境界要素法による音響問題の設計感度解析法*

松本 敏郎^{*1}, 田中正隆^{*1}, 山田 泰永^{*2}Design Sensitivity Analysis of Steady-State Acoustic Problems
using Boundary Integral Equation Formulation

Toshiro MATSUMOTO, Masataka TANAKA and Yasunaga YAMADA

This paper presents an integral equation formulation for design sensitivity coefficients of frequency responses in acoustic problems. The direct differentiation method is applied in the derivation of the sensitivity formula. The integral equation relating the pressure at an internal point to the boundary pressures and velocities is regularized and differentiated directly with respect to a design variable such as shape design parameter, frequency, mass density and impedance. The resulting integral equation for the design sensitivity coefficients has no Cauchy principal value integrals and can be applied continuously across the boundary of the acoustic field. The effectiveness of the present formulation is illustrated through some numerical examples for three-dimensional problems.

Key Words: Sensitivity analysis, Boundary Element Method, Acoustic, Direct Differentiation Method, Shape Optimization, Inverse Problem

1. 緒 言

最適設計や逆問題の解析においては、系の応答の設計変数に対する感度係数を、精度よく効率的に計算することが必要となる。境界要素法は、有限要素法や差分法のような領域型解法に比べて、境界の応答を精度よく計算することができ、特に線形問題では境界の要素分割のみで解析を行えるという長所を有している。このため近年、形状最適化問題等において、境界要素法がよく用いられるようになってきている⁽¹⁾⁽²⁾。特に、設計変更の対象が境界や領域内の一部分だけに分布するような場合、境界要素法はきわめて有効となる。

系の応答の感度係数は、設計変数に対する系の応答の変化率であり、その最も簡便な計算方法は、設計変数を実際に少しかだけ変化させたときの系の応答の変化量を求め、その差を設計変数の変化量で割って計算する方法である。しかしながら、このような差分による計算法では、感度係数を求めるために、一つの設計変数に対して少なくとも2回、系の応答を計算しなければならない。これに対して、系の応答を計算する方

式(境界要素法では境界積分方程式)を設計変数であらかじめ微分して、系の応答の感度係数を関係づける方程式を導出し、それを離散化して解くことにより感度係数を求める直接微分法が、静弾性問題やポテンシャル問題において注目を集めるようになってきている^{(1)(3)~(7)}。音響問題は、開領域も容易に扱うことができる境界要素法が解析ツールとして有効な分野であり、著者らはこれまで音響問題に関しても、設計変数を周波数とした場合について境界要素法による感度解析法の定式化を行っている⁽⁸⁾。

本研究では、より一般の設計変数に対して直接微分法による境界要素法を用いた感度解析法の定式化を行い、それに基づく三次元音響設計感度解析システムを開発した。本システムでは、設計変数として、物体や空間の形状を規定するパラメータ、周波数、空間の媒質密度、境界の音圧や粒子速度、音響インピーダンスを扱うことができる。

2. 定 式 化

媒質の振動が微小振幅の定常振動であるとき、音場の支配微分方程式は、次の Helmholtz 方程式となる。

$$\nabla^2 p + k^2 p = 0 \dots\dots\dots (1)$$

ただし、 ∇^2 は Laplace 微分演算子、 p は音圧である。

* 原稿受付 平成4年6月17日。

^{*1} 正員、信州大学工学部(〒380 長野市若里500)。^{*2} 信州大学大学院。

また k は波数であり, 角振動数 ω , 音速 C , 周波数 f と次式により関係づけられる.

$$k = \omega/C = 2\pi f/C \quad \dots\dots\dots (2)$$

式(1)の基本解を $p^*(x, y)$ とすると, 次式を満足する.

$$\nabla^2 p^*(x, y) + k^2 p^*(x, y) + \delta(x - y) = 0 \quad \dots\dots\dots (3)$$

ただし, x, y は音場内の任意の2点, δ は Dirac のデルタ関数である. p^* を用いると, 式(1)から, 次のような積分方程式を導出することができる.

$$p(y) = - \int_S q^*(x, y) p(x) dS(x) - j\rho\omega \int_S p^*(x, y) v(x) dS(x) \quad \dots\dots\dots (4)$$

ただし, S は音場の境界, y は音場内の1点, ρ は媒質の密度, v は境界の外向き法線方向の粒子速度であり, $j^2 = -1$ である. また, n を境界の外向き単位法線ベクトルとすると, q^* は次式によって定義される.

$$q^*(x, y) = \frac{\partial p^*(x, y)}{\partial n(x)} \quad \dots\dots\dots (5)$$

式(4)は, 空間内部の1点 y における音圧を, 境界上のすべての点の音圧と粒子速度に関係づける式となっている. 境界上では, 音圧と粒子速度のいずれか一方が既知量として与えられる. 境界のうち, 音響インピーダンス z が与えられる境界を S_z , それ以外の境界を S_c とすると, $v = p/z$ であるから, 式(4)は次式のように書ける.

$$p(y) = - \int_S q^* p dS - \int_{S_c} p_z^* v dS - \int_{S_z} p_z^* p dS \quad \dots\dots\dots (6)$$

ただし, 次のように置いた.

$$p_z^* = j\rho\omega p^*, \quad p_z^* = j\rho\omega p^*/z \quad \dots\dots\dots (7)$$

式(6)で, 点 y を境界上の点に近づけた極限を取ることにより, 通常用いられる境界積分方程式が得られるが, ここではその前に, 式(6)をまず次式のように変形しておく.

$$p(y) = - \int_S q^* \{p - p(y)\} dS - \int_{S_c} p_z^* v dS - \int_{S_z} p_z^* p dS - \left\{ \int_S (q^* - q^*) dS \right\} p(y) - \left\{ \int_S q^* dS \right\} p(y) \quad \dots\dots\dots (8)$$

ただし, q^* は Laplace 方程式の基本解 p^* と次式で関係づけられるものとする.

$$q^*(x, y) = \frac{\partial p^*(x, y)}{\partial n(x)} \quad \dots\dots\dots (9)$$

ここで p^* は, 次の微分方程式を満足している.

$$\nabla^2 p^*(x, y) + \delta(x - y) = 0 \quad \dots\dots\dots (10)$$

発散定理および, 式(10)を用いると,

$$\int_S q^* dS = \int_V \nabla^2 p^* dV = - \int_V \delta(x - y) dV = -1 \quad \dots\dots\dots (11)$$

となる. ただし, V は音場の内部領域である. 式(11)を用いると式(8)は次式に帰着する.

$$\int_S q^* \{p - p(y)\} dS + \left\{ \int_S (q^* - q^*) dS \right\} p(y) + \int_{S_z} p_z^* p dS = - \int_{S_c} p_z^* v dS \quad \dots\dots\dots (12)$$

式(12)は, $p(x)$ が点 y で Hölder 連続ならば, $y \in V$ から $y \in S$ まで連続的に成立する. したがって, $y \in S$ の時, 式(12)は境界上の音圧と粒子速度のみに関係づける境界積分方程式となっている.

式(12)を離散化すると, 次のような代数方程式に帰着する.

$$[H]\{p\} = [G]\{v\} \quad \dots\dots\dots (13)$$

さらに, $\{p\}, \{v\}$ のうち, 未知の部分 $\{x\}$, 既知の部分 $\{y\}$ とすると次のようになる.

$$[A]\{x\} = [B]\{y\} \quad \dots\dots\dots (14)$$

ただし, $[A], [B]$ はそれぞれ $\{x\}, \{y\}$ に対応する係数マトリックスである.

次に式(12)を基として, 境界の音圧, 粒子速度の感度係数を関係づける積分方程式を導出する. 式(12)を設計変数で微分すると, 次式が得られる.

$$\begin{aligned} \int_S q^* \{\dot{p} - \dot{p}(y)\} dS + \left\{ \int_S (q^* - q^*) dS \right\} \dot{p}(y) + \int_{S_z} p_z^* \dot{p} dS = - \int_{S_c} p_z^* \dot{v} dS \\ - \int_S \dot{q}^* \{p - p(y)\} dS - \left\{ \int_S (\dot{q}^* - \dot{q}^*) dS \right\} p(y) - \int_S q^* \{p - p(y)\} d\dot{S} - \left\{ \int_S (q^* - q^*) d\dot{S} \right\} p(y) \\ - \int_{S_z} \dot{p}_z^* p dS - \int_{S_z} p_z^* \dot{p} d\dot{S} - \int_{S_c} \dot{p}_z^* v dS - \int_{S_c} p_z^* v d\dot{S} \quad \dots\dots\dots (15) \end{aligned}$$

ただし, ドット ($\dot{}$) は設計変数による微分を意味するものとする. また,

$$\dot{p}_z^* = j(\omega\rho + \omega\dot{\rho})p^* + j\omega\rho\dot{p}^* \quad \dots\dots\dots (16)$$

$$\dot{p}_z^* = \left\{ \frac{j(\omega\rho + \omega\dot{\rho})}{z} - \frac{j\omega\rho\dot{z}}{z^2} \right\} p^* + \frac{j\omega\rho}{z} \dot{p}^* \quad \dots\dots\dots (17)$$

である.

式(15)は一見すると複雑であるが, 設計変数の種類によって省略可能な項が多く含まれている. 例えば, 設計変数として, 空間や物体の形状を規定するパラメータを選んだ場合, 形状に依存しない量 ω, ρ, z による微分はすべて考える必要がない. 三次元問題に対する基本解は, 次のようになる.

$$p^* = \frac{1}{4\pi r} \exp(-jkr) \quad \dots\dots\dots (18)$$

$$q^* = \frac{-1}{4\pi r} \frac{\partial r}{\partial n} (1 + jkr) \exp(-jkr) \quad \dots\dots\dots (19)$$

$$q_L^* = \frac{-1}{4\pi r} \frac{\partial r}{\partial n} \quad \dots\dots\dots (20)$$

ただし、 $r=|x-y|$ である。したがって、形状に依存する関数の微分 $\dot{p}^*$, $\dot{q}^*$, $\dot{q}_L^*$ は、次のようになる。

$$\dot{p}^* = \frac{\partial p^*}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{\partial p^*}{\partial y_i} \dot{y}_i = p_{,i}^* (\dot{x}_i - \dot{y}_i) \quad \dots\dots\dots (21)$$

$$\dot{q}^* = p_{,ij}^* (\dot{x}_j - \dot{y}_j) n_i + p_{,i}^* \dot{n}_i \quad \dots\dots\dots (22)$$

$$\dot{q}_L^* = p_{,ij}^* (\dot{x}_j - \dot{y}_j) n_i + p_{,i}^* \dot{n}_i \quad \dots\dots\dots (23)$$

また、面積要素 dS の設計変数による微分は、次のようになる。

$$d\dot{S} = \{(\dot{x}_i)_{,i} - (\dot{x}_i)_{,j} n_j\} dS \quad \dots\dots\dots (24)$$

式(24)には、座標感度のこう配が含まれている。いま、式(15)を離散化したときの要素内の局所座標を ξ_1, ξ_2 とすると、

$$dS = \left| \varepsilon_{ijk} \frac{\partial x_j}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_k}{\partial \xi_2} \right| d\xi_1 d\xi_2 = J(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \quad \dots\dots\dots (25)$$

となる。ただし、 ε_{ijk} は交代記号であり、

$$J(\xi_1, \xi_2) = \left| \varepsilon_{ijk} \frac{\partial x_j}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_k}{\partial \xi_2} \right| \\ = \left(\frac{\partial x_i}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_i}{\partial \xi_2} \frac{\partial x_j}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_j}{\partial \xi_2} + \frac{\partial x_i}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_i}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_j}{\partial \xi_2} \frac{\partial x_j}{\partial \xi_2} \right)^{1/2} \quad \dots\dots\dots (26)$$

と置いた。したがって、

$$d\dot{S} = J d\xi_1 d\xi_2 = \frac{j}{J} dS \quad \dots\dots\dots (27)$$

ただし、

$$j = \frac{1}{J} \left(\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_i}{\partial \xi_2} \frac{\partial x_j}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_j}{\partial \xi_2} + \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \xi_1} \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \xi_2} \frac{\partial x_j}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_j}{\partial \xi_2} \right. \\ \left. + \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_i}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_j}{\partial \xi_2} \frac{\partial x_j}{\partial \xi_2} + \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_i}{\partial \xi_1} \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \xi_2} \frac{\partial x_j}{\partial \xi_2} \right)^{1/2} \quad \dots\dots\dots (28)$$

である。式(15)を離散化した式においては、式(24)の代わりに式(27)を用いれば、座標感度の情報だけで $d\dot{S}$ を計算することができる。

式(15)を離散化すると、次の形の代数方程式に帰着する。

$$[H]\{\dot{p}\} = [G]\{\dot{v}\} - [h]\{p\} + [g]\{v\} \quad \dots\dots\dots (29)$$

ただし、 $[h]$, $[g]$ は式(15)の右辺第2項以下から生じる係数マトリックスである。また $[H]$, $[G]$ は式(13)の $[H]$, $[G]$ と同一のマトリックスである。 $\{p\}$, $\{v\}$ が既知の境界上では $\{\dot{p}\}$, $\{\dot{v}\}$ もまた既知であるから、式(29)も式(14)と同様に、次の形に帰着する。

$$[A]\{\dot{x}\} = [B]\{\dot{y}\} - [h]\{p\} + [g]\{v\} \quad \dots\dots\dots (30)$$

したがって、式(14)に基づく境界要素法解析により、

あらかじめ境界上の $\{p\}$, $\{v\}$ をすべて計算しておき、次にそれらを式(30)に用いることにより、境界上の音圧と粒子速度の感度係数をすべて計算することができる。

次に、音場の領域内部の点の音圧の感度係数について考える。式(6)を設計変数で微分すると、次式が得られる。

$$\dot{p}(y) = - \int_S q^* \dot{p} dS - \int_{S_c} p_{,i}^* \dot{v}_i dS - \int_{S_z} p_{,z}^* \dot{p} dS \\ - \int_S \dot{q}^* p dS - \int_{S_c} \dot{p}_{,i}^* v_i dS - \int_{S_z} \dot{p}_{,z}^* p dS \\ - \int_S q^* p \dot{dS} - \int_{S_c} p_{,i}^* v_i \dot{dS} - \int_{S_z} p_{,z}^* p \dot{dS} \quad \dots\dots (31)$$

式(31)は、境界上のすべての点の音圧と粒子速度およびそれらの感度係数から、領域内部の点の音圧の感度係数を計算する式となっている。

また、領域内部の点の x_i 方向の粒子速度は、式(6)を点 y の座標 y_i で微分した式から得られる次式によって計算される。

$$v_i(y) = - \int_S Q_i^* p dS - \int_{S_c} p_{,i}^* v dS - \int_{S_z} P_i^* p dS \quad \dots\dots\dots (32)$$

ただし、次のように置いた。

$$Q_i^* = \frac{1}{j\rho\omega} p_{,ki}^* n_k \quad \dots\dots\dots (33)$$

$$P_i^* = \frac{p_{,i}^*}{z} \quad \dots\dots\dots (34)$$

このとき、領域内部の点 y の粒子速度の感度係数は次のようになる。

$$\dot{v}_i(y) = - \int_S Q_i^* \dot{p} dS - \int_{S_c} p_{,i}^* \dot{v} dS - \int_{S_z} P_i^* \dot{p} dS \\ - \int_S \dot{Q}_i^* p dS - \int_{S_c} \dot{p}_{,i}^* v dS - \int_{S_z} \dot{P}_i^* p dS \\ - \int_S Q_i^* p \dot{dS} - \int_{S_c} p_{,i}^* v \dot{dS} - \int_{S_z} P_i^* p \dot{dS} \quad \dots (35)$$

ただし、

$$\dot{Q}_i^* = \frac{1}{j} \left\{ - \frac{\dot{\rho}\omega + \rho\dot{\omega}}{\rho^2\omega^2} p_{,ki}^* n_k \right. \\ \left. + \frac{1}{\rho\omega} (\dot{p}_{,ki}^* n_k + p_{,ki}^* \dot{n}_k) \right\} \quad \dots\dots\dots (36)$$

$$\dot{P}_i^* = - \frac{\dot{z}}{z^2} p_{,i}^* + \frac{1}{z} \dot{p}_{,i}^* \quad \dots\dots\dots (37)$$

式(35)も、式(31)と同様に境界上の音圧と粒子速度およびそれらの感度係数をもとに、領域内部の点の粒子速度の感度係数を計算する式となっている。

3. 解 析 例

以上の定式化に基づいて、8節点アイソパラメトリック要素で離散化した、三次元 BEM 音響設計感度解析システムを開発した。

例題として、図1に示すような円筒形閉空間の内周の壁、外周の壁でそれぞれ $p=1, p=0$ 、天井と床で $v=0$ を与えたときの、外径に対する応答の感度係数を計算した。この問題に対する音圧と半径方向の粒子速度の厳密解は、円筒の中心からの距離を r 、内径を a 、外径を b 、内壁の音圧を p_a 、外壁の音圧を p_b とすると、それぞれ次のように表される。

$$p = \frac{\alpha J_0(kr) - \beta N_0(kr)}{\gamma} \quad \dots\dots\dots (38)$$

$$v_r = -j\rho\omega \frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{j}{\rho C} \frac{\alpha J_1(kr) - \beta N_1(kr)}{\gamma} \quad \dots\dots\dots (39)$$

ただし、 J_0, J_1 はそれぞれ 0 次、1 次の Bessel 関数、 N_0, N_1 はそれぞれ 0 次、1 次の Neumann 関数である。また、 α, β, γ は次のように表される。

$$\alpha = N_0(kb)p_a - N_0(ka)p_b \quad \dots\dots\dots (40)$$

$$\beta = J_0(kb)p_a - J_0(ka)p_b \quad \dots\dots\dots (41)$$

$$\gamma = J_0(ka)N_0(kb) - J_0(kb)N_0(ka) \quad \dots\dots\dots (42)$$

音圧や粒子速度の外径 b に対する感度係数の厳密解は、式(38)と式(39)を b で微分することにより得られる。たとえば、 dp/db の厳密解は、次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{dp}{db} = & -\frac{d\gamma}{db} \frac{\alpha J_0(kr) - \beta N_0(kr)}{\gamma^2} \\ & + \frac{1}{\gamma} \left\{ \frac{d\alpha}{db} J_0(kr) - \frac{d\beta}{db} N_0(kr) \right\} \\ & + \frac{k}{\gamma} \frac{dr}{db} \left[-\{\alpha J_1(kr) + \beta N_1(kr)\} \right] \quad \dots\dots\dots (43 \cdot a) \end{aligned}$$

図 3 円筒形閉空間の 1/8 領域の要素分割 (Model B)

図 4 円筒形閉空間の 1/8 領域の要素分割 (Model C)

図 1 円筒形閉空間

図 2 円筒形閉空間の 1/8 領域の要素分割 (Model A)

図 5 Model A に対する音圧の感度係数の誤差

ただし,

$$\frac{da}{db} = -kN_1(kr)p_a \quad \dots\dots\dots(43\cdot b)$$

$$\frac{d\beta}{db} = -kJ_1(kr)p_a \quad \dots\dots\dots(43\cdot c)$$

$$\frac{d\gamma}{db} = -kJ_0(ka)N_1(kb) + kJ_1(kb)N_0(ka) \quad \dots\dots\dots(43\cdot d)$$

である. また, パラメータ $t \in [0, 1]$ を用いて r を表すと,

$$r = a + t(b - a) \quad \dots\dots\dots(44)$$

と書けるから,

$$\frac{dr}{db} = t = \frac{r - a}{b - a} \quad \dots\dots\dots(45)$$

となる. 同様に, 粒子速度の感度の厳密解も, 式(39)を b で微分することによって得られる.

感度係数の数値計算では, 問題の対称性を利用して, 円筒形閉空間の 1/8 領域を図 2~4 のように要素分割したときの, 辺 AD 上の音圧の外径 b に対する感度係

数 dp/db を求めた. なおこの問題では鏡像点の基本解の重ね合わせを利用すれば, 対称面の要素分割を行う必要がない. ここでは, 図 2 のようにすべての対称面を要素分割しない場合 (Model A), x_1 - x_2 対称面を要素分割しない場合 (Model B), およびすべての対称面を要素分割する場合 (Model C) について解析した. 図 5~7 には, この問題について外径 b を実際に 1% 動かして計算したときに得られる応答の差分から計算した

表 1 CPU TIME の比較 (sec)

Model	Finite Difference	Direct Differentiation
A	795.6	806.2
B	402.6	399.8
C	514.8	506.3

図 6 Model B に対する音圧の感度係数の誤差

図 8 内点の音圧の外径 b に対する x_1 軸上の感度

図 7 Model C に対する音圧の感度係数の誤差

図 9 内点の粒子速度の外径 b に対する x_1 軸上の感度

図 10 内点の粒子速度の媒質密度 ρ に対する x_1 軸上の感度係数

感度の厳密解との誤差と、直接微分法を用いて求めた感度の厳密解との誤差を比較して示している。また表 1 には、図 2~4 の問題に対して要した計算時間を示している。計算に用いた計算機は、HITAC-M 260 D である。対称面を要素分割しないほど、計算時間がかかっているが、その理由は、鏡像点の基本解の値を計算する必要があるからである。すなわち、鏡像点の基本解の値を計算することは、対称面の反対側の境界を要素分割して数値積分することと同じ計算をすることになるために、対称面を実際に要素分割して計算する場合よりも計算時間がかかることとなる。

次に、図 8, 9 には x_1 軸上の内点において計算した音圧と粒子速度の外径 b に対する感度係数を示す。直接微分法に基づいて計算した結果は、いずれもほとんど厳密解と一致している。このように、空間の形状の変化に対する感度係数を計算する場合、差分による方法を用いると、実際に形状を変化させて要素分割をやり直す必要があるが、直接微分法の場合にはその必要がなく、しかも精度よい計算が可能であることがわかる。また図 10 には、 x_1 軸上の内点の粒子速度の媒質密

度に対する感度を示す。差分による結果は、媒質密度を実際に 0.083% 変化させて計算した応答の差分から計算したものである。

以上の結果から、境界積分方程式の直接微分法に基づく本設計感度解析法により、効率的に精度よく音圧や粒子速度の感度係数が得られることがわかった。

4. 結 言

定常音響問題について、空間や物体の形状を規定するパラメータ、周波数、媒質の密度および音響インピーダンスを設計変数としたときの、境界上や領域内部の点における音圧と粒子速度の感度係数を関係づける積分方程式を、直接微分法に基づき導出した。また、その定式化をもとに、三次元 BEM 音響設計感度解析システムを開発した。感度係数の厳密解がわかっている例題の数値計算により、直接微分法に基づく BEM 音響設計感度解析法の有効性が示された。今後、本設計感度解析法の音場の最適化や音響逆問題等への適用が期待される。

本研究の一部は、財団法人立石科学技術振興財団の平成 4 年度研究助成の援助により行われた。ここに記して、関係各位に謝意を表する。

文 献

- (1) Kane, J. H., *BETECH 86: Proc. 2nd Boundary Element Technology Conf.*, (1986), 147, Computational Mechanics Publications.
- (2) Sandgrenn, E. and Wu, S. J., *Int. J. Numer. Methods. Eng.*, **26** (1988), 1913.
- (3) Barone, M. R. and Yang, R. J., *AIAA J.*, **26-5** (1988), 589.
- (4) 松本・田中, 機論, **56-525**, A (1990), 1262.
- (5) Matsumoto, T. and Tanaka, M., (Tanaka, M., Brebbia, C. A. and Honma, T. 編), *Boundary Elements XII*, **2** (1990), 205, Computational Mechanics Publications.
- (6) 松本・田中・平田, 境界要素法論文集, **7** (1990), 159.
- (7) 松本・田中・平田, 日本シミュレーション学会第 12 回計算電気・電子工学シンポジウム論文集, (1991), 159.
- (8) 松本・田中・平田, 日本シミュレーション学会第 12 回計算電気・電子工学シンポジウム論文集, (1991), 433.