磁気浮上振動絶縁システムの外乱包含最適制御の実験的考察*

姜 聲 国^{*1}, 吉 田 和 夫^{*2}, 原 進^{*3}

Experimental Considerations on Disturbance-Accommodation Optimal Control of Magnetically Levitated Vibration Isolation System

Sungkook KANG, Kazuo YOSHIDA and Susumu HARA

The object of this paper is the application of the theory of the optimal control with feedforward link and the frequency-shaped optimal control for the vibration isolation system using magnetic levitation. The vibration isolation system is a single-degree-of-freedom system and the vibration of its table, which is levitated by repulsion force of a permanent magnet, is controlled by attraction force of an electromagnet. By carrying out experiment, it was experimentally verified that the control efficiency can be improved by the application of the theory of the optimal control with feedforward link and can be further improved by adopting the frequency-shaped optimal control.

Key Words: Vibration Isolation, Electromagnetic-Induced Vibration, Optimal Control, Transmissibility, Active Control, Feedforward Control

1. まえがき

近年, 測定技術や生産加工技術の精度が高くなるにたがって, アクティブ振動絶縁システムの開発が進められている. アクティブ振動絶縁システムにおいてアクチュエータとしては, 空気圧が用いられた例^{(1),(2)}が多いが, 最近では摩擦がなくかつ省エネルギー形の永久磁石と電磁石よりなる磁気浮上系のアクチュエータの開発が行われている⁽³⁾. そして, 上記のアクチュエータを除振台に応用した例としては, 外乱相殺と速度フィードバック組合せ制御を行った例⁽⁴⁾がある. しかし, このような磁気浮上系の振動絶縁システムにおいて, 外乱包含最適制御については実験的な考察が行われていない.

アクティブ振動絶縁システムに最適理論を適用するとき, 目的関数を状態方程式の状態変数だけで表せない場合にはフィードフォワード併合最適制御を行う必要がある⁽⁵⁾. さらに, 振動絶縁制御の性能を向上させるためには目的関数の物理量の重み付けを周波数領域

によって変える必要がある⁽⁶⁾.

本研究は, 磁気浮上系の振動絶縁システムに外乱包含最適制御を適用して, その制御特性を実験的に考察することを目的としている. 具体的に, 永久磁石の反発力によって浮上するテーブルの振動を上下の電磁石の吸引力により制御する1自由度の振動絶縁システムを対象として, フィードフォワード併合最適制御理論および周波数成形最適制御理論の適用を試みる.

2. 電磁石によって制御される
磁気浮上振動絶縁モデル

本研究においては, 図1に示されるように永久磁石と電磁石で構成され, 永久磁石の反発力によって浮上するテーブルの振動を上下の電磁石の吸引力により制御する1自由度の磁気浮上振動絶縁モデルについて考える.

この力学モデルの運動方程式は以下になる.

$$m\ddot{y} = mg - P - F_1 + F_2 \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここで, m , P , F_1 , F_2 はテーブルの質量, 永久磁石の反発力, 上側電磁石による制御力, 下側電磁石による制御力で, y はテーブルの絶対変位, z は外乱の絶対変位である. また, 平衡点での微小変化を考えて, $mg - P - F_{10} + F_{20} = 0$ (ここで, F_{10} は上側電磁石による平衡定

* 原稿受付 平成4年5月21日.

^{*1} 正員, 慶應義塾大学大学院 (〒223 横浜市港北区日吉3-14-1).^{*2} 正員, 慶應義塾大学理工学部.^{*3} 学生員, 慶應義塾大学大学院.

図1 1自由度の磁気浮上振動絶縁モデル

常力, F_{20} は下側電磁石による平衡定常力である。)を考慮し, 各々の要素について線形近似することによって次式を得る.

$$\ddot{y} = \left[\frac{k}{m} \frac{2F_{20}}{mX_{20}}(B+1) \right] x + \frac{4F_{20}}{mL_{20}} i - \frac{c}{m} \dot{x} \quad \dots\dots\dots (2)$$

x はテーブルの相対変位である.

次に, 電圧方程式は次式のように表される.

$$e = Ri + \frac{d}{dt}(L \times i) \quad \dots\dots\dots (3)$$

ここで, e, R, i, L は直流電磁石の電圧, コイル抵抗, 電流, コイルのインダクタンスである. また, 平衡点近傍で線形近似することによって次式を得る.

$$\dot{i} = \frac{R}{L_0} i - \frac{I_{20}}{X_{20}} \left(1 - \frac{L_1}{L_0}\right) \dot{x} + \frac{1}{L_0} e \quad \dots\dots\dots (4)$$

式(2), (4)において

k : テーブルの剛性 N/m

c : テーブルの減衰係数 N·s/m

F_{20} : 下側電磁石による平衡定常力 N

X_{20} : 下側電磁石からテーブル下面までの

平衡定常変位 m

B : X_{20}/X_{10}

I_{20} : 下側電磁石の平衡定常電流 A

L_0 : 有効インダクタンス H

L_1 : 漏れインダクタンス H

である.

システムと入力外乱の状態ベクトルを

$$y = [y \ \dot{y} \ i]^T \quad x = [x \ \dot{x} \ i]^T \quad z = [z \ \dot{z} \ \ddot{z}]^T$$

として, 式(2), (4)で表された式を状態方程式化すると, 絶対座標系と相対座標系の2つの座標系それぞれについて以下のように表現される. ここで, 制御入力 u は電磁石の電圧 e である.

$$\begin{aligned} \dot{y} &= Ay + bu + D_y z \\ \dot{x} &= Ax + bu + D_x z \quad \dots\dots\dots (5) \end{aligned}$$

ただし,

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\omega_i^2 - \frac{2F_{20}}{mX_{20}}(B+1) & -2\zeta_i\omega_i & \frac{4F_{20}}{mL_{20}} \\ 0 & \frac{I_{20}}{X_{20}}\left(1 - \frac{L_1}{L_0}\right) & -\frac{R}{L_0} \end{bmatrix} \\ D_y &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \omega_i^2 + \frac{2F_{20}}{mX_{20}}(B+1) & 2\zeta_i\omega_i & 0 \\ 0 & -\frac{I_{20}}{X_{20}}\left(1 - \frac{L_1}{L_0}\right) & 0 \end{bmatrix} \\ D_x &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad b = [0 \quad 0 \quad 1/L_0]^T \end{aligned}$$

外乱に関する情報が全くない場合は, 外乱を白色雑音と仮定せざるをえない. そのような場合は, フィードフォワード制御則は理論的には導かれない. しかしながら, 無限の周波数領域において白色雑音の性質を有する外乱は存在せず, 実際問題においては, 周波数領域が限定される場合が多い. そこで, 外乱の周波数領域を限定し, その周波数領域においてはパワースペクトルが白色雑音の特性と同等なものと仮定する. これは, その周波数領域においては外乱の特性についてスペクトルの特徴を特に仮定しないことを意味する. すなわち, 外乱 $z(t)$ は白色雑音を入力としてローパス特性の伝達関数を有する成形フィルタによって生成される有色雑音であると仮定する. 成形フィルタの伝達関数が次式の場合,

$$\frac{sz(s)}{w(s)} = \frac{\omega_i^2}{s^2 + 2\zeta_i\omega_i s + \omega_i^2} \quad \dots\dots\dots (6)$$

従って, 入力外乱の状態方程式は以下のように表される.

$$\dot{z} = A_z z + dw \quad \dots\dots\dots (7)$$

ただし,

$$A_z = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\omega_i^2 & -2\zeta_i\omega_i \end{bmatrix}$$

$$d = [0 \quad 0 \quad \omega_i^2]^T$$

$$\zeta_i = c_i / 2\sqrt{m_i k_i}, \quad \omega_i = \sqrt{k_i / m_i}$$

したがって, 式(5)と式(7)を結合すれば拡大系の状態方程式は次のようになる. 以下は相対座標系の場合について表す.

$$\dot{x}_p = A_p x_p + B_p u + B_{wp} w \quad \dots\dots\dots (8)$$

$$x_p = [x \ z]^T \quad A_p = \begin{bmatrix} A & D_x \\ 0 & A_z \end{bmatrix}$$

$$B_p = [b \ 0]^T \quad B_{wp} = [0 \ d]^T$$

図2 外乱の周波数領域が限定された場合のフィード
フォワード併合最適制御の構成図

3. 外乱包含最適制御

3.1 最適制御則 式(8)の拡大システムに対して最適制御理論を用い、次の評価関数を最小にする u を求める。ここでは、入力不規則な場合を想定しているため評価関数は期待値で評価することにする。

$$J(u) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E \left\{ \int_0^T [x_p^T Q x_p + r u^2] dt \right\} \quad (9)$$

$$Q = \begin{bmatrix} Q_1 & G \\ G^T & Q_2 \end{bmatrix}$$

ただし、 $E[\cdot]$ は数学期待値を意味する。

この最適制御問題から導かれる Riccati 方程式の一意正定解 P を

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12}^T & P_{22} \end{bmatrix}$$

と分割すると、Riccati 方程式は次のようになる。

$$0 = PA_p + A_p^T P - PB_p r^{-1} B_p^T P + Q \quad (10)$$

ここで、

$$-\dot{P}_{11} = P_{11} A + A^T P_{11} - P_{11} b r^{-1} b^T P_{11} + Q_1$$

$$-\dot{P}_{12} = P_{11} D_x + A^T P_{12} - P_{11} b r^{-1} b^T P_{12} + G + P_{12} A_x$$

$$-\dot{P}_{22} = P_{12}^T D_x + D_x^T P_{12} - P_{12}^T b r^{-1} b^T P_{12} + Q_2 + P_{22} A_x + A_x^T P_{22}$$

のようになる。したがって、最適制御則は次式で与えられる。

$$u = -F_b x - F_f z : F_b = r^{-1} b^T P_{11}, F_f = r^{-1} b^T P_{12} \quad (11)$$

ここで、 F_b はフィードバックゲイン、 F_f はフィードフォワードゲインである。このようにして最適制御系は図2のようにフィードバックリンクとフィードフォワードリンクとして構成される。

3.2 周波数成形最適制御則 外乱包含最適制御の結果として、目的関数を変位にする場合は共振点以下の低周波数域で制御効果がよく現われて、加速度

図3 周波数重みのフィルタ特性

にする場合は共振点以上の高周波数域で制御効果がよく現われる⁽⁵⁾。したがって、本節では振動絶縁システムにおいて全周波数領域で効果的に振動絶縁を行うために、振動絶縁に適した評価関数として共振点以下の低周波数域では目的関数を絶対変位、共振点以上の高周波数域では目的関数を絶対加速度にする評価関数⁽⁶⁾を採択して、周波数成形評価基準による外乱包含最適制御の応用を試みる。振動絶縁に適した評価関数として、振動絶縁システムのテーブルの絶対変位、絶対加速度、制御力の周波数領域での重みつき二乗平均値を設定する。これより次式が得られる。

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} [y^*(s) G_d^*(s) G_d(s) y(s) + \dot{y}^*(s) G_a^*(s) G_a(s) \dot{y}(s) + u^*(s) r(s) u(s)]_{s=j\omega} d\omega \quad (12)$$

ここで、アスタリスクは複素共役転置を示す。また、本研究では、周波数領域での重み関数 $G_d(s)$ 、 $G_a(s)$ は次式のようなローパスフィルタとハイパスフィルタを用いた。図3でその特性を示す。

$$G_d(s) = \frac{\alpha \omega_s^2}{s^2 + 2\zeta_d \omega_s s + \omega_s^2} \quad G_a(s) = \frac{\beta s^2}{s^2 + 2\zeta_a \omega_s s + \omega_s^2} \quad (13)$$

評価関数である式(12)において、 $y(s)$ 、 $\dot{y}(s)$ を状態ベクトルのラプラス変換したもので表示すると、以下のようになる。

$$y(s) = c_d x_p(s) \quad \dot{y}(s) = c_a A_p x_p(s) \quad (14)$$

ただし、

$$c_d = [1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0] \quad c_a = [0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0]$$

式(14)を式(12)に代入すると次式になる。

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} [x_p^*(s) Q_d(s) x_p(s) + x_p^*(s) Q_a(s) x_p(s) + u^*(s) r(s) u(s)]_{s=j\omega} d\omega \quad (15)$$

ただし、

$$Q_d(s) = c_d^T G_d^*(s) G_d(s) c_d \quad Q_a(s) = A_p^T c_a^T G_a^*(s) G_a(s) c_a A_p$$

である。このとき $Q_d(s)$ 、 $Q_a(s)$ 、 $r(s)$ は次式の形で表現できる。

$$\begin{aligned} Q_d(s) &= P_d^*(s)P_d(s) & Q_a(s) &= P_a^*(s)P_a(s) \\ r(s) &= P_r^*(s)P_r(s) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (16)$$

ここで、次式のような新しい変数を導入する。

$$\begin{aligned} P_d(s)x_p(s) &= Z_d(s) & P_a(s)x_p(s) &= Z_a(s) \\ P_r(s)u(s) &= Z_r(s) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (17)$$

したがって、式(17)を状態空間表現にすると次式となる。

$$\begin{aligned} \dot{x}_d &= A_d x_d + B_d x_p & Z_d &= C_d x_d \\ \dot{x}_a &= A_a x_a + B_a x_p & Z_a &= C_a x_a + D_a x_p \\ Z_r &= D_r u \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (18)$$

このシステムと元のシステムを結合して拡大システムに表現すれば、その場合は時間関数の評価関数になるので、拡大システムに対して従来の手法を用いることによって次式のような最適制御則を求めることができる。

$$u = -r_n^{-1} B_n^T P_n x_n \quad \dots\dots\dots (19)$$

ただし、 P_n は次の定常Riccati方程式の解である。

$$0 = P_n A_n + A_n^T P_n - P_n B_n r_n^{-1} B_n^T P_n + Q_n \quad \dots\dots\dots (20)$$

4. 制御実験

4.1 実験装置 本実験に用いた実験装置の概略図を図4に示す。装置本体は加振器の振動を受ける外枠部（一般の除振装置における床面を想定された部分）とリニアベアリングでガイドされるテーブル部（一般の除振装置における台上を想定された部分）より成り立つ。外枠部が加振されると、テーブル部は永久磁石の反発力による等価ばね力、リニアベアリングの減衰力等を介して加振に応答した振動を発生する。このとき外枠部に固定された上下、左右4個の電磁石の吸引力を用いてテーブル部の振動を制御するものである。

本装置に用いられた永久磁石は円筒形（直径47mm、厚さ10mm）でテーブル部下面および外枠部内

図4 実験装置の概略図

側底面の2箇所に設置されている。本装置ではこの2つの永久磁石による反発力がある微小範囲内では線形であるとみなし、これを等価ばねと考えている。ばね定数を同定する方法としては、おもりの重さを変えることによって永久磁石間のギャップの変化を調べ、実験を行う際使用する平衡間隔（平衡点、平衡電圧時の間隔）における接線の傾き求めた。おもりの重力とギャップとの関係を図5に示す。

電磁石はE型フェライトコアを使用して、塩化ビニール製のボビンを経てエナメル線を300回巻付けている。これをテーブル部上下、左右4箇所に設置している。

次に、粘性減衰係数はテーブル部を自由振動させ、その波形から減衰比を対数減衰率を求めて実験的に決定した。

4.2 実験方法 本実験では、外乱として0～50Hzのバンド幅をもつ白色雑音を加え、伝達関数を測定した。絶対座標系と相対座標系において、外乱の変位に対するテーブル部の絶対変位の周波数応答を求めるためには、状態量として外乱の変位、速度、加速度、絶対座標系においてテーブル部の絶対変位と絶対速度、相対座標系においてテーブル部の相対変位と相対速度、また、絶対座標系と相対座標系のそれぞれにおいて電磁石の電流が必要となる。

外乱の変位は非接触微小変位計で測定し、外乱の速度は微分器を通して得て、外乱の加速度は外枠部に取付けられた加速度ピックアップで検出した。また、テーブル部の相対変位は上記のような入力波形で外枠部を加振してテーブル部と外枠部との変位を非接触微小変位計で測定し、テーブル部の相対速度は微分器を通して得た。そして、テーブル部の絶対変位と絶対速度は、加算器を用いてテーブル部の相対変位と相対速度に外乱の変位と速度を合算することによって得られた。電磁石の電流は電磁石回路と直列に接続された抵抗器の電圧降下を検出することで求められた。

図5 永久磁石間のギャップと反発力の関係

..... Uncontrolled (Theory) ——— Controlled (Theory) ——— Controlled (Experiment)

図6 外乱包含最適制御による周波数応答 (数値計算および実験)

図7 周波数成形最適制御による周波数応答の数値計算および実験結果

これらの状態量をA/Dコンバータを通して制御用パーソナルコンピュータに入力した。ここで制御プログラムを実行し、制御則を算出し、D/Aコンバータに送った後、アンプを通して電磁石に制御力（吸引力）を与えた。なお、制御開始前に本制御の線形性を維持するため平衡電圧として0.7Vを上下の電磁石にかけてから制御を開始した。制御時のサンプリング周期は3msに設定された。

5. 結果および考察

数値計算と実験において、絶対座標系と相対座標系の状態変数を選定した場合と、絶対系と相対系の加速度、速度、変位の6つの評価関数の場合について振動伝達率、すなわち周波数応答を求めて、評価関数と制御特性の関係を考察した。その際、絶対系と相対系に関係なしに外乱の変位に対する質点の絶対変位の周波数応答が求められた。数値計算と実験に用いた値は以下のとおりである。

$$\begin{aligned} m &= 1.53 \text{ kg}, \quad k = 1890.4 \text{ N/m}, \quad c = 1.474 \text{ kg/s}, \\ X_{20} &= 1.20 \times 10^{-3} \text{ m}, \quad B = 1.0, \quad F_{20} = 1.27 \times 10^{-1} \text{ N}, \\ L_0 &= 9.65 \times 10^{-2} \text{ H}, \quad L_a = 3.35 \times 10^{-2} \text{ H}, \\ I_{20} &= 1.4 \times 10^{-1} \text{ A}, \quad R = 5.04 \Omega, \\ \omega_i &= 5 \times \omega_0, \quad \zeta_i = 0.7 \end{aligned}$$

なお、入力に対する重み r は座標系によらず、目的関数を変位に取った場合は $r = 1.0\text{E-}7$ 、目的関数を速度に取った場合は $r = 1.0\text{E-}4$ 、目的関数を加速度に取った場合は $r = 8.0\text{E-}2$ とした。

図6は数値計算結果と実験結果を一緒にまとめたものである。周波数応答の結果は横軸がFrequency[Hz]、縦軸がGain[dB]である。数値計算結果と実験結果を比較すると、低周波数領域では加振器特性の影響により周波数応答が乱れていることと、フィードバック制御

の場合に高周波数域で数値計算の結果と実験の結果が一致しないところがあるが、全般的に類似している。この図から、フィードフォワード併合最適制御を行えば、状態変数の座標系に依存しないで目的関数そのものによって制御特性が決定される。また、制御特性は評価関数によってそれぞれ異なる。つまり、目的関数を加速度にする場合は共振点以上の高周波数域で制御効果がよく現われて、目的関数を速度にする場合は共振点付近で制御効果がよく現われて、目的関数を変位にする場合は共振点以下の低周波数域で制御効果がよく現われる。

図7は周波数成形評価関数による外乱包含最適制御の場合において、数値計算結果と実験結果を一緒にまとめたものである。制御系設計に用いられた入力に関する重みは $r_a = 1.0\text{E-}6$ である。ここで、共振点以下では目的関数を変位としての制御特徴が現われて、共振点以上では目的関数が加速度としての制御特徴が現われている。したがって、周波数成形評価関数を選択すれば、振動絶縁制御の性能を向上させられることが実証された。

6. まとめ

本研究は、永久磁石と電磁石よりなる磁気浮上系の振動絶縁システムにおいて、フィードフォワード併合最適制御理論および周波数成形最適制御理論の適用を目的として、その制御特性を実験的に考察した。得られた結果を要約すると次のようになる。

(1) フィードフォワード併合最適制御を行えば、振動絶縁制御性能を向上させられることが実験的に実証された。

(2) 周波数成形評価関数を選択すれば、振動絶縁制御の性能をさらに向上させられることが実験的に実証された。

最後に、実験装置の製作においては（株）トキコの助力を得たことを記し、謝意を表する。

文 献

- (1) 岩田・岡田, 機論, 50-458, C (1984), 1955.
- (2) 安田・ほか2名, 機講論, No. 910-39, III A (1991-7), 163.
- (3) 長屋・荒井, 機論, 56-525, C (1990), 1230.
- (4) 長屋・ほか2名, 機講論, No. 910-52 (1991-9), 295.
- (5) 美・吉田, 機講論, No. 910-52 (1991-9), 101.
- (6) 美・吉田, 機論, 機講論, No. 920-55, III B (1992-7), 370.