集中質量を有する弾性支持サンドイッチはりの振動*

矢 口 博 之^{*1}Vibrations of an Elastically Supported Sandwich Beam
with a Concentrated Mass

Hiroyuki YAGUCHI

This investigation treats the damped free vibrations of a sandwich beam having a viscoelastic core and elastic layers with a concentrated mass that are elastically constrained at both ends. In the analysis, the elastic constraints are considered as translational and rotational springs, and the Young's modulus of the viscoelastic core is assumed to be small compared with that of the elastic layer. The frequency equation is derived and effects of the magnitude and the position of the concentrated mass on the damped natural frequencies and loss factor of the system are discussed. Numerical results show that the loss factor becomes maximum at a particular value of the positions of the concentrated mass.

Key Words: Sandwich Beam, Concentrated Mass, Elastic Constraint, Structural Damping, Loss Factor, Natural Frequency

1. 結 言

薄い弾性樹脂と金属薄板より構成されるサンドイッチ状三層材は振動ならびに騒音防止用構造部材として注目され、その減衰特性を解明した数多くの研究^{(1)~(10)}がなされてきている。これらのうち佐藤・鹿内らは軸力を受ける三層はりの振動を解析し、系の減衰効果に与える軸力の影響を考察している。このように各種要因によるはりの減衰の変化は興味ある問題であるが、付加質量を持つはりもよく見受けられ、減衰におよぼす付加質量の影響も注目される。この種の問題の一つとして本研究においては粘弾性三層はりの一点に集中質量を有し、両端を並進および回転ばねで弾性支持された三層はりの減衰自由振動を取扱い、弾性ばね拘束を片持および両端単純支持に適用して、支持条件ならびに質量の大きさ、取付け位置により系の減衰固有振動数および損失係数がいかに変化するかを明らかにしたものである。

三層はりの減衰特性を実験的に測定するため、加速度ピックアップを試片に取付けることがよく行われるが、これも本研究の適用例の一つとして考えることが

できよう。

2. 解 析

図1はばね定数 k_{ti} , k_{oi} および $k_{\theta i}$ ($i=1, 2$) を有する並進および回転ばねで弾性支持された全長三層はりを示したものである。はりは厚さ h の二枚の同一材料弾性はりとし、厚さ h_c の粘弾性コア材より成り、幅は b 、長さは l である。いま付加質量 m_c の取付け位置を境として、二つの領域 I および II とに分け、各々の領域におけるはり長さを l_i ($i=1, 2$) とする。各領域の左端に原点 O_i 、はりの中心軸に沿い x_i 軸、これに垂直に y_i 軸を取り、 x_i および y_i 軸方向のはりの変位を u_i および

図1 付加質量を有する全長三層はり

* 原稿受付 平成4年6月19日。

*1 正員、東北学院大学工学部 (〒985 多賀城市中央1-13-1)。

w_i とする。以下、領域 I, II におけるはりの諸量は添字 1, 2 を、粘弾性コア材に関する諸量は添字 c を用いて区別する。

さて解析を進めるに当り、次の仮定を導入する。

(1) 粘弾性コア材の縦弾性係数は弾性はり部のそれに比べかなり低い。

(2) 粘弾性コア材は構造減衰性を有し、系の減衰効果はコア材のせん断変形により生じる。

(3) 各層の横変位はすべて等しい。

(4) 各層の接合面にすべりは生じない。

これらの仮定に基づいて、三層はりの運動方程式は次のように導かれる⁽¹⁰⁾。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^6 w_i}{\partial x_i^6} - g(1+Y) \left(1 + \frac{\eta}{\omega_R} \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial^4 w_i}{\partial x_i^4} \\ + \frac{m}{Dt} \left\{ \frac{\partial^4 w_i}{\partial x_i^4} - g \left(1 + \frac{\eta}{\omega_R} \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} \right\} = 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{.....(1)}$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} m &= 2\rho A + \rho_c A_c, \quad g = \frac{2G_c}{Eh_c h} \\ Y &= \frac{d^2 b E h}{2D_t}, \quad d = h + h_c \\ A &= bh, \quad Dt = 2EI \end{aligned} \right\} \quad \text{.....(2)}$$

であり、 G_c および η は粘弾性コア材の横弾性係数および損失係数、 E, ρ, A, I および ω_R ははり材の縦弾性係数、密度、断面積、断面 2 次モーメントおよび固有角振動数である。式(1)の解を

$$w_i(x_i, t) = W_i(x_i) e^{j\omega t}, \quad \omega = \omega_R + j\omega_I \quad \text{.....(3)}$$

と置く。ここに ω_I は減衰率、 $j = \sqrt{-1}$ である。式(3)を式(1)に代入すると

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^6 W_i}{dx_i^6} - g^*(1+Y) \frac{d^4 W_i}{dx_i^4} - \frac{m\omega^2}{Dt} \frac{d^2 W_i}{dx_i^2} \\ + \frac{m\omega^2 g^*}{Dt} W_i = 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{....(4)}$$

ここに

$$g^* = g \left(1 + j\eta \frac{\omega}{\omega_R} \right) \quad \text{.....(5)}$$

式(4)の解を

$$W_i(x_i) = \sum_{n=1}^6 B_{in} e^{s_n x_i} \quad \text{.....(6)}$$

と置く。式(6)を式(4)に代入し、次の無次元量

$$\left. \begin{aligned} \bar{l}_1 &= \frac{l_1}{l}, \quad \bar{l}_2 = \frac{l_2}{l}, \quad \bar{\rho}_c = \frac{\rho_c}{\rho}, \quad \bar{h}_c = \frac{h_c}{h} \\ \bar{m}_c &= \frac{m_c}{\rho A l}, \quad \bar{g}^* = \bar{g} \left(1 + j\eta \frac{\omega}{\omega_R} \right) \\ \bar{g} &= g l^2, \quad \bar{s}_n = s_n l, \quad \bar{\lambda} = \bar{s}_n^2 \\ \bar{\omega} &= \frac{\omega}{(1/l^2) \sqrt{EI/\rho A}}, \quad (\bar{\omega}_R, \bar{\omega}_I) = \frac{(\omega_R, \omega_I)}{(1/l^2) \sqrt{EI/\rho A}} \end{aligned} \right\} \quad \text{.....(7)}$$

を導入すると

$$\left. \begin{aligned} \bar{\lambda}^3 - \bar{g}^*(1+Y) \bar{\lambda}^2 - \frac{\bar{\omega}^2 (2 + \bar{\rho}_c \bar{h}_c)}{2} \bar{\lambda} \\ + \frac{\bar{\omega}^2 (2 + \bar{\rho}_c \bar{h}_c) \bar{g}^*}{2} = 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{.....(8)}$$

式(8)より根 $\bar{\lambda}_m (m=1, 2, 3)$ を求めると

$$\left. \begin{aligned} \bar{\lambda}_1 &= \frac{\bar{p}}{\bar{\varepsilon}_1} - \bar{\varepsilon}_1 + \frac{1}{3} \bar{g}^*(1+Y) \\ \bar{\lambda}_2 &= \frac{\bar{p}}{\bar{\varepsilon}_2} - \bar{\varepsilon}_2 + \frac{1}{3} \bar{g}^*(1+Y) \\ \bar{\lambda}_3 &= \frac{\bar{p}}{\bar{\varepsilon}_3} - \bar{\varepsilon}_3 + \frac{1}{3} \bar{g}^*(1+Y) \end{aligned} \right\} \quad \text{.....(9)}$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} \bar{\varepsilon}_1 &= (\bar{q} + \sqrt{\bar{q}^2 + \bar{p}^3})^{1/3}, \quad \bar{\varepsilon}_2 = \frac{-1 - \sqrt{3}j}{2} \bar{\varepsilon}_1, \\ \bar{\varepsilon}_3 &= \frac{-1 + \sqrt{3}j}{2} \bar{\varepsilon}_1 \\ \bar{p} &= \frac{1}{3} \left\{ -\frac{1}{3} \bar{g}^{*2} (1+Y)^2 - \frac{\bar{\omega}^2}{2} (2 + \bar{\rho}_c \bar{h}_c) \right\} \\ \bar{q} &= \frac{1}{2} \left\{ -\frac{2}{27} \bar{g}^{*3} (1+Y)^3 \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{6} \bar{g}^* \bar{\omega}^2 (Y-2) (2 + \bar{\rho}_c \bar{h}_c) \right\} \end{aligned} \right\} \quad \text{.....(10)}$$

式(9)より、式(8)の一般解は

$$\left. \begin{aligned} W_i(x_i) &= \sum_{n=1}^6 B_{in} e^{\bar{s}_n x_i} \\ \bar{s}_n &= \bar{\lambda}_n^{1/2}, \quad n=1, 2, 3 \\ \bar{s}_{n+3} &= -(\bar{\lambda}_n)^{1/2}, \quad n=1, 2, 3 \end{aligned} \right\} \quad \text{.....(11)}$$

次に三層はり材における境界および連続条件を考える

と

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 0 \text{ において} \\ k_{\theta 1} \frac{\partial w_1}{\partial x_1} &= M_1, \quad k_{t1} w_1 = F_1, \quad AE \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = k_{01} u_1 \end{aligned} \right\} \quad \text{.....(12)}$$

$x_1 = l_1, x_2 = 0$ において

$$w_1 = w_2, \quad \frac{\partial w_1}{\partial x_1} = \frac{\partial w_2}{\partial x_2}, \quad u_1 = u_2 \quad \text{.....(13)}$$

$$M_1 = M_2, \quad P_1 = P_2, \quad F_1 - F_2 = m_c \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} \quad \text{.....(14)}$$

$x_2 = l_2$ において

$$\left. \begin{aligned} -k_{\theta 2} \frac{\partial w_2}{\partial x_2} &= M_2, \quad -k_{t2} w_2 = F_2, \\ AE \frac{\partial u_2}{\partial x_2} &= k_{02} u_2 \end{aligned} \right\} \quad \text{.....(15)}$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} M_i(x_i) &= \frac{Dt}{g^*} \left\{ \frac{\partial^4 w_i}{\partial x_i^4} - g^*(1+Y) \frac{\partial^2 w_i}{\partial x_i^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{m}{Dt} \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} \right\} \\ F_i(x_i) &= \frac{\partial M_i(x_i)}{\partial x_i} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} P_i(x_i) &= \frac{D_t}{g^* d} \left(\frac{\partial^4 w_i}{\partial x_i^4} - g^* Y \frac{\partial^2 w_i}{\partial x_i^2} + \frac{m}{D_t} \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} \right) \\ u_i(x_i) &= -\frac{D_t}{E h d b} \left(\frac{1}{g^*} \frac{\partial^5 w_i}{\partial x_i^5} - \frac{Y}{g^*} \frac{\partial^3 w_i}{\partial x_i^3} \right. \\ &\quad \left. - Y \frac{\partial w_i}{\partial x_i} + \frac{m}{D_t g^{*2}} \frac{\partial^3 w_i}{\partial x_i \partial t^2} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (16)$$

式(11)を式(12)～(15)に代入し、未定数 $B_{i1} \sim B_{i6}$ を

消去すると、振動数方程式が得られる。振動数方程式を満足する根 $\bar{\omega}_R$ および $\bar{\omega}_I$ を求めると、系の損失係数 η_s は

$$\eta_s = \frac{2\bar{\omega}_I}{\bar{\omega}_R} \dots\dots\dots (17)$$

減衰固有振動数 f_d は

$$f_d = \frac{\bar{\omega}_R}{2\pi l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \dots\dots\dots (18)$$

(a) $\bar{g} = 10^{-2}$

(b) $\bar{g} = 10^{-1}$

(c) $\bar{g} = 1$

(d) $\bar{g} = 10$

(e) $\bar{g} = 10^2$

(f) $\bar{g} = 10^3$

図 2 質量取付け長さ比と損失係数および固有振動数との関係 (片持りの場合)

として与えられる。

3. 数値計算例

数値計算においては集中質量を有する片持りおよび両端単純支持はりの2例について考える。前者は $k_{t1}=k_{o1}=k_{\theta1}=\infty, k_{t2}=k_{o2}=k_{\theta2}=0$ の場合、後者は $k_{t1}=k_{t2}=\infty, k_{o1}=k_{o1}=k_{o2}=k_{o2}=0$ の場合に相当す

る。数値例として

$$Y=10, \bar{h}_c=1, \bar{\rho}_c=0.2, \eta=0.1$$

に取り、得られた結果を図2および図3に示す。図中、実線および破線は系の1次振動モードにおける損失係数 η_s および減衰固有角振動数比 $\bar{\omega}_R$ を示すものである。図2(a)~(f)は片持りの場合について、質量比 $\bar{m}_c$ をパラメータとして、質量取付け長さ比 $\bar{l}_1$ と

(a) $\bar{g}=10^{-2}$

(b) $\bar{g}=10^{-1}$

(c) $\bar{g}=1$

(d) $\bar{g}=10$

(e) $\bar{g}=10^2$

(f) $\bar{g}=10^3$

図3 質量取付け長さ比と損失係数および固有振動数との関係（両端単純支持はりの場合）

η_s および $\bar{\omega}_R$ との関係を粘弾性コア材のせん断剛性比 $\bar{g}$ を変化させて示したものである。 $\bar{\omega}_R$ 値は $\bar{m}_c$ および $\bar{l}_1$ 値の増加に伴い次第に減少するが、 $\bar{g}$ 値が変化してもほぼ同じ傾向で減少することがわかる。 $\bar{g}$ 値が $10^{-2} \sim 1$ 程度においては $\bar{l}_1$ 値の増加とともに系の損失係数 η_s は減少し、 $\bar{l}_1$ のある値において極小値を示す。これら極小化の傾向は $\bar{m}_c$ 値が大になるにつれより顕著に表れることがわかる。一方 $\bar{g}$ 値が $10 \sim 10^3$ 程度になると、系の損失係数を極大にする質量取付け長さが存在し、極値は $\bar{m}_c$ 値の増加とともに増大する。付加質量の慣性力により粘弾性コア材のせん断変形は増大すると思われるが、 $\bar{g}$ 値が大の範囲ではせん断変形の影響が強く表れ、系の損失係数を増大させる。逆に $\bar{g}$ 値が小となって、粘弾性コア材のせん断拘束が急激に減少すると、付加質量の慣性が粘弾性コア材の減衰能を上回って系の損失係数を減少させ、これら極大および極小化をもたらすものと考えられる。また $\bar{m}_c$ 値が大となると極値は固定端側へ移動することがわかる。図3(a)～(f)は両端単純支持の場合について、 $\bar{m}_c$ をパラメータとして、 $\bar{l}_1$ と η_s および $\bar{\omega}_R$ との関係を $\bar{g}$ を変化させて示したものである。図より $\bar{g}$ 値が $10^{-2} \sim 1$ 程度では、 $\bar{l}_1$ 値の増加とともに η_s は次第に減少して極小値を示すが、 $\bar{g}$ 値が $10 \sim 10^3$ 程度においては逆に η_s は増加して極大値をもたらす、片持はりとほぼ同じ挙動を示すことがわかる。これら付加質量による系の損失係数の極大、極小化傾向は片持および両端単純支持はりに限らず、すべての境界条件において生ずるものと思われる。

4. 結 言

1 個の集中質量を有し、両端を弾性支持された全長

三層はりの自由振動を解析し、これらを片持はりおよび両端単純支持はりに適用して、系の振動減衰におよぼす付加質量の影響を明らかにした。以下、得られた結果を要約すると

(1) 付加質量により、系の損失係数は粘弾性コア材の剛性が低い範囲では減少するが、剛性が高まると増加し、特に質量が大となると、三層はりのみの場合に比べ、減衰は極めて大きくなる。

(2) 粘弾性コア材の剛性が高い範囲では、系の損失係数を極大にする質量取付け長さが存在する。

(3) 付加質量が大になるにつれ、系の損失係数の極値は支持端側に移動する。

おわりに、終始ご懇切にご指導をたまわった東北学院大学工学部教授斎藤秀雄先生に深く感謝の意を表す。

文 献

- (1) Mead, D. J. and Markus, S. J., *J. Sound Vib.*, **99**-112(1970), 99.
- (2) Ditaranto, R. A. and Blasingame, W., *Trans. ASME, Ser. B*, **89**-3(1967), 633.
- (3) Rao, D. K., *J. Mechanical Engineering Sci.*, **20**-5(1978), 271.
- (4) Rao, M. D. and Crocker, M. J., *Trans. ASME, J. Vib. Acoust.*, **112**-4(1990), 444.
- (5) 佐藤・鹿内・ほか1名, 機論, **51**-471, C(1985), 2753.
- (6) 鹿内・佐藤・ほか1名, 機論, **55**-511, C(1989), 586.
- (7) 岡崎・ほか3名, 機論, **53**-495, C(1985), 2753.
- (8) 宇津野・ほか3名, 機論, **57**-540, C(1991), 2548.
- (9) 伊藤・ほか4名, 機論, **56**-523, C(1990), 544.
- (10) 矢口, 機論, **57**-543, C(1991), 3407.