モード解析を用いた連続体構造物の H^∞ ロバスト振動制御*梶原 逸朗^{*1}, 稲垣 亨^{*2}, 長松 昭男^{*1} H^∞ Robust Vibration Control of Continuous Structures
using Modal Analysis

Itsuro KAJIWARA, Tohru INAGAKI and Akio NAGAMATSU

In this paper, we consider a robust vibration control of a continuous body structure, such as plate structure. Modeling of a complex structure composed by a continuous body is difficult. FEM is usually used for direct modeling of an actual structure. However, FEM model has originally structural errors and FEM model has so large degree-of-freedom (DOF) that a vibration control system can hardly be designed. This model is reduced to modal coordinate in order to decrease DOF of FEM model. However, the control system becomes unstable frequently because of structural errors and ignored high order modes. We show a design method of a robust vibration control system based on H^∞ control theory. The robustness against structural errors and ignored high order modes can be realized by H^∞ control. Both the control performance and the robustness of the closed loop system can be improved by applying adequate weighting functions of H^∞ control. The effectiveness of the method is verified by the results of both analysis and experiment.

Key Words: Vibration, Control, H^∞ Control, Robust Control, H^∞ Norm, Modal Analysis, Finite Element Method

1. 緒 言

近年, ロバスト制御の有力な手法として H^∞ 制御理論^{(1)~(5)} が注目されている。構造系のパラメータ変動に対してロバストな制御系を構成できることは, 構造系のモデル化の面から非常に有効である。構造系のパラメータ変動としては, さまざまな要因が考えられる。構造物の動特性自身が時間とともに若干変動するものや, モデル化した時点ですでに実システムとの間に誤差を有するもの, および高次の固有モードを無視してシステムを低次元化したことによる誤差などが考えられる。構造解析の有力な手段である有限要素法(FEM)により構造物をモデル化する場合, このようなロバスト制御理論は特に有効になる。すなわち, FEM でモデル化する場合には解析モデルと実システムとの間にすでに誤差を有すること, および, 自由度が大きくなることによりモード座標を用いてモデルの低次元化を行う際に, 無視した高次モード成分が構造系の特性の誤差となるが, これらの誤差に対しロバストな制御系の

設計が可能になる。

無視した高次モードの安定化に関して, 著者らは感度解析を用いた最適設計法⁽⁶⁾ により, システムの 2 次形式評価関数および極配置の最適化を行い, 制御性能および高次モードの安定性の向上を実現した⁽⁷⁾⁽⁸⁾。

H^∞ 制御理論を適用した例としては, アクティブサスペンション⁽⁹⁾, 磁気浮上⁽¹⁰⁾, 搭状構造物⁽¹¹⁾ の振動制御などがみられる。しかし従来の報告では, 制御対象を比較的簡単な小自由度系としてモデル化しており, 実用を目指した実際の大自由度構造物への適用にはさらに検討が必要だと思われる。さらに, 従来の報告ではシミュレーション結果が中心であり, 解析結果と実験結果の比較評価が十分に行われていない。

そこで, 本論文では連続体である平板を制御対象とし, H^∞ 理論に基づいてこの平板の振動制御系を設計し, その特性の評価を解析および実験により行う。まず, 制御対象を FEM によりモデル化し, システムの固有値解析を行い, モード座標を用いてシステムの低次元化を行う。そして, H^∞ 理論により出力フィードバック系の補償器を設計する。そして, 閉ループ系の制御効果を解析および実験により評価する。さらに, 制御対象の特性に故意に加法的誤差を与えた上で実験を行い, ロバスト性能を評価する。次に, 制御性能および

* 原稿受付 平成 4 年 1 月 16 日。

^{*1} 正員, 東京工業大学工学部 (〒152 東京都目黒区大岡山 2-12-1)。^{*2} 正員, 日本電装(株) (〒448 刈谷市昭和町 1-1)。

ロバスト性能を考慮した周波数重み関数を設定し、 H^∞ 制御系を設計し、システムの動特性の総合評価を行う。最後に、振動実験で得られた周波数応答関数 (FRF) から実験モード解析により制御対象をモデル化し、 H^∞ 制御系を設計した結果を示し、その実用性を明らかにしている。

2. システムのモデル化

n 自由度システムの運動方程式は次式となる。

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = B_{s1}w + B_{s2}u \quad (1)$$

ここで、 $M, C, K \in R^{n \times n}$ はそれぞれ質量行列、減衰行列および剛性行列である。 $x \in R^n$, $u \in R^p$, $w \in R^d$ はそれぞれ状態ベクトル、制御入力ベクトルおよび外乱入力ベクトルである。そして、 p, d はそれぞれ制御入力および外乱入力の数である。ここでは、 M, K は FEM により得られた特性行列を用いるが、振動試験をもとにしたシステム同定などにより実験的に得られた特性行列を用いてもかまわない。本研究では、まず制御対象を FEM でモデル化するので、システムを低次元化するために以下のようにモード座標 $\xi \in R^r$ に変換する。

$$x = \Phi \xi \quad (2)$$

ここで、 $\Phi \in R^{n \times r}$ はシステムの固有モード行列である。そして、システムの固有値行列を $\Lambda = \text{diag}(\Omega_1^2, \Omega_2^2, \dots, \Omega_r^2) \in R^{r \times r}$ とする。 r は採用モード数であり、 Ω_i は i 次の固有振動数である。このとき、式(1)は次の状態方程式に変換される。

$$\dot{q} = Aq + B_1w + B_2u \quad (3)$$

ここで、

$$q = \begin{Bmatrix} \dot{\xi} \\ \xi \end{Bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & I_r \\ -\Lambda & -L \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \Phi^T B_{s1} \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \Phi^T B_{s2} \end{bmatrix}$$

ただし、 $L = \Phi^T C \Phi$ である。また、 $\Phi^T M \Phi = I_r$ となるように Φ を正規化しておく。

システムの出力方程式を行列 $C_{s2} \in R^{t \times 2n}$, $D_{21} \in R^{t \times d}$ および $D_{22} \in R^{t \times p}$ を用いて次式で表す。

$$y = C_{s2}q_s + D_{21}w + D_{22}u \quad (4)$$

ただし、出力の数を t とする。また、 $q_s = (x, \dot{x})^T$ である。式(4)をモード座標で表すと次式となる。

$$y = C_2q + D_{21}w + D_{22}u \quad (5)$$

ここで、

$$C_2 = C_{s2}\Psi, \quad \Psi = \begin{bmatrix} \Phi & 0 \\ 0 & \Phi \end{bmatrix}$$

である。

3. H^∞ 制御系の設計⁽¹⁾⁽¹²⁾

H^∞ 制御問題は、図 1 におけるシステムで外乱 w から制御量 z までの伝達関数 T_{zw} の H^∞ ノルムに関し、

$$\|T_{zw}\|_\infty < \gamma \quad (6)$$

を満足する安定化補償器 $K(s)$ を設計することである。この $K(s)$ を用いて、次式に示す出力フィードバック系を構成する。

$$u(s) = K(s)y(s) \quad (7)$$

ここで、 T_{zw} の H^∞ ノルム $\|T_{zw}\|_\infty$ は、 T_{zw} 最大特異値 $\sigma[T_{zw}(j\omega)]$ の全周波数領域における最大値である。

$$\|T_{zw}\|_\infty = \sup \sigma[T_{zw}(j\omega)] \quad (8)$$

また、 γ は閉ループシステムの H^∞ ノルムの上限値を示すが、その決定については設計者が γ を与え H^∞ 理論の解の存在性を調べ、その繰返しにより γ の最小値を探索する (γ -Iteration) のが現状である。式(3)の B_1 を $\gamma^{-1}B_1$ とおくことにより、式(6)を

$$\|T_{zw}\|_\infty < 1 \quad (9)$$

と記述することができる。 H^∞ 制御の解法については、状態空間において二つのリカッチ方程式を解くことにより設計する方法を用いる⁽¹²⁾。

ここでは、制御性能およびロバスト性能に関する周波数重み関数を用いた H^∞ 制御系の設計を行う。ロバスト性を支配する評価関数として、 w から u の間の伝達関数 T_{uw} を考え、制御性を支配する評価関数として、 w から y までの伝達関数 T_{yw} を考える。 $D_{22} = 0$ とすると、 T_{uw} , T_{yw} はそれぞれ次のようになる。

$$T_{uw} = K[I - C_2(sI - A)^{-1}B_2K]^{-1} \times [C_2(sI - A)^{-1}B_1 + D_{21}] \quad (10)$$

$$T_{yw} = [I - C_2(sI - A)^{-1}B_2K]^{-1} \times [C_2(sI - A)^{-1}B_1 + D_{21}] \quad (11)$$

すなわち、制御性能とロバスト性能との trade-off を考慮して、 T_{yw} および T_{uw} にかかる重み関数 W_1 , W_2 を設定する。そして、次式を満足するような H^∞ 制御系を設計する問題となる。

図 1 H^∞ 制御問題

$$\left\| \frac{W_1 T_{yw}}{W_2 T_{uw}} \right\|_\infty < 1 \quad \dots\dots\dots (12)$$

重み関数を導入したときのシステムのブロック線図を図2に示す。ここで、ロバスト性能を向上させるためには、 T_{uw} に関しては高周波領域で小さくなるように設計すれば、高次モードによるスピルオーバー現象を抑制することができる。したがって、重み関数 W_2 は低周波領域で小さく、高周波領域で大きくなるように設定する。このような重み関数を設定することにより、図3に示すように、システム $G(s)$ に対し加法的誤差 $\Delta G(s)$ を有する場合の閉ループ系の安定性の保証、すなわちロバスト性をもたせることが可能になる。また、制振性能を向上させるためには、 T_{yw} に関して、振動挙動を支配する低周波領域で小さくなることが望ましい。したがって、重み関数 W_1 は低周波領域で大きくし、高周波領域で小さくなるように設定する。重み関数を考慮したシステムの記述を以下に示す。

まず、制御量 z を行列 $C_{s1} \in R^{v \times 2n}$ 、 $D_{11} \in R^{v \times d}$ および $D_{12} \in R^{v \times p}$ を用いて次式のように表す。

$$z = C_{s1} q_s + D_{11} w + D_{12} u \quad \dots\dots\dots (13)$$

ただし、制御量の数を v とする。式(13)をモード座標で表すと次式となる。

$$z = C_1 q + D_{11} w + D_{12} u \quad \dots\dots\dots (14)$$

ただし

$$C_1 = C_{s1} \Psi$$

図2 周波数重み付き H^∞ 制御問題

図3 加法的誤差を有するシステム

ここで、一般化制御対象を次のように定義し、式(3)、(5)、(14)をまとめて次式で表す。

$$G(s) \triangleq \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (15)$$

ここで、

$$C_e(sI - A_e)^{-1} B_e + D_e \triangleq \begin{bmatrix} A_e & B_e \\ C_e & D_e \end{bmatrix}$$

という表記法を用いることにする。式(15)において、 $D_{11}=0$ 、 $D_{22}=0$ とする。また、重み関数 $W_1(s)$ 、 $W_2(s)$ を次式で表す。

$$W_1(s) = C_{w1}(sI - A_{w1})^{-1} B_{w1} + D_{w1} \quad \dots\dots\dots (16)$$

$$W_2(s) = C_{w2}(sI - A_{w2})^{-1} B_{w2} + D_{w2} \quad \dots\dots\dots (17)$$

ここで、重み行列 $W_1(s)$ 、 $W_2(s)$ の次数をそれぞれ g_1 、 g_2 とする。式(16)、(17)を状態方程式として記述し、重み関数を含めた形で一般化制御対象 $P(s)$ を記述すると次式となる。

$$P(s) \triangleq \begin{bmatrix} A & 0 & 0 & B_1 & B_2 \\ B_{w1}C_2 & A_{w1} & 0 & B_{w1}D_{21} & 0 \\ 0 & 0 & A_{w2} & 0 & B_{w2} \\ D_{w1}C_2 & C_{w1} & 0 & D_{w1}D_{21} & 0 \\ 0 & 0 & C_{w2} & 0 & D_{w2} \\ \hline C_2 & 0 & 0 & D_{21} & 0 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (18)$$

このシステムに対し、 H^∞ 理論を用いて式(12)を満足する安定化補償器 $K(s)$ を行列 $A_{cs} \in R^{q \times q}$ 、 $B_{cs} \in R^{q \times t}$ 、 $C_{cs} \in R^{p \times q}$ および $D_{cs} \in R^{p \times t}$ を用いて次式として設計する。

$$K(s) \triangleq \begin{bmatrix} A_{cs} & B_{cs} \\ C_{cs} & D_{cs} \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (19)$$

ただし、 $g=2r+g_1+g_2$ である。

上述の定式化はすべてモード座標上で行っており、振動実験で得られた FRF から実験モード解析によりモード特性を同定し、システムを記述することにより、 H^∞ 制御系を設計することが可能となる。

4. 平板の振動制御への適用

図4に示す平板(ステンレス鋼)を制御対象とし、 H^∞ 制御手法を用いて振動制御を行う。同図に示すように80節点60要素に平板を分割しFEMによりモデル化を行う。したがってFEMモデルの自由度は480となる。そして、節点19および72の変位と速度を検出するものとし、同位置に設置されたボイスコイルアクチュエータにより振動制御を行う。また、実験装置を図5に示す。2点の変位をギャップセンサにて検出し、その信号をA/D変換し、DSP(AT & T社製、

DSP32C)により速度の演算および式(7)の制御則の演算を高速で行い、D/A変換後にボイスコイルアクチュエータに入力されるシステムになっている。外乱 w は節点 19 と 72 に作用する外力およびセンサ雑音とする。また、コントローラは次の双一次変換を用いて、連続系 s から離散系 z への変換を行う。

$$s = \frac{2}{T} \cdot \frac{z-1}{z+1} \quad (20)$$

ここで、 T はサンプリング時間である。

この平板の節点 72 における自己コンプライアンス

図 4 解析モデルと制御システム

図 5 実験装置

を図 6 に示す。ただし、ここでの入出力は、それぞれボイスコイルアクチュエータのアンプに入力される電圧 [V] およびギャップセンサアンプの出力電圧 [V] とする。破線が計算結果、実線が実験結果であるが両者はよく一致している。同図から 400 Hz 以下に五つの共振ピークが現れている。また、400 Hz 以上の周波数領域には、特に顕著な共振ピークが現れないことが実験結果から明らかになった。したがって、5 次以下の固有モードを採用し ($r=5$)、前述のモード座標で記述したシステムに H^∞ 制御理論を適用し、制御系の設計を行う。なお、構造物の減衰に関しては、実験結果からモード特性を同定することにより得られたモード減衰比を用いて、式(3)の行列 A に含まれる行列 L の対角成分を計算する。

まずはじめに、制御量 z を節点 72 の変位および節点 19 と 72 の制御入力 u_{19}, u_{72} とする。

$$z = (x_{72}, u_{19}, u_{72})^T \quad (21)$$

したがって、今回は重み関数 W_1, W_2 を設定しない、すなわち $W_1 = I_{\theta 1}, W_2 = I_{\theta 2}$ として H^∞ 制御問題を解くことになる。また、出力 y は節点 19 と 72 の変位および速度、そして雑音との和になる。

$$y = (x_{19}, x_{72}, \dot{x}_{19}, \dot{x}_{72})^T + [0 \ I]w \quad (22)$$

実際の設計では、前述のようにモード座標 $\Phi \in R^{480 \times 5}$ を用いて式(21), (22)をモード座標に展開し、 H^∞ 制御手法を適用する。5 次までの固有モードを用いてシステムをモデル化しているので、コントローラ $K(s)$ の次数は 10 となる。以上の条件のもとで、 H^∞ 制御系の設計を行った。 γ -Iteration の結果、外乱 w から制御量 z までの伝達関数行列 T_{zw} の H^∞ ノルムの最小値は 0.25 のように求められた。このときのシステムの伝達関数 T_{zw} の各周波数における最大特異値 (σ -プロット) を図 7 に示す。節点 72 に作用する外乱励振力

図 6 非制御時の節点 72 の変位に関する FRF

w_{72} に対する同点の応答 x_{72} の伝達関数を図 8 に示す。点線が非制御の実験結果、破線が制御時の計算結果、実線が制御時の実験結果である。実験はすべてサンプリング周波数 5 kHz で行っている。 H^∞ 制御によって 1 次の共振ピークが顕著に抑えられており、それ以降の周波数領域では非制御時の特性とほとんど変わらないことがわかる。そして、計算結果と実験結果はよく一致していることがわかる。図 9 に w_{72} と u_{19} との間の伝達関数を示すが、計算結果と実験結果はよく一致している。このときの節点 72 における衝撃応答の実験結果を図 10 に示す。同図から制御時の制振効果が確認される。次に、この制御系のロバスト性について検討する。

ボイスコイルアクチュエータに入力するアンプの倍率をシステムが不安定になるまで大きくする。この操作は図 3 に示すように、システムに加法的誤差を与えていることと等価である。システム $G(s)$ に対し、不安定になる限界の加法的誤差 $\Delta G(s)$ の実測結果を図 11 に示す。また、この加法的誤差を与えたときの節点 72 の衝撃応答の実験結果を図 12 に示すが、システムが

不安定になっていることがわかる。この特性のフーリエ変換の結果、5 次モードが不安定になっていることが明らかになった。次に、ロバスト性能を向上させるための H^∞ 制御系の設計を行う。

式 (21) の制御量 z に対して、 x_{72} に重み関数 W_1 を、 u_{19} , u_{72} に重み関数 W_2 を与え、式 (12) を満足するコン

図 9 w_{72} に対する u_{19} の FRF

図 7 H^∞ 制御系の σ プロット

図 10 節点 72 の衝撃応答の実験結果

図 8 w_{72} に対する x_{72} の FRF

図 11 システム $G(s)$ に対し不安定となる限界の加法的誤差 $\Delta G(s)$ の計測結果

トローラを設計することを試みる。重み関数 W_1, W_2 を次のように設定する。

$$W_1(s) = W_{e1}(s)\gamma \quad \dots\dots\dots (23)$$

$$W_2(s) = \begin{bmatrix} W_{e2}(s) & 0 \\ 0 & W_{e2}(s) \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (24)$$

ただし、

$$W_{e1}(s) = \frac{630}{s+630} \quad \dots\dots\dots (25)$$

$$W_{e2}(s) = \frac{20s}{s+1880} \quad \dots\dots\dots (26)$$

$W_{e1}(s), W_{e2}(s)$ の周波数特性を図 13 に示す。この重み関数の意味は、低周波領域で制御性能を向上させ、高周波領域で制御エネルギーを小さくすることである。なすわち高次モード、特に 5 次モードを含む高周波数領域で W_{e2} の重みを大きくすることにより、ロバスト性を向上させることである。式(23)の γ の最大値を γ -Iteration により探索する。なお、このときのコントローラの次数は 13 となる。 H^∞ 制御系を設計した結果 γ の最大値は 1.0 となり、 w_{72}, x_{72} との間の伝達関数および w_{72} と u_{19} との間の伝達関数はそれぞれ図 14, 15 のようになった。図 14 から低周波領域の応答が大

きく抑えられており、図 15 から高周波領域の制御エネルギーが大きく抑えられていることがわかる。そして、図 11 と同じ加法的誤差を制御対象に与えたときの、節点 27 の衝撃応答の実験結果は図 16 のようになった。同図から安定性は維持されており、ロバスト性が向上していることがわかる。

図 14 w_{72} に対する x_{72} の FRF

図 15 w_{72} に対する u_{19} の FRF

図 12 加法的誤差を与えたときの節点 72 の衝撃応答の実験結果

図 13 周波数重み関数の FRF

図 16 加法的誤差を与えたときの節点 27 の衝撃応答の実験結果

次に、制御性能をさらに向上させることを考える。図 10, 16 の結果から、100 Hz 付近に存在する 2 次もしくは 3 次モードの成分の残留振動があまり抑えられていないことがわかる。そこで、以下の重み関数を設定し H^∞ 制御系の設計を行う。

$$W_{e1}(s) = \frac{5.7 \times 10^5}{s^2 + 150s + 5.7 \times 10^5} \quad (27)$$

$$W_{e2}(s) = \frac{s}{s + 2200} \quad (28)$$

図 17 周波数重み関数の FRF

図 18 w_{72} に対する x_{72} の FRF

図 19 節点 72 の衝撃応答の実験結果

この重み関数の周波数特性は図 17 のようになる。同図から $W_{e1}(s)$ の重みが 120 Hz 付近で大きくなるように設定し、1 次共振と同様に 2 次および 3 次の共振をも抑えることを試みる。 W_{e2} については、前回と同様に高周波数領域で大きくなるように設定する。このときのコントローラの次数は 14 となる。 H^∞ 制御系を設計した結果、 γ の最大値は 0.21 となった。このときの w_{72} と x_{72} との間の伝達関数は図 18 のようになる。同図から、1 次共振が大きく抑えられていると同時に、

表 1 モード特性の同定結果

Mode	Natural Frequency (Hz)	Modal Damping Ratio ($\times 10^{-3}$)	Natural Mode	
			γ_{19}	γ_{72}
1	17.23	59.34	0.275	3.038
2	95.32	8.501	-1.292	2.259
3	115.7	3.589	-0.507	1.853
4	264.7	4.453	2.384	1.394
5	352.0	2.031	1.432	1.599

図 20 節点 72 の FRF の同定結果

図 21 w_{72} に対する x_{72} の FRF

2次および3次の共振もある程度抑えられていることがわかる。このときの節点72の衝撃応答の実験結果を図19に示すが、残留振動が大きく低減されており、振動の収束性が改善されていることがわかる。

最後に実験モード解析を用いて制御対象をモデル化し、 H^∞ 制御系を設計した結果を示す。まず、節点19と72の計測されたFRFから実験モード解析によりシステム同定を行う。同定されたFRFの一例を図20に示す。これは節点72におけるFRFを示すが、実験結果と同定結果はよく一致していることがわかる。そして、同定されたモード特性を表1に示す。この結果を用いて式(18)の一般化制御対象を記述し、 H^∞ 制御系を設計することになる。結果の一例として、上述のFEMモデルに対し、式(27)、(28)の重み行列を設定したときと同条件で H^∞ 制御系を設計したときのFRFを図21に示す。同図から、低次の共振が抑えられており、図18の結果ともよく一致していることがわかる。

5. 結 言

本研究では、連続体である平板の振動制御に H^∞ 制御手法を適用し、以下の結論を得た。

(1) 平板のような連続体をFEMでモデル化し、モード座標を用いて低次元化したシステムに出力フィードバック系の H^∞ 制御手法を適用し、振動制御を行

った結果、良好な制振特性が実現された。

(2) 重み関数の設定による、制御性能およびロバスト性能の向上を実現した。

(3) H^∞ 制御系の動特性を解析および実験の両面から検討した結果、すべての結果について両者の良い一致と H^∞ 制御手法の有効性が検証された。

(4) 実験モード解析により同定されたシステムを用いて H^∞ 制御系を設計した結果、その有効性および実用性が明らかになった。

最後に、本研究を遂行する上で貴重なご助言をいただいた東京工業大学、原辰次教授に心から感謝する。

文 献

- (1) 古田, 電学論, **106-6**, C(1989), 408.
- (2) 木村, 計測と制御, **30-8**(1991), 647.
- (3) 原, システム/制御/情報, **35-5**(1991), 251.
- (4) 原, 文献(2)の655ページ.
- (5) 近藤・ほか2名, 計測自動制御学会論文集, **27-6**(1991), 714.
- (6) 梶原・長松, 計測自動制御学会論文集, **26-10**(1990), 1140.
- (7) 梶原・ほか3名, 機論, **58-549**, C(1992), 1385.
- (8) 梶原・ほか2名, 計測自動制御学会論文集, **28-3**(1992), 383.
- (9) 川谷・ほか3名, 計測自動制御学会論文集, **27-5**(1991), 554.
- (10) 藤田・ほか2名, 計測と制御, **30-8**(1991), 706.
- (11) 野波・ほか2名, 機論, No. 910-52(1991-9), 196.
- (12) 三平・美多, 計測と制御, **29-2**(1990), 19.