$

x_j を設計変数の成分として, ひずみエネルギー, 運動エネルギーを現設計点 X_0 の近傍でテーラー級数近似すると,

$$U_{id} = U_0 + \sum U_j'(x_j - x_{0j}) \quad (7)$$

$$T_{id} = T_0 + \sum T_j'(x_j - x_{0j}) \quad (8)$$

ただし, U_0 , T_0 は現設計点のひずみエネルギーと運動エネルギー, U_j' , T_j' はその設計感度で次式で与える。

$$U_j' = \phi_i^T \frac{\partial K}{\partial x_j} \phi_i \quad (9)$$

$$T_j' = \phi_i^T \frac{\partial M}{\partial x_j} \phi_i \quad (10)$$

これらより一般に固有値の感度は,

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial x_j} = \frac{U_j' - \lambda_i T_j'}{T_i} \quad (11)$$

として与えられる。これを用いて直接テーラー級数近似(これをDTSAと称する)すると,

$$\lambda_i = \sum \frac{\partial \lambda_i}{\partial x_j} (x_j - x_{0j}) + \lambda_0 \quad (12)$$

これに対して, レーリー商の分子, 分母をそれぞれテーラー級数近似(RQA-D)すると,

$$\lambda_i = \frac{U_{id}}{T_{id}} = \frac{U_0 + \sum U_j'(x_j - x_{0j})}{T_0 + \sum T_j'(x_j - x_{0j})} \quad (13)$$

しかし, 上式の近似によると, 設計変数によっては必ずしも良い近似が得られない場合がある。そこで, 近似度の悪い $\partial g_i / \partial x_j < 0$ の場合に, 分母の運動エネルギーに対し設計変数の直接近似, 一方, ひずみエネルギーの非線形性を考慮し, 分子は設計変数の逆数を用いた近似(RQA-R)を用いると固有値をより低く見積り安全側の近似が可能となる。

$$\lambda_i = \frac{U_{iR}}{T_{id}} = \frac{U_0 - \sum U_j' \left(\frac{1}{x_j} - \frac{1}{x_{0j}} \right) x_{0j}^2}{T_0 + \sum T_j'(x_j - x_{0j})} \quad (14)$$

以下では, これら三つの近似式をそれぞれ比較し, 最適設計を行う際, 有効となる近似の良い手法を検討する。

例えば図2に示すような一辺 a の周辺単純支持リブ付き正方形薄板の固有振動数制約の近似について考える。ただし, ヤング率 $E=72.52$ GPa, ポアソン比 $\nu=0.33$, $a=200$ mm, $\rho=2744$ kg/m³, $t_{p0}=6$ mm, $t_{w0}=4$ mm, $h_{w0}=50$ mm とし, 1本のリブが付いたモデルとした。図3はモデルの最低次の固有値と平板板厚 t_p の関係を表している。設計変数に板厚を取った場合, 式(13)による近似(RQA-D)に比べて式(14)による近

似(RQA-R)のほうが近似点($t_p = t_{p0}$)近傍での固有値を小さく見積るより保守的な近似であることがわかる。

同様に図4はモデルの最低次の固有値とリブ厚 t_w の関係を表している。設計変数にリブ厚をとった場合も式(13)による近似(RQA-D)に比べて式(14)による近似(RQA-R)のほうが近似点($t_w = t_{w0}$)近傍での固有値を小さく見積る、より保守的な近似であることがわかる。

一方、図5はモデルの最低次の固有値とリブ丈 h_w の関係を表している。設計変数にリブ丈をとった場合には、式(14)による近似(RQA-R)に比べて式(13)による近似(RQA-D)のほうが近似点($h_w = h_{w0}$)近傍での固有値を小さく見積る、より保守的な近似であることがわかる。

図3 リブ付き平板の固有値と平板板厚の関係

図4 リブ付き平板の固有値とリブ厚の関係

これらの結果より、レーリー商近似においては制約条件の設計感度が負である板厚、リブ厚に対してひずみエネルギーに逆設計変数[式(14)]を、正であるリブ丈に対しては直接設計変数[式(13)]をとった方が保守的な近似式が構成されることがわかった。

以上の議論は振動数制約に対するものであるが、座屈制約に対しても質量マトリックス M を幾何剛性マトリックス K_G に置き換えることにより、同様の近似が可能である。座屈荷重は固有値にその初期応力 σ_0 と負荷面積 A を掛けたものになる。

$$P_i = \lambda_i A \sigma_0 \quad \dots\dots\dots (15)$$

そこで、直接近似(DTSA)は、 A_0 、 P_0 を現設計点 X_0 での断面積と座屈荷重として、

$$P_i = \sum \left(\frac{\partial \lambda_i}{\partial x_j} A_0 \sigma_0 + \lambda_0 \sigma_0 \frac{\partial A}{\partial x_j} \right) (x_j - x_{0j}) + P_0 \quad \dots\dots\dots (16)$$

また、レーリー商に直接設計変数を用いた近似(RQA-D)は、

$$P_i = \lambda_i A \sigma_0 = \frac{U_0 + \sum U'_j (x_j - x_{0j})}{T_0 + \sum T'_j (x_j - x_{0j})} A \sigma_0 \quad \dots\dots (17)$$

さらに、レーリー商に逆設計変数を用いた近似(RQA-R)は、

$$P_i = \lambda_i A \sigma_0 = \frac{U_0 - \sum U'_j \left(\frac{1}{x_j} - \frac{1}{x_{0j}} \right) x_{0j}^2}{T_0 + \sum T'_j (x_j - x_{0j})} A \sigma_0 \quad \dots\dots\dots (18)$$

となる。

3. 補強リブ付き薄板殻構造への適用例

直接近似およびレーリー商近似による近似効果を検討するため、補強リブ付き薄板殻構造の最小重量設計

図5 リブ付き平板の固有値とリブ丈の関係

を固有振動数制約, 座屈荷重制約下で行った。固有振動数制約下で最適設計を行う際, その制約条件式として式(12)を用いて設計を行った場合を直接テーラー級数近似(DTSA), 式(13)を用いた場合をレーリー商近似(RQA), 式(13), (14)を制約条件の感度の正負で使い分ける場合をハイブリット近似(MRQA)とし, 最小重量設計を行った結果を示す。ただし, 座屈荷重制約下で最適設計を行う場合は, 式(12)は式(16)に, また式(13), (14)は, それぞれ式(17), (18)に置換するものとする。また, 構造解析には, 8 節点二次要素を用い, 近似問題を解く数値計画法として逐次二次計画法を採用した。

3.1 固有振動数制約下の補強リブ付き薄板構造

図6に示すような周辺単純支持され, 4本の補強リブの付いた長方形板モデルを考える。設計変数として, 板厚 t_p , リブ厚 t_{w1} , t_{w2} , リブ丈 h_{w1} , h_{w2} の5変数を取り, ヤング率 $E=72.52 \text{ GPa}$, ポアソン比 $\nu=0.33$, 材料密度 $\rho=2744 \text{ kg/m}^3$, $a=100 \text{ mm}$, 初期設計変数を $t_p=6 \text{ mm}$, $t_{w1}=t_{w2}=4 \text{ mm}$, $h_{w1}=15 \text{ mm}$, $h_{w2}=7.5 \text{ mm}$ とした。計算は, モデル全体を解析対象として板部を32要素, 長手方向リブを16要素, それと直交する3本のリブを4要素, 計60要素に分割して行った。許容振動数の下限を, $\omega_a=8.944 \times 10^4 \text{ rad/s}$ とし, 最低次から四つの固有値を制約条件にとった。また, 設計変数の上下限制約は以下のように課した。

$$3 \leq t_p \leq 12 \text{ mm}, 1 \leq t_{w1}, t_{w2} \leq 8 \text{ mm}$$

$$3 \leq h_{w1} \leq 30 \text{ mm}, 1.5 \leq h_{w2} \leq 15 \text{ mm}$$

$$h_{w2} \leq 0.9 h_{w1}$$

図7は, 制約条件式にそれぞれの近似法を用いた場合の目的関数の収束過程を示す。近似問題の設計変数に対する移動制約をDTSAでは $\pm 30\%$, RQAでは $\pm 40\%$, MRQAでは $\pm 60\%$ を最初から課した。ただし, f_0 は初期重量を示す。DTSAは6回で, RQAは12回で, MRQAでは17回の繰返し計算で収束が得られて

いる。表1にそれぞれの結果を比較して示す。これより最適解では, 最低次の固有値制約と四つの寸法制約が有効となっていることがわかる。なお, 最低次の固有振動モードは, 初期形状では板部よりもリブ部が主に振動するモードであるのに対し, 最適形状ではリブ部の振動が抑えられて板部が主に振動するモードへと変化した。

3.2 座屈荷重制約下の補強リブ付き薄板構造

次に, 座屈荷重制約問題に対して, 三種類の近似法の

表1 目的関数, 振動数, 設計変数の比較

	Objective function f/f_0	Constraint ω/ω_1				Design variable		
		1st	2nd	3rd	4th	t_p	t_{w1}	t_{w2}
Initial	1.000	0.6307	0.6726	0.8188	0.8897	6.000	4.000	4.000
						15.00	7.500	
DTSA	1.094	1.0000	1.0780	1.2766	1.2825	7.665	1.000	1.000
						3.000	1.500	
RQA	1.094	0.9999	1.0779	1.2767	1.2826	7.660	1.000	1.000
						3.000	1.500	
MRQA	1.076	0.9998	1.0785	1.2791	1.2859	7.539	1.000	1.000
						3.000	1.500

図7 目的関数の変化過程

図6 補強リブ付き平板(振動数制約)

図8 補強リブ付き平板(座屈荷重制約)

近似効果を比較した結果を示す。解析モデルは、図8に示す十字リブの付いたモデルを考えた。周辺単純支持し、負荷荷重を $\sigma_0=9.8\text{ MPa}$ とした。また、ヤング率 $E=72.52\text{ GPa}$ 、ポアソン比 $\nu=0.33$ 、 $a=90\text{ mm}$ とした。設計変数の初期値を $t_p=6\text{ mm}$ 、 $t_{w1}=t_{w2}=4\text{ mm}$ 、 $h_{w1}=30\text{ mm}$ 、 $h_{w2}=15\text{ mm}$ とし、許容座屈荷重を $P_a=17.64\times10^5\text{ N}$ とした。計算は、モデル全体を解析対象として板部を36要素に、圧縮方向リブを12要素、それと直交方向リブを6要素、計54要素に分割して行った。また、各設計変数の上下限制約を次のように課した。

$$3 \leq t_p \leq 12\text{ mm}, 2 \leq t_{w1}, t_{w2} \leq 8\text{ mm}$$

$$10 \leq h_{w1} \leq 60\text{ mm}, 5 \leq h_{w2} \leq 30\text{ mm}$$

$$h_{w2} \leq 0.9 h_{w1}$$

図9に、各近似法を用いた最適設計における目的関数の収束過程を示す。ここでは、近似問題に対する移動制約をDTSAでは $\pm 30\%$ 、RQAでは $\pm 60\%$ 、MRQAでは $\pm 80\%$ を最初から課した。DTSAは5回で、RQAでも5回、MRQAでは6回の繰返し計算で収束が得られている。その結果を比較して表2に示す。最適解では、最低次の座屈荷重制約と四つの寸法制約が有効となっていることがわかる。この結果においても初期形状では板部よりもリブ部が主に座屈するモードとなっているのに対し、最適形状ではリブ部の座屈が抑えられ、板部が主に座屈するモードとなった。

3・3 座屈荷重制約下の補強リブ付き円筒殻構造
次に座屈荷重制約下の補強リブ付き円筒殻構造問題の結果を示す。図10に示すような負荷荷重を受けるリブ付き円筒を考え、リブが円周方向および軸方向に付いたモデルとした。材料定数は前例題と同様とし、負荷荷重 $\sigma_0=9.8\text{ MPa}$ とした。また、半径 $d=100\text{ mm}$ 、 $b=37.5\text{ mm}$ とし、設計変数の初期値を $t_p=2\text{ mm}$ 、 t_{w1}

$=t_{w2}=1\text{ mm}$ 、 $h_{w1}=8\text{ mm}$ 、 $h_{w2}=4\text{ mm}$ とした。モデルは殻部を32要素に、リブ部を24要素に分割し、5設計変数として解析を行った。許容座屈荷重を $P_a=63.7\times10^7\text{ N}$ とし、最低次から四つの固有値をとり、座屈荷重制約を課した。また、設計変数の上下限制約は以下のように課した。

$$0.5 \leq t_p \leq 4\text{ mm}, 0.2 \leq t_{w1}, t_{w2} \leq 2\text{ mm}$$

$$4 \leq h_{w1} \leq 16\text{ mm}, 2 \leq h_{w2} \leq 8\text{ mm}$$

$$h_{w2} \leq 0.9 h_{w1}$$

図11に、各近似法を用いた最適設計における目的関数の収束過程を示す。ここでも移動制約をDTSAでは $\pm 20\%$ 、RQAでは $\pm 70\%$ 、MRQAでは $\pm 80\%$ を

表2 目的関数、座屈荷重、設計変数の比較

	Objective function f/f_0	Constraint P_{cr}/P_a				Design variable		
		1st	2nd	3rd	4th	t_p	t_{w1} h_{w1}	t_{w2} h_{w2}
Initial	1.000	0.7544	0.9055			6.000	4.000	4.000
		0.9346	1.0945			15.00	30.00	
DTSA	0.983	1.0000	1.2014			6.715	2.000	2.000
		1.3975	1.5138			5.000	10.00	
RQA	0.983	1.0000	1.2014			6.715	2.000	2.000
		1.3975	1.5138			5.000	10.00	
MRQA	0.983	1.0000	1.2014			6.715	2.000	2.000
		1.3975	1.5138			5.000	10.00

図10 補強リブ付き円筒殻(座屈荷重制約)

図9 目的関数の変化過程

図11 目的関数の変化過程

表 3 目的関数, 座屈荷重, 設計変数の比較

	Objective function f/f_0	Constraint P_{cr}/P_s				Design variable		
		1st	2nd	3rd	4th	t_p	t_{w1}	t_{w2}
Initial	1.000	0.7886	0.8795			2.000	1.000	1.000
		1.0627	1.5118			8.000	4.000	
DTSA	1.086	1.0000	1.0561			1.809	0.200	0.200
		1.1431	1.7692			16.00	4.733	
RQA	1.093	1.0000	1.0604			1.940	0.260	0.200
		1.1572	1.7618			16.00	2.000	
MRQA	1.093	1.0000	1.0605			1.941	0.200	0.200
		1.1573	1.7618			16.00	2.000	

最初から課した, DTSA は 7 回で, RQA は 10 回, MRQA では 13 回の繰返し計算で収束が得られている。その結果を比較して表 3 に示す。DTSA の場合, 最適解では, 最低次の座屈荷重制約と三つの寸法制約が有効となって収束している。それに対し, RQA では, 同様に最低次の座屈荷重制約と三つの寸法制約が有効となって収束しているが, 有効な寸法制約が異なっている。さらに, MRQA では, 最低次の座屈荷重制約と四つの寸法制約が有効となり, 収束していることがわかる。これら結果より, 目的関数値の最も小さい DTSA が厳密な最適解であり, RQA および MRQA は離散化によって生じた局所解であると考えるのが妥当と思われる。また, この結果においては初期形状では殻部およびリブ部の両方が座屈するモードとなっているのに対し, 最適形状では, リブ部の座屈は抑えられ, 殻部が座屈するモードとなっている。

4. 結 言

補強リブ付き板殻構造物の板厚, リブ厚, リブ丈を

設計変数とする固有値制約, 座屈荷重制約下での重量最小化問題に対し, テーラー級数展開による直接近似およびレーリー商近似に基づいた近似解法の有効性を検討した。結果は, レーリー商近似を施した二つの近似法のほうが同じ近似誤差を許容するものとするれば近似範囲は広くなるものの, 最適解を得るまでに必要な構造解析回数が多くかかっている。これは, 例えば式 (14) のように近似関数が構成されてもそれが保守的ではあるが実際の関数に対する近似度が悪くなっており, 最適構造設計過程における効率化という点では, 逆に悪影響を及ぼしているためと考えられる。また, 実際の最適設計の結果においても, 初期形状と最適形状ではモードの変化が起こっていることがわかる。トラスや骨組構造においては, 単純なモードが最低次に現れ, そのモードだけを考慮すればよいが, 板殻構造においては, さまざまなモードが交錯し, 複雑なモード形状の変化を呈するためトラスや骨組構造に比べて単純でないことがわかる。したがって, モードの設計感度を考慮した近似式となっていないことが最適設計における効率化を妨げる原因となっていると考えられる。

板厚, リブ厚, リブ丈の各設計変数ごとに固有値に対する感度の正負は一樣ではなく, しかも複数個存在する各固有値に対して設計変数の取り方をそれぞれ考慮し, よい近似関数を構成する方法は, かなりの困難を有し, 今後さらに検討を進める必要がある。

文 献

- (1) 山崎・中村, 機論, 58-545, A (1992), 118.
- (2) Canfield, R. A., *AIAA J.*, 28, (1990), 1116.