歯車系の動的異常現象について*

(カオスの挙動と特徴抽出)

佐藤 啓仁^{*1}, 山本 純雄^{*1}, 三田 和弘^{*2}
高津 宣夫^{*3}, 大森 崇言^{*2}

Dynamical Distinctive Phenomena in a Gear System (Chaotic Behavior and Its Characterization)

Keijin SATO, Sumio YAMAMOTO, Kazuhiro MITA,
Nobuo TAKATSU and Takanori OHMORI

The existence of chaotic motion in a simple single-degree or two-degree-of-freedom gear model has already been verified numerically by the authors. In this study, the chaotic motion and the influence of a random component on chaos are investigated using the Poincaré map and the power spectrum analysis, since characterizing the chaotic motion in the gear system is an important and interesting problem from the practical viewpoint of estimating the dynamic load or gear noise as well as from an academic perspective of contributing to nonlinear mechanics.

Key Words: Machine Element, Gear, Forced Vibration, Nonlinear Vibration, Chaos, Response

1. 緒 言

回転伝達要素としての歯車に対する、より高速、高荷重、軽量かつ信頼性などの要求は、科学技術の進展とともにますます高まっており、振動・騒音の低減、あるいは疲労破壊強度の推定など、設計段階での確実な対策を講じることが不可欠となっている⁽¹⁾。このために、歯車の動荷重や振動の正確な評価が必要であり、従来から多くの研究が成されている⁽²⁾⁽⁷⁾。そして、さまざまな力学モデルが提案され議論されてきているが⁽¹⁹⁾、機械要素の中でも歯車系の力学は最もモデル化しにくいものの一つであることは周知のとおりである。

そこで、この複雑な歯車系の特徴を最も単純にモデル化しようとしたとき第一次的に考慮するものとしてバックラッシュと歯対のばね定数の変化および角度伝達誤差を挙げることができる。

このように単純化したモデルにおいても、種々の非線形特有の異常現象を考察することができ⁽²⁾⁽⁴⁾⁽⁸⁾⁽⁹⁾、著者らも特にカオスの挙動が生じることを指摘してきた⁽¹⁰⁾⁽¹⁸⁾。しかしながら、これはあくまでも歯車系のモ

デルにおける考察であり、実際の場合はどうかは実験によって確認する必要がある。この点について、ガラ音をカオスの立場から捉えた興味深い研究が成されているが⁽²²⁾⁽²³⁾、起こっている現象がカオスの挙動であると判定するには、今のところ、歯車系におけるカオスについての理解がまだ不十分と考えられ、歯車系の力学現象に関与する要因が歯車の幾何学的要素、工作誤差あるいは潤滑油の影響など多岐にわたるため⁽¹⁾、現状では極めて困難と考えられる。

そこで、本研究では、カオス現象を考察するための実験的研究に至る前段階としてできるだけ単純な条件のもとで、歯車系のカオスにはいかなる特徴があるのか、いかにすればその特徴を抽出できるのか、という点を中心にいくつかの考察を試みたものである。

2. 運動方程式

歯車系におけるカオス発生の要因はバックラッシュによる非線形効果であることがわかっているので運動方程式を、次のような最も単純な1自由度の振動系で表すことにする⁽³⁾⁽⁸⁾⁽¹⁰⁾。

$$\frac{d^2\psi^*}{dt^{*2}} + \frac{2\phi d\psi^*}{dt^*} + k(t^*)f(\psi^* + e^*, \eta) = 1 \cdots (1)$$

* 原稿受付 平成4年3月2日。

^{*1} 正員、宇都宮大学工学部 (〒321 宇都宮市石井町 2753)。

^{*2} 学生員、宇都宮大学大学院。

^{*3} 正員、石巻専修大学理工学部 (〒986 石巻市南境新水戸 1)。

$$f(\phi^* + e_r^*, \eta) = \begin{cases} \phi^* + e_r^*, & \phi^* + e_r^* \geq 0 \\ 0, & -\eta < \phi^* + e_r^* < 0 \\ \phi^* + e_r^* + \eta, & \phi^* + e_r^* \leq -\eta \end{cases} \quad \dots\dots\dots (2)$$

ここに,

$k(t^*)$: 歯対の等価ねじりこわさ (図1)

$f(\phi^* + e_r^*, \eta)$: バックラッシュを表す非線形関数

η : バックラッシュの無次元量

ϕ : 減衰比

ϕ^* : 相対角変位の無次元量

e_r^* : 角度伝達誤差の無次元量

である。

式(1)で, $\tau = \omega^* t^*$, $x_1 = \phi^*$, $x_2 = \dot{\phi}^*$ とおき, “ $\cdot$ ” は $d/d\tau$ を表すものとすれば次のような連立微分方程式となる。

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{2\phi x_2}{\omega^*} - \frac{k(\tau)f(x_1 + e_r^*, \eta)}{\omega^{*2}} + \frac{1}{\omega^{*2}} \end{cases} \quad \dots\dots\dots (3)$$

ここで, 角度伝達誤差 e_r^* は独立変数 τ に関して周期 2π なる周期形状をしていると仮定すると, 次のような変換理論の適用が有効である⁽¹⁰⁾⁽¹⁸⁾。すなわち, $\tau=0$ において相平面上の点 $z_0 = (x_{10}, x_{20})$ を初期値とする式(3)の解を $z(\tau) = \theta(\tau, z_0)$ とする。この解を用いて相空間 R^2 をそれ自身に写すポアンカレ写像 T を

$$T: R^2 \rightarrow R^2$$

$$z_0 \rightarrow z_1 = z(2\pi) = \theta(2\pi, z_0)$$

と定義すると, T による z_0 の挙動, つまり $z_n = \theta(2n\pi, z_0)$, (n は整数) の性質, 例えば周期性, 安定性, 不変性等がわかる。

3. 角度伝達誤差 e_r^* の形状とカオス

e_r^* の形状については, これを正弦波で表すのが通

図1 ばね定数

常であるが, 実際の角度伝達誤差形状によっては三角波やきょ歯状波で表せる場合もあると考えられる⁽¹⁷⁾ ので, それぞれを取り上げて考察する。図2に示すのは, 仮定した角度伝達誤差の形状である。以下では, 図2に示す形状誤差を受ける式(3)の系のカオスの挙動について, ポアンカレ写像とスペクトル解析を行う。この場合, 扱うデータは定常であるとするのが普通であり, 厳密に言えば式(3)には, ばねこわさの変化 $k(\tau)$ が含まれているので, 歯車システム内の x_1, x_2 の変動は時変系となるため非定常として扱う必要がある⁽²⁵⁾。

そこでまず, $k(\tau)=1$ (=一定) として考察してみる。システムパラメータ $\omega^*=1.09$, $\phi=0.05$, $\eta=7$, $b_0=3.22$ とした場合の結果を図3に, $\omega^*=1.11$, $\phi=0.01$, $\eta=7$, $b_0=3.45$ とした場合の結果を図4に, $\omega^*=1.1835$, $\phi=0.02$, $\eta=7$, $b_0=2.45$ とした場合の結果を図5に示す。それぞれの図において上段がポアンカレ写像, 下段がパワースペクトルである。ここに, b_0 は角度伝達誤差 e_r^* の振幅である。なおパワースペクトルの計算はFFT法を用い, 128周期のデータ区間でFFTを行い, それを256回繰返して平均をとった(データ長32768周期の分割平均)。いずれも, きょ歯状波形[図3~5の(c)]の場合を他の二つの角度伝達誤差形状[図3~5の(a)と(b)]の場合と比べるとポアンカレ写像におけるストレンジアトラクタ(図3~5の上段)の相平面上で占める領域(ω 極限集合)は小さくまとまった形となっているのがわかる。そして, 正弦波形[図3~5の(a)]と三角波形[図3~5の(b)]のポアンカレ写像は類似した形状となっているのに対し, きょ歯状波形[図3~5の(c)]は全く異なった形状となっている様子がわかる。

また, 同一のシステムパラメータに対するストレンジアトラクタの形状には, 例えば図3の場合はすべて曲線弧が折りたたまれた形となっているのに対して図4では大きな広がりをもっているなど類似性がみられる。しかしながら, これらのアトラクタ形状からはこれ以上具体的に, 特に定量的な特徴を見出すのは困難と思われる。

図2 角度伝達誤差形状

しかし、パワースペクトルでは明らかに、周波数成分、ピークの現れ方に相違がみられ、例えば、図3についてみると、最大のピークの大きさおよび広がり方において系固有の成分が(a)(b)では $\omega=1$ 、(c)では $\omega=0.5$ に生じ、加えて $\omega=0.6\sim 0.8$ 付近にカオス特有のピークが生じていると考えられ、振動波形の乱雑さを表す周波数帯域の広がりも、正弦波形、三角波形、きょ歯状波形の順に狭くなっており、違いは明りようである。

続いて、ばねこわさの変動を考慮した場合であるが、

簡単のために $k(r)$ が変化するというを考慮せずに、定常としてスペクトル分析を行った（非定常スペクトルとしては扱わない）。

$L_1=0.6L$ と固定し、そのシステムパラメータを $\omega^*=0.85$, $\phi=0.04$, $\eta=9$, $b_0=4$ とした場合の結果を図6に、 $\omega^*=0.87$, $\phi=0.03$, $\eta=10$, $b_0=3.5$ とした場合の結果を図7に、 $\omega^*=1.13$, $\phi=0.02$, $\eta=10$, $b_0=3.5$ とした場合の結果を図8に示す。これらの場合も、先のばねこわさの変動を無視した場合（図3～5）と同様のこと、つまりきょ歯状波形と正弦波形および三角波形誤

図3 ポアンカレ写像（上段）とパワースペクトル（下段）
（ばねこわさが変動しない場合、 $\omega^*=1.09$, $\phi=0.05$, $\eta=7$, $b_0=3.22$ ）

図4 ポアンカレ写像（上段）とパワースペクトル（下段）
（ばねこわさが変動しない場合、 $\omega^*=1.11$, $\phi=0.01$, $\eta=7$, $b_0=3.45$ ）

差に対するストレンジアトラクタの類似性や異なること、相平面上で占めるアトラクタの領域の違い、あるいはアトラクタが曲線弧状となったり広がりを持ったりする類似性など、同様のことが言える。

そして、これらアトラクタの違いを定量的に明らかにするには、ばねこわさ $k(r)$ の変動を許容しても、依然としてスペクトル解析が有効であることがピークの生じる周波数やその大きさ、幅をもったスペクトル分布の形状などを図6～8の下段の図をそれぞれ比較し

て、その相違が明りようであることから明らかといえる。

4. カオスに対する不規則成分の影響

角度伝達誤差に不規則成分が含まれたり、あるいは不規則な外力が加わったりした場合の影響については、例えば著者ら⁽¹⁰⁾⁽²⁰⁾あるいはKumar, Sankら⁽¹⁾⁽²¹⁾が考察しているが、本章では、カオスの挙動に対する影響について検討する。なお、不規則成分は広帯域特

図5 ポアンカレ写像(上段)とパワースペクトル(下段)

(ばねこわさが変動しない場合, $\omega^*=1.1835$, $\phi=0.02$, $\eta=7$, $b_0=2.45$)

図6 ポアンカレ写像(上段)とパワースペクトル(下段)

(ばねこわさが周期的に変動する場合, $\omega^*=0.85$, $\phi=0.04$, $\eta=9$, $b_0=4$)

性(白色雑音)を持つとして、不規則成分のない場合を含めて3種類の場合について数値シミュレーションを実施した。ここでは、角度伝達誤差形状を正弦波とし、前章(ばねこわさの変動を考慮した場合)でカオス的挙動を示したシステムパラメータ $\omega^*=0.85$, $\phi=0.04$, $\eta=9$, $b_0=4$ の場合を考察する。その結果のポアンカレ写像ならびに振動波形を図9に示す。図9の上段に示すのがポアンカレ写像、下段が振動波形であり、それぞれ図9(a), (b), (c)の順に不規則成分のパワー

D を0, 5, 20の3種類にして示してある。図より不規則成分の強さを大きくするとストレンジアトラクタの形状がくずれ、ついには8周期点($\uparrow$ で示してある)に落ち着いているのがわかる。これは、不規則成分を加えることによってカオス的挙動が消失することを示しており、歯車系のカオスは非一様カオスであること⁽²⁴⁾、また、系パラメータの決め方によってはカオス的挙動がさけられないときの異常現象対策として、不規則励振を作用させることが有効であることを示唆す

図7 ポアンカレ写像(上段)とパワースペクトル(下段)
(ばねこわさが周期的に変動する場合, $\omega^*=0.87$, $\phi=0.03$, $\eta=10$, $b_0=3.5$)

図8 ポアンカレ写像(上段)とパワースペクトル(下段)
(ばねこわさが周期的に変動する場合, $\omega^*=1.13$, $\phi=0.02$, $\eta=10$, $b_0=3.5$)

図 9 不規則成分の影響 ($\omega^*=0.85$, $\phi=0.04$, $\eta=9$, $b_0=4$)

るものと考えられ、同じく跳躍現象の除去に不規則振動励振が効果的であったこと⁽⁹⁾と併せ考えると、不規則励振の具体的な作用のさせ方などについて、早急に検討しても良い方法ではないかと考えられる。

5. 結 言

歯車系におけるカオスの特徴抽出のための基礎考察として、角度伝達誤差形状とカオスの関係について 1 自由度の振動モデルで検討を行った結果、次の 2 点が明らかになった。

(1) ポアンカレ写像によって相平面上のストレンジアトラクタを観察したところ、正弦波状誤差と三角波状誤差の 2 種類の誤差に対する形状には相似したところがあるが、スペクトル解析では明らかに差異が認められ、スペクトル解析は特徴抽出に有効である。

(2) 誤差成分にランダム成分が含まれる場合、カオスが消失し、周期振動に落ち着く。

終わりに、本研究を行うにあたって、種々協力いただいた本学技官・斉藤秀次郎氏に謝意を表す。

文 献

(1) Kumar, A. S., ほか 2 名, *Trans. ASME, J. Vib. Acoust. Stress Reliab. Des.*, **108**(1986), 362.

(2) 寺内・ほか 2 名, 機論, **33**-247(1967), 465.
 (3) Opitz, H., *Proc. 1967 Semi-Int. Symp. Gearing*, (1967-9), 199, JSME.
 (4) Retting, H., *Konstruktion*, **17**-2(1965), 41.
 (5) 会田・佐藤, 機論, **34**-268(1968), 2226.
 (6) 清野・久保, 機論, No. 830-8(1983-8), 323.
 (7) 梅沢, 機誌, **85**-759(1982), 27.
 (8) 佐藤・ほか 2 名, 機論, **45**-392, C(1979), 486.
 (9) 佐藤・ほか 3 名, 機論, **50**-458, C(1984), 1849.
 (10) 佐藤・ほか 2 名, 機論, **54**-507, C(1988), 2735.
 (11) 会田・ほか 3 名, 機論, No. 207 (1969-4), 145.
 (12) 富田, 別冊数理科学, エントロピーと混沌, (1984), 134, サイエンス社.
 (13) 戸部・ほか 2 名, 機論, **41**-351(1975), 3279.
 (14) 山口, システムと制御, **25**-2(1981), 82.
 (15) 上田・川上, 計測と制御, **20**-8(1981), 3.
 (16) 森, 数理科学, No. 311(1989-3), 42, サイエンス社.
 (17) Toda, A. and Tordion, G. V., *Proc. Fifth World Congr. Theory Mach. Nech.* 1979, **1**(1979), 1130, ASME.
 (18) 佐藤・ほか 3 名, 機論, **57**-538, C(1991), 2108.
 (19) Orguen, H. N. and Houser, D. R., *J. Sound Vib.*, **121**(3), (1988), 323.
 (20) 戸部・佐藤, 機論, **42**-363(1976), 3652.
 (21) Neriga, S. V., Bhat, R. B. and Sanker, T. S., *ASME DE. (ASME Des. Eng. Div.)*, **1**(2), (1987), 287, ASME.
 (22) Weidner, G. and Lechner, G., *Proc. JSME Int. Conf. on Motion and Powertransmissions*, (1991), 37, JSME.
 (23) Pfeiffer, F., *Proc. JSME Int. Conf. on Motion and Powertransmissions*, (1991), 43, JSME.
 (24) 津田, カオスの脳観, (1990), 3 章, サイエンス社.
 (25) 樺木・添田・中溝, 統計的自動制御理論, (1966), 208, コロナ社.