油圧サーボ系の安定性に及ぼす摩擦の影響*

(数値シミュレーションによる検討)

林 勲^{*1}, 相沢 邦充^{*2}, 飯村 彥郎^{*1}

Effect of Coulomb Friction on Stability of Hydraulic Servomechanism

Satoru HAYASHI, Kunimitsu AIZAWA and Ikuro IIMURA

Stability and self-excited vibrations in a hydraulic servo system affected by Coulomb friction have been studied by digital simulation and a piecewise linear method. The neutral operating point of the servo is always stable for any supply pressure. The system has a multiple structure of stability, which consists of unstable and stable limit cycles around the stable operating point. Thus self-excited vibrations can occur only for disturbances beyond a certain critical value. The self-excited vibrations of small amplitude correspond to stick-slip vibrations different from the usual type.

Key Words: Frictional Vibration, Coulomb's Friction, Nonlinear Vibration, Stability, Self-excited Vibration, Fluid Power Systems

1. ま え が き

油圧サーボによる高精度位置決めを阻む要因としてしゅう動部に作用する固体摩擦があり、油圧アクチュエータの低速送りに際して発生するスティックスリップや動作点に生ずる不感帯がこれに起因することはよく知られている⁽¹⁾⁽²⁾。

アンダラップのある弁を用いる油圧サーボ系に摩擦が作用するとき、中立動作点を中心とした不感帯が生じて中立動作点は安定になるが、作動油の圧縮性に起因する系の不安定化に伴って自励振動が発生して系の大域的挙動を複雑にする。その間の事情は、既に記述関数法によって一部が明らかにされているが⁽³⁾、この方法はあくまで近似解法であり、現象波形が正弦波からずれるに従ってその近似は悪くなり、重大な欠落が生ずることもある。特に、固体摩擦の非線形特性は運動の開始、終了時、すなわち速度零の時最も顕著となるので動作点で線形化する通常的手法では動作点近傍の動作に対して著しく正確さを欠く結果となる。

本研究では、記述関数法によるこの欠点を補って、定量的に正確な推論を可能にする数値シミュレーション法によってこの問題を詳細に検討した。特に中立動作点近傍の微小擾乱に対する系挙動を検討し、従来指摘されたことのない新たなスティックスリップ現象が生じ得ること明らかにした。スティックスリップ現象は、通常工作機械のテーブルなどを定速で送る時に動摩擦力が静摩擦力より低いことに起因して生ずるが、ここで生ずるスティックスリップ現象は、定摩擦の作用の下で静止動作点周りで生ずる現象であり、通常のものとは著しく異なることを明らかにした。

2. 基礎方程式

図1に示す油圧サーボ系の模式図を参照しつつ系の動作を記述する基礎方程式を誘導する。

この系は負荷を駆動するシリンダが弁と一体となって固定されたピストン軸上を移動する構造を取っており、出力変位、すなわち、シリンダ変位がスプール弁開度として入力側に直接的にフィードバックされているので、スプール変位 z 、シリンダ変位 y 、スプールとシリンダの相対変位 x の間には次の関係が成立する。

$$x = z - y \cdots \cdots (1)$$

弁ポート形状は長方形とし、給油側、排油側のアン

* 昭和63年9月7日 第2回流体の計測と制御に関する国際シンポジウムにおいて講演、原稿受付 平成4年2月12日。

^{*1} 正員、東北大学流体科学研究所 (〒980 仙台市青葉区片平2-1-1)。

^{*2} 正員、ダイキン工業(株) (〒566 摂津市西一津屋1-1)。

ドラップ量は互いに等しいとするとスプール弁の各オリフィスの通過流量は次式で与えられる。

- (1) 左側給油オリフィス流量 Q_1

$$Q_1 = cw\psi(E+x)\text{sgn}(P_s - P_1)\sqrt{2|P_s - P_1|/\rho} \quad \dots\dots\dots(2)$$

- (2) 右側給油オリフィス流量 Q_1'

$$Q_1' = cw\psi(E-x)\text{sgn}(P_s - P_2)\sqrt{2|P_s - P_2|/\rho} \quad \dots\dots\dots(3)$$

- (3) 左側排油オリフィス

$$Q_2 = cw\psi(E-x)\sqrt{2\psi(P_1)/\rho} \quad \dots\dots\dots(4)$$

- (4) 右側排油オリフィス流量

$$Q_2' = cw\psi(E+x)\sqrt{2\psi(P_2)/\rho} \quad \dots\dots\dots(5)$$

ここに、 w は弁ポート幅、 E は弁のアンダラップ量、 P_s は供給圧力、 P_1 、 P_2 はそれぞれ左右の弁室圧力、 c はオリフィスの流量係数、 ρ は作動油の密度である。また、関数 $\text{sgn}(x)$ 、 $\psi(x)$ は次のように定義される。

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

$$\psi(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

弁室とシリンダの流量についての連続の式としてスプール・弁体間の流れ、ピストンとシリンダ間の漏れを考慮して次式を得る。

- (1) 左側弁室と右側シリンダ室について

$$Q_1 = Q_2 + C_e P_1 + C_d (P_1 - P_2) + (V_1/x) dP_1/dt + A dy/dt \quad \dots\dots\dots(6)$$

- (2) 右側弁室と左側シリンダ室について

$$Q_1' = Q_2' + C_e P_2 - C_d (P_1 - P_2) + (V_2/x) dP_2/dt - A dy/dt \quad \dots\dots\dots(7)$$

ここに、 C_e は弁の外部漏れ係数、 C_d はピストンとシリンダ間の漏れ係数、 x は作動油の体積弾性率、 V_1 、 V_2 はそれぞれピストン右左シリンダ室容積、 A はシリンダの実効断面積である。

負荷の運動方程式は次式となる。

図1 直結形油圧サーボ系の模式図

$$M d^2 y / dt^2 + B dy / dt + F \cdot \text{sgn}(dy / dt) = A (P_1 - P_2) \quad \dots\dots\dots(8)$$

ここに、 M は負荷質量、 B は粘性減衰係数、 F は摩擦力である。摩擦力は、一般に速度の関数として表されるが、ここでは速度変化にかかわらず常に一定と仮定し、静摩擦と動摩擦の差もないとする。摩擦の速度依存性の影響については別途に検討する。

3. 数値シミュレーション

油圧サーボ系の応答は2章で示した基礎方程式(1)

表1 計算に用いた系諸元

Load mass	$M=100$	kg
Piston area	$A=1.0 \times 10^{-3}$	m^2
Cylinder volume	$2V=2 \times 2.851 \times 10^{-4}$	m^3
Discharge coefficient of valve orifice	$C=0.5$	
External and internal leakage coefficient	$C_e=2.03 \times 10^{-14}$	$\text{m}^3/\text{Pa} \cdot \text{s}$
	$C_d=0$	$\text{m}^3/\text{Pa} \cdot \text{s}$
Bulk modulus of oil	$\kappa=7.84 \times 10^8$	Pa
Density of oil	$\rho=887.0$	kg/m^3
Port width of valve	$w=3.0 \times 10^{-3}$	m
Underlap	$E=1.0 \times 10^{-6}$	m
Damping coefficient	$B=5.90 \times 10^3$	$\text{N} \cdot \text{s}/\text{m}$

(a) $z=0.0006 \text{ mm}$

(b) $z=0.0015 \text{ mm}$

(c) $z=0.0500 \text{ mm}$

(d) $z=1.000 \text{ mm}$

図2 シミュレーションによる振動波形

から(8)を連立させて解けば良いが、これらの方程式は非線形項を含んでおり、解析的に解くことは極めて困難である。そこで本研究では Runge-Kutta 法による数値解法を用いた。基礎方程式(1)から(8)までに用いた変数を以下のように置いて、1 階の連立微分方程式の形に直す。

$$x_1 = y, x_2 = dy/dt, x_3 = P_1, x_4 = P_2, u = z \quad \dots\dots\dots (9)$$

$$\left. \begin{aligned} dx_1/dt &= x_2 \\ dx_2/dt &= [-Bx_2 + A(x_3 - x_4) - F \cdot \text{sgn}(x_2)]/M \\ dx_3/dt &= x[-Ax_2 - C_e x_3 - C_d(x_3 - x_4) + Q]/V_1 \\ dx_4/dt &= x[Ax_2 - C_e x_4 + C_d(x_3 - x_2) + Q']/V_2 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (10)$$

ここに、

$$\begin{aligned} Q &= Q_1 - Q_2 \\ &= \text{sgn}(P_s - x_3) c w \psi(E + u - x_1) \sqrt{2|P_s - x_3|/\rho} \\ &\quad - c w \psi(E - u + x_1) \sqrt{2\phi(x_3)/\rho} \\ Q' &= Q'_1 - Q'_2 \\ &= \text{sgn}(P_s - x_4) c w \psi(E - u + x_1) \sqrt{2|P_s - x_4|/\rho} \\ &\quad - c w \psi(E + u - x_1) \sqrt{2\phi(x_4)/\rho} \end{aligned}$$

式(12)を初期条件 $x_1 = x_2 = 0, x_3 = x_4 = P_0$ のもとにスプールの入力変位をステップ状に変化させ、その応答を求めた。計算に用いた系の諸元を表 1 に示す。

本研究では摩擦に起因するスティックスリップ現象を扱うので、スリップ開始点と固着開始点を正確に計算しなければならないが、これらの点は一般に時間格子の中間に来るので、R-K 法の精度を損なわずに計算するためには若干の工夫を要する。本研究では著者らが開発した独自の方法⁽⁴⁾に基づいて計算を行った。

摩擦力を $F = 196 \text{ N}$ 、供給圧を $P_s = 7.84 \text{ MPa}$ とし、入力ステップ z を変化させた場合の系の応答波形の変化を図 2 (a)～(d) に示す。

擾乱としてのステップ入力 z が極めて小さい場合、スティックスリップ状の応答をするが、やがて減衰して中立動作点近傍の不感帯内に静止する [図 2 (a)]。 z が限界値を越えると、スティックスリップ状振動は次第に成長して [図 2 (b)]、一定振幅の振動に落ち着く [図 2 (c)]。

さらに入力ステップ量を増加させて、第 2 の限界値を越えると、振幅の大きな正弦状自励振動が発生する [図 2 (d)]。すなわち、同一動作条件下においても擾乱の大きさによってスティックスリップ状、正弦状と形態の異なる 2 種類の振動のうちどちらか一方が選択されて発生する。ここに見られるスティックスリップ状自励振動は、中立動作点を中心とする振動であり、

シリンダを低速で一方向に送った時に生ずる通常のスティックスリップ現象とは異なる。

供給圧力に対する周波数変化を示した図 3 によれば正弦振動の周波数は一定であり、ほぼ系の固有振動数に等しいのに対して、スティックスリップ振動の周波数は低く、供給圧に大きく依存している。

正弦状振動では、速度零において全くスティックしないのに対して、スティックスリップ状自励振動では速度零で運動は停滞する(スティック部)。この状態でピストンにかかる負荷圧力が徐々に増加し、やがて摩擦力に打ち勝って運動を開始する(スリップ部)。

シミュレーション結果を、横軸に供給圧 P_s 、縦軸にステップ入力 z 、あるいは発生する振動の振幅をとって図 4 に示し、系の大域的な性格を論ずることにする。

図 4 において B'ABCD 曲線は一種の安定境界を表しており、区間 A'B' の供給圧力に対して破線 AB' 間、あるいは破線 BC を越える入力を与えると振動は成長してそれぞれ実線 AB, CD に落ち着くが、AB', BC を越えない場合には、それぞれ A'B'', AB に落ち着く。つまり、図 4 の実線は安定な自励振動の振幅を表すのに対して、破線は発生する振動の形態を分けるステップ入力の限界値、すなわち不安定な自励振動の

図 3 発振周波数

図 4 サーボ系の大域的安定性

図 5 大域安定性に及ぼす諸パラメータの影響

振幅を表している。

このように図 4 によれば、特定の供給圧力 (図 4 A'B' 間) において多重の安定構造が存在する。この現象の発生条件を調べるため、系のパラメータのいくつかを変化させ、数値シミュレーションを行って図 5 (a)~(d) に示す。

図 5 (a) は固体摩擦力を変化させた場合の系の安定性を示す。図中の破線は摩擦の作用しない場合の安定限界である。この場合、この限界値以上に供給圧力を上げると動作点そのものが不安定になるのに対して、摩擦の作用する系においては動作点は常に安定であり、ある限界を越える入力擾乱に対してのみ発振する、いわゆる硬発振系となるが、この点に関する詳細は次章に述べる。

図 5 (b) は負荷質量を変化させた場合であり、質量の増加に伴い系の安定性は劣化する。

図 5 (c), (d) はそれぞれアンダラップ、弁ポート幅を変化させた場合の安定性である。

図 6 絶対安定領域

図 5 (c), (d) より明らかなようにアンダラップが大きく、ポート幅が広い弁ではこの現象は現れ難くなる。これは弁開度変化に伴う流量変化が大きく、したがって、負荷圧力変化が急激であるためスティック状態を維持し難くなるためと考えられる。

また、供給圧力を下げていくと、いかなる入力に対しても系は発振しなくなるが、この領域は絶対安定領域といい、この境界を供給圧力で表して絶対安定限界供給圧力 P_{scr} と呼ぶことにする。図 6 は摩擦力を変化

させた場合の絶対安定限界供給圧力変化を表している。当然のことながら摩擦力の増加に伴って絶対安定領域は拡大し、系は安定化する。

4. 解析的手法による検討

前章では数値シミュレーションの結果、アンダラップ弁を用いるサーボ系に摩擦が作用するとき供給圧力 P_s のある領域で安定性に関する多重構造が出現し、振幅の小さい自励振動はスティックスリップ状の振動となることを示した。しかしこのスティックスリップ現象は、通常のものとは発生の機構が全く異なっている。

通常のスティックスリップは、摩擦の作用下に振動系がテーブルと一定速度で相対運動をする時発生するもので、動摩擦が静摩擦より低いことが発振に本質的な役割を果たすが、ここで扱うスティックスリップの発生には動摩擦と静摩擦の違いは本質的ではなく、前章の数値シミュレーション結果に見られるように、両者に差がなくても発振する。

このスティックスリップが発生するのは弁開きが極めて小さい範囲に限られるので、弁の流量特性を線形化してもその誤差は極めて小さい。

一方、摩擦力は $dy/dt=0$ において不連続となるので動作点で線形化することはできないが、速度が符号

を変えない限り摩擦力は一定であるから、基礎方程式を $dy/dt > 0$ 領域と $dy/dt < 0$ 領域とに分けて、それぞれ区分的に線形化し、各領域の解を $dy/dt=0$ の点で接続すれば正確な解が得られる。

以下においては、図7を参照しつつ振動の経過をスティック期とスリップ期に分けて現象の解析を行って振動波形、動作点および定常振動の安定性、振動数などスティックスリップ現象の諸相を理論的に検討する。

[I] スティック期 スティック期において運動は停止状態であるから、系を記述する方程式は連続の式のみとなる。よって、区間条件、初期条件、方程式は、

〈区間条件〉

$$d^2y/dt^2 = dy/dt = 0, y_0 = M_i, |\Delta P| < F/A = P_f \quad \dots\dots\dots (11)$$

〈初期条件〉

$$t=0, \Delta P = \Delta P_i \quad \dots\dots\dots (12)$$

〈方程式〉

$$C_0 d\Delta P/dt = K_a M_i - K'_p \Delta P \quad \dots\dots\dots (13)$$

ここに、

$$K_p = \partial(Q - Q')/\partial \Delta P, K_a = \partial(Q - Q')/\partial x$$

$$\Delta P = P_1 - P_2, K'_p = K_p + 2C_d + C_e$$

図7 スティックスリップ振動波形

$E=0.01 \text{ mm}, P_s=7.84 \text{ MPa}, F=196 \text{ N}$
 $z=0.005 \text{ mm}, M=100 \text{ kg}$

図8 スティックスリップ振動波形(解析結果とシミュレーション結果の比較)

図9 位相面軌跡

図10 振幅変化率

$$C_0 = V_0/x \quad (V_0 = V_1 = V_2)$$

図7に示すように、添字 i は初期時刻からのスティック回数, M_i は第 i 回目のスティック期振幅, T_i はスティック時間である。式(13)の解は,

$$\Delta P(t) = (\Delta P_i - P_e) \exp(-t/T_e) + P_e \quad \cdots \cdots (14)$$

ここに, $P_e = K_q M_i / K_p$, $T_e = C_0 / K_p$ である。スティック期の終了条件 $\Delta P(T_i) = P_f$ から, スティック時間は,

$$T_i = T_e \log_e \{ (\Delta P_i - P_e) / (P_f - P_e) \} \quad \cdots \cdots (15)$$

と表される。式(14)に $t = \infty$ を代入すると, $\Delta P(\infty) = P_e$ したがって, $P_e < P_f$ のときには摩擦に打ち勝つ圧力差が生じないから負荷の運動は起こらない。これは系に不感帯が存在することを意味する。

[II] スリップ期

<区間条件>

$$dy/dt \neq 0$$

$$\text{あるいは } dy/dt = 0 \text{ かつ } |\Delta P| > F/A = P_f \quad \cdots \cdots (16)$$

<初期条件>

$$t = 0, y_0 = \pm M_i, dy/dt = 0, \Delta P = P_f \quad \cdots \cdots (17)$$

<方程式>

$$C_0 d\Delta P/dt = K_q M_i - K_p \Delta P - A dy/dt \quad \cdots \cdots (18)$$

$$M d^2 y/dt^2 = A \Delta P - B dy/dt - F \quad \cdots \cdots (19)$$

式(18), (19)をまとめると,

$$\begin{aligned} d^3 y/dt^3 + (B/M + K_p/C_0) d^2 y/dt^2 \\ + \{ (BK_p + A^2)/MC_0 \} dy/dt + (K_q/MC_0) y \\ = -(K_p/MC_0) F \quad \cdots \cdots (20) \end{aligned}$$

上式を初期条件(17)のもとに解いて次の解を得る。

$$\begin{aligned} y(t) = -\alpha A_p e^{-\alpha t} - 2\sigma V e^{\sigma t} \sin(\omega t - \theta) \\ - 2\omega V e^{\sigma t} \cos(\omega t - \theta) \quad \cdots \cdots (21) \end{aligned}$$

ここに, $-\alpha, \sigma \pm j\omega$ は式(20)の特性根,

$$U = (K_p/K_q A_p) F - y_0,$$

$$U_0 = (\alpha/2\omega) U / \{ (\sigma + \alpha)^2 + \omega^2 \}$$

$$\bar{\alpha} = U_0 \omega (2\sigma + \alpha), \quad \bar{\beta} = U_0 (\sigma^2 + \alpha\sigma - \omega^2)$$

$$\theta = \tan^{-1}(\bar{\alpha}/\bar{\beta}), \quad V = \sqrt{\bar{\alpha}^2 + \bar{\beta}^2}$$

$$A_p = U_0 (2\omega/\alpha) (\sigma^2 + \omega^2)$$

である。

スティック期とスリップ期の解をそれぞれの開始・終了点で接続したものが図8に実線で示す振動波形である。図中の○印は数値シミュレーション結果であり, 両者の一致の良さは線形近似解析の妥当性を示すものである。また, 図9は解析結果による位相面軌跡を示したものである。

次に本章の解析結果に基づいてスティックスリップ振動の消長を調べ, 定常振動の安定性を検討する。

図7において隣り合うスティック期の振幅を M_i, M_{i+1} とすると $M_i < M_{i+1}$ のとき振動は増幅, $M_i > M_{i+1}$ のとき減衰する。 $m = (M_{i+1} - M_i)/M_i$ を縦軸に, $M = M_i (i=1, 2, \dots)$ を横軸にとった図10において, $m=0$ となる点 A, B が定常振動に対応する。したがって, $\partial m/\partial M > 0$ となる点 A では振動は不安定, $\partial m/\partial M < 0$ となる点 B では振動は安定となる。

点 A が動作点に最も近い自励振動解であり, これが不安定であることを勘案すれば, 中立動作点は供給圧力に関係なく常に安定になるといえる。

5. む す び

本研究においては, アンダラップ弁を用いた油圧サーボ系に固体摩擦力が作用する場合の大域的挙動を数値シミュレーションによって検討し, 中立動作点近傍に発生するスティックスリップ現象を理論的に明らかにした。

文 献

- (1) 松崎・橋本, 機論, 29-206 (1962), 1615.
- (2) 竹中・浦田, 油圧工学, (1970), 122, 養賢堂.
- (3) 伊藤・ほか3名, 機論, 36-281 (1970), 57.
- (4) 飯村・林, 流体研報告, 1 (1989), 111.