初期たわみを有する片面補強正方形板の自由振動特性* (第 2 報, 線形振動実験)

有 富 正 男^{*1}, 角 誠 之 助^{*2}

Free Vibration Characteristics of Eccentrically Stiffened Square Plates with an Initial Deflection (2nd Report, Experiments for Linear Vibration)

Masao ARITOMI and Seinosuke SUMI

This paper presents an experimental investigation for the higher modes of vibration of orthotropic stiffened square plates with a small initial deflection. The stiffened plates are made of tough-pitch copper plates by photo-etching. The plates are excited by an acoustic speaker and mode shapes are measured by laser holography. The effects of an initial deflection and the orthotropy, induced by orthogonary placed stiffeners, on the natural mode shapes are clarified. The experimental results for natural frequencies and mode shapes are found to be in excellent agreement with the previously theoretical investigations.

Key Words: Free Vibration, Vibration of Continuous System, Laser, Mode of Vibration, Eccentrically Stiffened Plate, Initial Deflection, Experiments

1. 緒 言

第 1 報⁽¹⁾においては, 曲げと面内伸びの連成を考慮した smeared out 法で直交補強板を等価剛性をもつ直交異方性板に置き換え, 初期たわみを有する片面補強長方形板の自由振動に関する解析法を導出し, 数値計算例を示した。この結果より, 補強材パラメータ, 初期たわみの大きさ, 面内境界条件, 振幅の大きさ, 補強材の配置様式などが補強板の固有振動数に及ぼす影響を明らかにした。

ところで, 補強板の曲げ振動に関する実験的研究はすでにいくつか報告されている。例えば, Hoppmann^ら⁽²⁾⁽³⁾ はアルミニウム板をフライス削りして一方向補強板の試験片を製作し, 曲げ振動実験を行って固有振動数と振動モードを測定している。Olson と Hazell⁽⁴⁾ は 1 本および 2 本のリブで補強された正方形板の振動モードをレーザ・ホログラフィで計測し, Bapu Rao^ら⁽⁵⁾ も 1 本の補強材を有する斜交片持板の振動モードをホログラフィで測定している。さらに, 斎藤と山口⁽⁶⁾ はアルミニウム平板に加硫天然ゴムを接着して

補強板試験片を製作し, 粘弾性ばりが板の振動減衰特性に及ぼす影響を明らかにしており, 道本^ら⁽⁷⁾ は一方向の面のみ曲率を有する補強曲面をアクリル樹脂で製作して固有振動数と振動モードを測定している。しかしながら, 初期たわみの大きさが補強板の固有振動数と固有振動モードに及ぼす影響や, 初期たわみを有する補強板の固有振動数の振幅依存性を調査した実験的研究はほとんど見当たらない。

本報告ではまず, エッチング加工で製作した補強正方形平板を理論解析で用いた初期たわみ曲面をもつ金型にはさんで電気炉内で加熱し, 浅い曲面を有する補強板試験片を製作する。そして, スピーカによる音響加振法で線形振動実験を行い, 固有振動数の測定を行うとともに, レーザ・ホログラフィの時間平均法⁽⁸⁾で振動モードの測定を行う。次に, 9 項モード近似によるモード方程式を解いて固有振動モードの等変位曲線を図示し, 測定結果と比較して理論解析の妥当性を確認すると同時に, 初期たわみの大きさや補強材配置による異方性が固有振動モードに及ぼす影響を明らかにする。また, 固有振動数の理論値は実験値とよく一致し, 理論解析で用いた smeared out 法が初期たわみを有する片面補強正方形板の自由振動解析でも有効な手法となることを述べる。

* 平成 2 年 7 月 18 日 第 32 回構造強度に関する講演会において講演, 原稿受付 平成 4 年 6 月 23 日。

*¹ 正員, 鹿児島大学工学部 (〒890 鹿児島市郡元 1-21-40)。

*² 正員, 久留米工業大学工学部 (〒830 久留米市上津町 2228-66)。

2. 試験片および試験片取付枠

片面補強板の試験片は、図1のように厚さ $H=0.7$ mm のタフピッチ銅板をフォトエッチングにより腐食させ、非補強部の厚さ h (この板厚 h の等厚長方形板を前報⁽¹⁾と同じくここでも非補強板と呼ぶ) が 0.32 mm の二方向補強板と一方向補強板を製作した。試験片の外形寸法はすべて $a \times b = 150 \text{ mm} \times 150 \text{ mm}$ の正方形であり、試験片の材料定数は実測の結果、縦弾性係数 $E=111 \text{ GPa}$ 、ポアソン比 $\nu=0.29$ 、密度 $\rho=8.96 \text{ g/cm}^3$ である。図1の補強板に smeared out 法を適用すれば、補強材と非補強板の質量比 $\bar{\rho}$ や伸び剛性比 α_s , α_{sr} 、曲げ剛性比 β_s 、ねじり剛性比 β_{sr} および無次元連成剛性 γ_s , γ_{sr} , γ_{12} は、第1報の式(10), (11), (12)より

$$\left. \begin{aligned} \bar{\rho} &= \left(\frac{w_s h_s}{d_s h} + \frac{w_r h_r}{d_r h} \right) - \frac{V_{sr}}{hab} \\ \alpha_s &= (1-\nu^2) \frac{w_s h_s}{d_s h}, \alpha_{sr} = \frac{1}{2} \cdot \frac{w_s h_s}{d_s h} \\ \beta_s &= \alpha_s \left\{ 3 + 6 \left(\frac{h_s}{h} \right) + 4 \left(\frac{h_s}{h} \right)^2 \right\} \\ &\quad - 12 \frac{c_s}{h} \left(1 + \frac{h_s}{h} - \frac{c_s}{h} \right) \\ \beta_{sr} &= \frac{3}{h^3} \left(\frac{J_s}{d_s} + \frac{J_r}{d_r} \right) \\ \gamma_s &= 12\nu^2 \frac{c_s}{h}, \gamma_{12} = 12\nu \frac{c_s}{h}, \gamma_{sr} = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

で与えられる。ただし、 $\bar{\rho}$ 中の V_{sr} は x 軸に平行な補強材と y 軸に平行な補強材とが交差する部分の補強材体積であり、 β_{sr} 中の J_s , J_r は補強材の補強板断面の中立軸に関するねじり定数、 β_s と γ_s , γ_{12} 中の c_s は非補強板の中央面から補強板断面の中立軸までの距離で、それらは

$$\left. \begin{aligned} J_s &= \left[\frac{(h+h_s)^3 w_s}{3} \left(1 - \frac{192}{\pi^5} \cdot \frac{h+h_s}{w_s} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{h_s}{2} - c_s \right)^2 (h_s+h) w_s \right] \\ &\quad - \left[\frac{h^3 w_s}{3} \left(1 - \frac{192}{\pi^5} \cdot \frac{h}{w_s} \right) + c_s^2 \cdot h w_s \right] \\ c_s &= \frac{1}{2} \cdot \frac{h+h_s}{1 + h d_s / (w_s h_s)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

と表される⁽⁹⁾。なお、 α_r , α_{rs} , γ_{21} らの諸量は、式(1), (2)で補強材の配置方向を表す下添字 s と r を、それぞれ r と s に置き換えれば得られる。試験片寸法は表1に示すように、式(1)で計算した伸び剛性比 α_s , α_r と曲げ剛性比 β_s , β_r がそれぞれ二通りの一定値をもつように設定し、補強材本数が10本と20本の合計4

種類の試験片を製作した。ただし、所定の厚さ h を精度よくエッチングすることは非常にむずかしく、製作した試験片は表示の寸法に対していくぶんばらついたものとなった。

ところで、タフピッチ銅板は冷間圧延加工により製作されているため残留ひずみが生じている。そこで、試験片を 250°C の電気炉内で80分間加熱したのち約6~10時間炉内冷却して焼なましを行い、残留ひずみを取り除いた。また、試験片の初期たわみは金型や木型によって圧造する方法⁽¹⁰⁾⁽¹¹⁾もあるが、spring back のためあまり正確な形状が得られない。そこで本報告では、焼なまし後の平らな試験片を理論解析で用いた初期たわみ形状 ξ , つまり

$$\xi = \frac{B}{4} \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a} \right) \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{b} \right) \dots\dots\dots (3)$$

の曲面をもつ金型にはさみ、電気炉内で 250°C まで加熱して一定時間保持したのち徐冷することで初期たわみを与えた。このとき、補強材が初期たわみ曲面の凹側になるようにし、また加熱時間を調整することで最大初期たわみ量 B の大きさを種々変えることができた。初期たわみ形状の測定は、振動実験で用いる試験片取付枠に試験片をはさんでボルトで締め付け、三次元測定機を用いて板の中央点を基準として図1に示す x_1 と y_1 の二方向について行った。例として、補強材本

(a) 二方向補強板

(b) 一方向補強板

図1 試験片外形

表 1 補強板試験片の寸法

	Plate stiffened in x and y directions				Plate stiffened in x direction			
Extensional stiffness ratios α_s, α_r	0.46		0.29		0.58		0.38	
Flexural stiffness ratios β_s, β_r	3.6		2.8		3.9		3.2	
Plate thickness h mm	0.32				0.32			
Number of stiffeners n	10	20	10	20	10	20	10	20
Stiffener spacing d_s, d_r mm	15	7.5	15	7.5	15	7.5	15	7.5
Stiffener width w_s, w_r mm	6.4	3.2	4.0	2.0	8.0	4.0	5.2	2.6
Stiffener depth h_s, h_r mm	0.38				0.38

(a) 二方向補強板
($B=1.03$ mm, $\bar{B}=3.30$) (b) 一方向補強板
($B=0.98$ mm, $\bar{B}=2.95$)図 2 補強板の初期たわみ形状 ($n=20$ 本)

数がともに 20 本の二方向補強板と一方向補強板の初期たわみ形状の測定結果を図 2 に示す。図中の実線は式(3)で仮定した曲面の (x_1, y_1) 方向の初期たわみ形状を表し、丸印は測定結果である。また、図には最大初期たわみ B を非補強板厚さ h で割った無次元最大初期たわみ $\bar{B}$ の値も示してある。これらの図からわかるように、いずれの試験片もすべて式(3)の曲面に近い初期たわみ形状が得られた。なお、初期たわみのない場合の試験片は、平らな金型にはさんで初期たわみを与えた場合と同じ熱処理を行い、その初期不整を取り除いた。

試験片取付枠は、大きさが 250 mm 角で厚さが 20 mm の 2 枚の鉄板のそれぞれの中心部に 150 mm 角の開孔部を設け、試験片接触面を研磨仕上げして製作した。実験の際には、試験片を取付枠にはさんで 16 本

のボルトに 7.84 Nm (80 kgf・m) の一定トルクを均等にかけて締め付けた。

3. 実験要領

初期たわみを有する補強板の振動モードは、補強材配置や初期たわみの大きさによって異なったものとなる。したがって、それらが線形固有振動数に及ぼす影響を実験により調査する場合、各振動数に対応する振動モードを確実に把握することが必要となる。そこで本実験では、Ar レーザ (514.5 nm, 2 W) を使用して、ホログラフィの時間平均法により振動モードを測定した。この場合、露光時間が 5~10 秒と比較的長いので、外部の振動、空気の揺動など外部のじょう乱を防止するため、光学系の全体をエアー・ダンパを介して設置した防振台上に配置した。

また、加振方法はスピーカによる音響加振法を採用した。口径 120 mm のスピーカに直径 10 mm の先端開口をもつホーン形ノズルを取付け、音圧による加振領域が、できるだけ節線的位置を避けて板の最大振幅点になるように設定した。共振点は、加振用のスピーカ端子電圧と試験片に接着した圧電素子の応答出力電圧とでリサージュ図形を描かせて検出した⁽¹²⁾。

実験は次の手順で行った。まず、試験片をはさんだ試験片取付枠を防振台上の支持台の上に垂直に設置する。次に、スピーカによる音響加振を行い、加振振動数を次第に上げてゆき、レーザ・ホログラフィで固有振動モードを確認しながら、それぞれのモードの線形固有振動数を測定した。

4. 固有振動モード

数値計算は実験結果との比較のため、第 1 報の式(22)の振動変位を

$$\bar{w}(\xi, \eta, \tau) = \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 \bar{A}_{mn}(\tau) Z_{mn}[X_{mn}(\xi, \eta)]$$

$$+k_{mn}X_{nm}(\xi, \eta)] \dots\dots\dots (4)$$

の9項モードの形で近似して行い, この中の k_{mn} は

$$\left. \begin{array}{l} [1] \text{ 二方向補強正方形板の場合: } k_{13}=1, \\ \quad k_{31}=-1, \text{ それ以外は } k_{mn}=0 \\ [2] \text{ 一方向補強正方形板の場合: } k_{mn}=0 \end{array} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

とおいた。そして, 式(4)の振動変位に対応する線形振動のモード方程式は第1報の式(29)で与えられ, これを再記すると

$$\sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 Z_{mn} \left[q_{ij} \bar{A}_{mn,rr} + \frac{\pi^4}{1+\bar{\rho}} \left[h_{ij} + {}^1\chi_{ij} \bar{B} + ({}^1\mu_{ij} + \Lambda {}^1v_{ij}) \bar{B}^2 \right] \bar{A}_{mn} \right] = 0 \dots\dots\dots (6)$$

となる。ここで, Λ は面内境界条件⁽¹⁾によってそれぞれ

$$\left. \begin{array}{l} [A] \text{ 面内可動周辺: } \Lambda=0 \\ [B] \text{ 面内不動周辺: } \Lambda=1 \end{array} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

の値をとる。式(6)は4種類の固有振動モードに対して, それぞれ未知の時間関数 $\bar{A}_{mn}(\tau)$ に関する連立常

図3 振動モードに及ぼす初期たわみの影響 (二方向補強板)

微分方程式を形成し、これらを解くと線形固有振動数 $\bar{\omega}_{mn}$ が得られ、同時に $\bar{\omega}_{mn}$ に対応する固有振動モード W_{mn} が次のように求められる。

[A] SS モード：

(1) 二方向補強正方形板

$$W_{mn} = d_{mn}X_{11} + e_{mn}(X_{13} + X_{31}) + g_{mn}X_{33}$$

$$(W_{mn} = W_{11}, W_{13}, W_{33})$$

$$W_{31} = f_{31}(X_{13} - X_{31})$$

(2) 一方向補強正方形板

$$W_{mn} = d_{mn}X_{11} + e_{mn}X_{13} + f_{mn}X_{31} + g_{mn}X_{33}$$

$$[B] \text{ SA モード: } W_{m2} = d_{m2}X_{12} + e_{m2}X_{32} \quad (m, n=1, 3)$$

$$(m=1, 3)$$

$$[C] \text{ AS モード: } W_{2n} = d_{2n}X_{21} + e_{2n}X_{23} \quad (n=1, 3)$$

$$(n=1, 3)$$

$$[D] \text{ AA モード: } W_{22} = d_{22}X_{22}$$

..... (8)

ただし、 d_{mn} , e_{mn} , f_{mn} および g_{mn} は各振動モードに対応する振幅係数である。

図3は補強材が格子状上に配置された二方向補強板

図4(A) 振動モードに及ぼす初期たわみの影響 (一方向補強板)

の, また図4は補強材が x 軸に平行な方向 (紙面では水平方向) のみに配置された一方向補強板の, それぞれの振動モードの面内不動周辺の場合の等変位曲線の

計算結果を, レーザ・ホログラフィによる実験結果とともに図示したものである. ただし計算では, 無次元変位の最大値を1とし, 図3(a), (c)および図4

図4(B) 振動モードに及ぼす初期たわみの影響 (一方向補強板)

(a), (b)以外の図では, 実線と破線はそれぞれ ± 0.2 , ± 0.4 , ± 0.6 , ± 0.8 の値の等変位曲線を示す。これに対して, 図3(a), (c)および図4(a), (b)の実線は0.05, 0.2, 0.35, 0.5, 0.65, 0.8, 0.95の等変位曲線を, 図3(c)と図4(b)の破線は -0.1 , -0.25 , -0.4 , -0.55 , -0.7 , -0.85 の等変位曲線をそれぞれ表す。

まず, 図3の直交した二方向に同じ補強材を配置した二方向補強正方形板の場合, 図3(a)図の基本振動の固有振動モードは初期たわみが大きくなると次第に板中心が平らな形となっている。また図3(b)図と(c)図の初期たわみのない場合($\bar{B}=0$)は, 理論解析とは異なり節線が板の辺に平行なモードとなっているが, これは縮退のためで, 加振位置が適当でなかったためと思われる。

次に, 図4の一方補強の場合は正方形板でも補強材配置による異方性のため縮退は生じず, 特に(a), (b), (c)図の低次のSSモードでは, 初期たわみが大きくなると補強材が x 軸に平行な方向のみに配置されたことによる直交異方性の影響が大きく現れている。このことは等変位曲線の計算結果でも確認でき, 理論解析で用いた smeared out 法が初期たわみを有

する片面補強板の自由振動解析でも有効な手法であることを裏付けている。さらに, 図4(e)図から(i)図までの逆対称な形を伴う振動モードは, 初期たわみの大きさの影響をほとんど受けず, $\bar{B}=0$ と $\bar{B}=2.95$ の場合ではほとんど同じ形の振動モードが得られており, 二方向補強板の場合でも同様な結果となった。なお, 振幅が板厚に比べて小さな線形振動の場合には, 偏心補強による振動モードへの影響はほとんど見受けられなかった。

5. 線形固有振動数

図5と図6は, 初期たわみによる線形固有振動数の変化を, 縦軸に非補強板の振動数パラメータで無次元化した振動数 $\bar{\omega} = \omega b^2 \sqrt{\rho h / D}$, 横軸に最大初期たわみ $\bar{B}$ を非補強板厚さ h で割った無次元初期たわみ $\bar{B} = B/h$ をとって示したものである。なお, D は非補強板の曲げ剛性で, $D = Eh^3 / \{12(1 - \nu^2)\}$ で与えられる。また, 製作した試験片の寸法は表1の値に対していくぶ

Theory ($\alpha_s = \alpha_r = 0.46$, $\beta_s = \beta_r = 3.6$, $\beta_{sr} = 7.1$)
 ----- Movable edge, ——— Immovable edge
 Experiment (○, △ : $n = 10, 20$)

図5 線形固有振動数 $\bar{\omega}$ と初期たわみ $\bar{B}$ の関係
(二方向補強板)

Theory ($\alpha_s = 0.58$, $\beta_s = 3.9$, $\beta_{sr} = 4.4$)
 ----- Movable edge, ——— Immovable edge
 Experiment (○, △ : $n = 10, 20$)

図6 線形固有振動数 $\bar{\omega}$ と初期たわみ $\bar{B}$ の関係
(一方補強板)

んばらついたものとなったが、理論曲線は代表値として表1の値を用いて計算している。なお、ねじり剛性比 β_{sr} は表1の各寸法を式(2)のねじり定数 J_s の式に代入し、式(1)を用いて計算すると、補強材が10本と20本の補強板では多少異なった値となるが、理論計算では両者の平均値を採用した。さらに、図中の破線は式(6)を解いて得られた面内可動周辺の理論曲線、実線は面内不動周辺の理論曲線であり、各計算結果に対応する振動モードの節線様式も一緒に示してある。

ところで、これらの図の実験値にはいくぶんばらつきが見られるが、これは各補強板試験片で剛性比の値が多少異なるためであり、たとえば図5の $\bar{B}=0$ の場合の試験片は曲げ剛性比とねじり剛性比がそれぞれ $\beta_s=\beta_r=4.1$, $\beta_{sr}=8.0$ と理論計算で使った値に比べて大きく、このためSS-2以外の各モードでは実験値が理論振動数よりも大きくなっている。また、図5の二方向補強板の場合をみると、両面对称補強板の場合⁽¹³⁾と同様にSS-3モードの実験値は初期たわみが大きくなると理論曲線よりもかなり高い振動数となっている。これは実験結果との比較における数値計算で、振動変位の式で採用した項数が9項と少なかったことに原因があるものと思われる。しかし、SS-3の場合を除けば実験値は理論曲線によく一致しており、特に基本振動(SS-1)の実験値は面内不動周辺の理論曲線上にある。次に、図6の一方向補強板の線形固有振動数と初期たわみの関係をみると、いずれのモードにおいても実験値は理論曲線とよく一致している。なお、以上述べた結果は剛性比の値が異なるそれぞれほかの一組の補強板試験片についても得られた。

6. 結 言

本報告は、初期たわみを有する片面補強正方形板の線形振動実験を行って、固有振動モードと固有振動数を測定し、第1報の解析結果と比較したものである。得られた結果を要約すると次のとおりである。

(1) 固有振動モードと固有振動数の実験結果は一部を除いて理論値とよく一致した。

(2) この結果より、曲げと面内伸びの連成を考慮し、補強板を等価な剛性をもつ異方性板に置き換える smeared out 法を適用した第1報の手法は、初期たわみを有する片面補強正方形板の自由振動解析においても十分有効であり、またフォトリソ加工で製作した補強板試験片が、振動実験に適用できることを確認した。

(3) 実験における面内境界条件は、可動周辺よりもむしろ不動周辺のほうに近いことが明らかになった。

(4) 初期たわみの大きさが固有振動モードに及ぼす影響は、板中心軸に関して逆対称な形を伴うモードでは小さい。

(5) 補強材配置による直交異方性が固有振動モードに及ぼす影響は、初期たわみが大きくなると顕著に現れる。

最後に、実験装置や金型の製作に際してご協力いただいた鹿児島大学工学部中央実験工場の高橋肇技官と有馬武城技官に謝意を表する。また、卒業研究として実験に協力いただいた西原昭彦氏(現在 川崎重工業株式会社)に深く感謝する。

文 献

- (1) 有富・角・桐岡・戸谷, 機論, 59-558, C(1993), 322.
- (2) Hoppmann, W. H., II, Huffington, N. J. and Magness, L. S., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, 23 (1956), 343.
- (3) Hoppmann, W. H., II and Magness, L. S., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, 24 (1957), 526.
- (4) Olson, M. D. and Hazell, C. R., *J. Sound Vib.*, 50-1 (1977), 43.
- (5) Bapu Rao, M. N., Guruswamy, P., Venkateshwara Rao, M. and Pavithran, S., *J. Sound Vib.*, 57-3 (1978), 389.
- (6) 斎藤・山口, 機論, 46-403, C (1980), 237.
- (7) 道本・広渡・村上, 造船論, 154 (1983), 329.
- (8) 角, 構造強度解析におけるレーザの応用, 航宇誌, 25-281 (1977), 259.
- (9) 角・有富・桐岡, 航空誌, 38-443 (1990), 660.
- (10) 安井, 機論, 38-316 (1972), 3119.
- (11) Phillips, I. G. and Jubb, J. E. M., *J. Sound Vib.*, 33-1 (1974), 41.
- (12) 西村, 振動工学, (1969), 16, 誠文堂新光社.
- (13) Sumi, S. and Aritomi, M., *Trans. Japan Soc. Aero. Space Sci.*, 34-104 (1991), 71.