機械故障を考慮した期待総コスト最小化の単一機械スケジューリング*

鄭 文 学^{*1}, 長 沢 啓 行^{*2}, 西 山 徳 幸^{*3}Single-Machine Scheduling for Minimizing the Expected Total Cost
Subject to Machine Breakdowns

Wen-xue ZHENG, Hiroyuki NAGASAWA and Noriyuki NISHIYAMA

A single-machine scheduling model is proposed for minimizing the expected total cost consisting of flowtime cost and asymmetric penalty cost of earliness-tardiness subject to machine breakdowns. All jobs have a common due date and an identical piecewise linear cost function. Since it is difficult to calculate the exact value of expected total cost, an approximate function of expected total cost is introduced to simplify the scheduling model. Dominance conditions necessary for an optimal schedule are derived for this scheduling problem. Efficient methods exploiting these conditions are proposed for obtaining an optimal schedule minimizing the modified expected total cost. Numerical examples are demonstrated to show the effectiveness of the proposed methods.

Key Words: Production System, Production Management, Production Planning, Management Engineering, Scheduling, Breakdown, Common Due Date, Expectation of Total Cost

1. はじめに

スケジューリングで考慮すべきコストには, ジョブの滞留時間によるコスト, 納期より早く完成された製品が納期まで保管されるコストおよび納期遅れによるペナルティー・コストなどがある。これらのコストからなるコスト関数は, 一般にジョブの加工完了時刻に関する凸関数となる。このようなコスト関数が全てのジョブで同一である総コスト最小化の単一工程スケジューリング法は, すでに提案されている^{(1)~(3)}。そこでは, スケジューリング問題を取り扱っている多くの論文と同じように, 機械は連続稼動可能と仮定されている。しかし, 現実には, 機械は稼動中に故障が起り, 修理または部品の取り替えによって再び稼動状態に戻るというサイクルを繰り返す。特に, 技術の発展と市場

要求の多様化に伴って, 生産設備の高度化と減価償却期間の短縮が進む現在, このような生産設備を効率的に運用することが重要な課題となっている。ところが, 設備の構造が複雑化するのとは避けられず, ハードウェア面から機械故障を減少させることには限界がある。例えば, マシニングセンター1台につき, 1日当り(平均稼動時間=9.8時間)の故障による作業停止時間の平均は0.28時間に達すると報告されている⁽⁴⁾。このような機械の故障による作業停止が仕掛在庫費用や納期遅れペナルティー・コストなどの増加につながらないよう生産計画ないしスケジューリングなどのソフトウェア面からも配慮する必要がある。

従来のスケジューリングに関する研究の中で機械故障を考慮に入れたものは数少ない。Glazebrook⁽⁵⁾⁽⁶⁾およびPinedo⁽⁷⁾は, 機械故障を考慮したスケジューリング問題をジョブの加工時間が確率的に変動する確率的モデルとして定式化した。しかし, これらの確率的スケジューリング・モデルは複雑であり, これを解析することの困難さから, 有効な解法は示されていない。また, Birge⁽⁸⁾は機械故障を考慮した確率的ス

* 原稿受付 平成4年4月20日。

^{*1} 正員, 大阪府立大学大学院 (〒593 堺市学園町1-1)。^{*2} 正員, 大阪府立大学工学部。^{*3} 大阪府立大学工学部。

ケジューリング問題を加工完了時刻の重み付き総和の期待値最小化という確定的モデルに変換し、いくつかの特別な機械故障パターンのもとでの最適解法の開発を試みた。しかし、このスケジューリング法はごく特殊な問題にしか適用できず、一般化するのは困難である。このように、機械故障を考慮したスケジューリング法に関する研究は未だ端緒の段階にある。

工学的観点からは、自動機械による加工時間は確定的であると考えてよく、故障についてもマシニングセンターの故障統計から、予期しうる故障パターンの場合には故障率や故障による作業停止時間をほぼ一定値とみなすこともできる。日常的なスケジューリングの場合には、このような予期しうる故障パターンだけを考慮してもさしつかえない。このような考えに基づき、本研究では、機械故障を考慮した期待総コスト最小化の単一機械スケジューリング問題を定式化し、最適スケジュールの必要条件を導き、最適化アルゴリズムを提案する。また、数値実験でその有効性を示す。

2. スケジューリング・モデル

本研究で対象とする故障を考慮した単一機械スケジューリング問題に以下の前提条件をおく。

- (1) n 個のジョブは、時刻 $t = 0$ で着手可能である。また、加工が開始されたジョブは、他のジョブによる割り込みを許さない。
- (2) 各ジョブの加工時間は既知であり、変動しない。段取り時間は各ジョブの加工時間に含まれ、スケジューリングに依存しない。
- (3) ジョブの納期はすべて同一であり（以下では「共通納期」と呼ぶ）、加工の完了したジョブは納期まで出荷できず製品在庫となる。
- (4) 生産工程は単一工程・単一機械であり、また、機械は同時に1つのジョブしか加工できない。
- (5) 対象とする機械の状態を稼働可能と稼働不能の二つとし、稼働可能状態にある機械の性能は修理の前後で変わらない。また、時刻 $t = 0$ ですべての機械は稼働可能な状態にある。
- (6) 故障が起こるまでに加工されたジョブの作業は、機械の修復後、初めから加工し直す必要がなく、残りの作業だけが続けて加工される。

以上の前提条件のもとで、モデルの定式化に用いる記号を次のように定義する。

n : 総ジョブ数

p_i : ジョブ J_i の加工時間 ($i = 1, 2, \dots, n$)

π : 実行可能なスケジュール

J_i : 第 i 番目に順序づけられているジョブ

C_i : ジョブ J_i の加工完了時刻

d : ジョブの共通納期

$D_k(t)$: 機械が累計 t 時間稼働する時の故障 k による作業停止時間の累計

$D(t)$: 機械が累計 t 時間稼働する時の故障による作業停止時間の総和

また、ジョブ J_i の加工が時刻 C_i に完了するときのコスト $G(C_i)$ を次式で与える。

$$G(C_i) = \begin{cases} w_1 C_i + w_2(d - C_i), & C_i \leq d; \\ w_1 C_i + w_3(C_i - d), & C_i > d. \end{cases} \quad (1)$$

ただし、 $w_1 C_i$ はジョブ J_i の加工が時刻 C_i に完了するときの滞留時間によるコスト例えば仕掛かり在庫コスト、 $w_2(d - C_i)$ は $C_i \leq d$ の場合に納期 d まで製品として保管するためのコスト、 $w_3(C_i - d)$ は $C_i > d$ の場合に生じる納期遅れによるペナルティー・コストである。コスト係数 w_1, w_2 および w_3 はそれぞれ「単位時間当たり仕掛かり在庫コスト」、「単位時間当たり製品保管コスト」および「単位時間当たり納期遅れペナルティー・コスト」と呼ぶ。通常 $w_1 < w_2 < w_3$ の関係が成り立つと考えられるが、以下では特にこのような仮定を置かない。

機械の故障による作業停止時間を考慮した場合に、式 (1) における加工完了時刻は確率変数となり、次のように与えられる。

$$C_i = t_s + \sum_{j=1}^i p_j + D(\sum_{j=1}^i p_j). \quad (2)$$

ここで、 t_s はスケジュールにおける最初のジョブの加工開始時刻であり、 $D(\sum_{j=1}^i p_j)$ は機械が $\sum_{j=1}^i p_j$ 時間稼働するときに機械の故障による作業停止時間の総和を表す。

一般に、機械の稼働時間と作業停止時間は互いに独立であり、加工完了時刻の期待値は次式で与えられる。

$$E[C_i] = t_s + \sum_{j=1}^i p_j + E[D(\sum_{j=1}^i p_j)]. \quad (3)$$

式 (1) の $G(C_i)$ は C_i に関する局所線形関数であり、その期待値 $E[G(C_i)]$ を正確に求めるためには作業停止時間 $D(\sum_{j=1}^i p_j)$ の分布を得る必要がある。しかし、複数の故障パターンを考慮する場合には、これは極めて困難である。この分布を正規分布などで近似する方法も考えられるが、その場合にはスケジューリングに膨大な計算量を要する。ところで、 $E[G(C_i)]$ と $G(E[C_i])$ の間には

$$E[G(C_i)] \begin{cases} \geq G(E[C_i]), & t_s + \sum_{j=1}^i p_j < d; \\ = G(E[C_i]), & t_s + \sum_{j=1}^i p_j \geq d, \end{cases} \quad (4)$$

という関係が成り立ち、次のような近似式を用いることもできる。

$$E[G(C_i)] \simeq G(E[C_i]). \quad (5)$$

この式を用いた場合には $t_s + \sum_{j=1}^i p_j < d$ となるジョブの期待コストが過小評価されることになるので、 $E[G(C_i)]$ の厳密な値を最小化する場合と比べて、 $t_s + \sum_{j=1}^i p_j < d$ となるジョブ数が増える傾向になる。これは納期遅れを減らす方向への作用であり、工学的には許容されよう。しかも、後に述べるように、このような近似によりスケジューリングが非常に簡素化される。式(5)の近似により、スケジュール π の期待総コストは、次式で表される。

$$E[TC(\pi)] \simeq \sum_{i=1}^n G(E[C_i]). \quad (6)$$

本研究の目的は、式(6)で近似される $E[TC(\pi)]$ を最小化するスケジュール π を求めるための効率的なアルゴリズムを開発することである。

3. 機械の故障による作業停止時間

機械の故障に関する従来の研究では、機械の故障時間間隔および故障に伴う修理時間はいずれも確率変数として扱われ、その分布形が求められてきた。生産現場の保全技術がめざましく進歩している現在では、機械故障は診断技術の活用により発見されやすく、その原因の究明も故障解析および保全のシステム化によりルーチンワーク化されるようになった。また、修理作業はブロック部品交換方式やプレハブ方式などの修理方法の導入によりほとんどパターン化されるようになった⁽⁹⁾。したがって、故障による停止時間は、故障の種類によってほぼ定まり、定数として近似できる場合が多い。

本研究では、このような生産保全の見地から、機械の故障とこれに伴う作業停止時間に関して次のような前提条件を設ける。

- (1) Q 種類の故障が起きるものとする。
- (2) 各種故障の生起は互いに独立であり、二つ以上の故障が同時に起きることはない。
- (3) 各種故障に対する作業停止時間 t_k , $k = 1, 2, \dots, Q$, は既知の定数とする。

これらの条件から、機械が t 時間作動したときに故障 k が n_k 回発生し、そのための作業停止時間 $D_k(t)$ が $n_k t_k$ になる確率は、

$$\Pr\{D_k(t) = n_k t_k\} = \Pr\{N_k(t) = n_k\}$$

となる。ここで、 $N_k(t)$ は時間間隔 $(0, t)$ の間に故障 k の発生回数を示す確率変数である。 $N_k(t)$ の分布関数が与えられれば、各故障に伴う停止時間 $D_k(t)$, $k = 1, 2, \dots, Q$, が求められ、作業停止時間 $D(t)$ は次式で得られる。

$$D(t) = \sum_{k=1}^Q D_k(t). \quad (7)$$

各種故障の発生回数の分布は故障パターンによって異なるが、本研究では機械故障が定常的安定状態にあるスケジューリングを対象としているので故障率が一定である場合をとりあげる。

機械の故障率が時間に関係なく一定である場合には、 $N_k(t)$ はポアソン分布に従い次式のようになる。

$$\Pr\{N_k(t) = n_k\} = \frac{(\lambda_k t)^{n_k}}{n_k!} \times \exp(-\lambda_k t). \quad (8)$$

ここで、 λ_k は故障 k の故障率である。

以上の仮定から、次の定理が導かれる。

[定理1] 単一機械スケジューリング問題において、機械の故障率が一定である場合には、ジョブ J_i の期待加工完了時刻は、 $\theta = \sum_{k=1}^Q \lambda_k t_k$ とおいて次式で与えられる。

$$E[C_i] = t_s + (1 + \theta) \sum_{j=1}^i p_j. \quad (9)$$

ここで、 θ を「故障修正係数」とよび、 $(1 + \theta)p_j$ をジョブ J_j の「故障修正加工時間」と呼ぶ。

(証明) 式(7)および式(8)から、

$$\begin{aligned} E[D(\sum_{j=1}^i p_j)] &= \sum_{k=1}^Q E[D_k(\sum_{j=1}^i p_j)] \\ &= \sum_{k=1}^Q t_k \sum_{n_k=1}^{\infty} n_k \Pr\{N_k(\sum_{j=1}^i p_j) = n_k\} \\ &= (\sum_{k=1}^Q t_k \lambda_k) \sum_{j=1}^i p_j \end{aligned}$$

が得られる。ここで、 $\sum_{k=1}^Q t_k \lambda_k = \theta$ とし、式(3)に代入すると、式(9)が得られる。(証明終)

定理1より、式(6)は次のように表される。

$$E[TC(\pi)] \simeq \sum_{i=1}^n G(t_s + (1 + \theta) \sum_{j=1}^i p_j). \quad (10)$$

4. 最適スケジュールの必要条件

式(1)のコスト関数 $G(t)$ は全てのジョブで同一であり、加工完了時刻 t に関する線形非対称凸関数であるため、 $G(t)$ を最小にする最適加工完了時刻 c_{opt} が存在する。単位時間当たり仕掛かり在庫コストが単位時間当たり製品保管コストより大きい場合 ($w_1 \geq w_2$) には、

コスト関数 $G(t)$ が加工完了時刻の単調非減少関数となるため, $c_{opt} = 0$ である. また, $w_1 < w_2$ の場合には, コスト関数 $G(t)$ がジョブの加工完了時刻の線形凸関数となり, $c_{opt} = d$ である. 機械故障を考慮しない場合と同様に, 最適スケジュールの最初のジョブの加工開始時刻が非負であるという条件が自動的に満たされるスケジューリング問題を「制約のない」問題と呼ぶ. $(1 + \theta) \sum_{j=1}^n p_j \leq c_{opt}$ であれば, 制約のないスケジューリング問題となる. 上記の条件が満たされない場合には, 「制約問題」となり, 最初のジョブの加工開始時刻の非負条件を考慮しなければならない. 以下では, これらの問題に対する最適スケジュールの必要条件について論じる.

4.1 制約のない問題に対する必要条件

機械故障を考慮しない場合の制約のない総コスト最小化・単一機械スケジューリング問題に対する最適スケジュールの必要条件⁽¹⁾のうち, 次の条件 1, 2 および 3 は機械故障を考慮した問題に対しても若干の修正をすることにより成り立つ.

[条件 1] ジョブ間に遊休時間を挿入しない.

[条件 2] 最適スケジュールは V 形である. すなわち, 故障修正加工時間 $(1 + \theta)p_j$ (したがって加工時間 p_j) が最小となるジョブの前方および後方のジョブはそれぞれ加工時間の非増加順 (LPT) および加工時間の非減少順 (SPT) で順序づけられる.

[条件 3] 故障修正加工時間 (したがって加工時間) が最大となるジョブは最初に順序づけられる.

また, 次の条件 4 が成り立つ.

[条件 4] (1) $w_1 \geq w_2$ の場合には, SPT による順序づけが最適である. (2) $w_1 < w_2$ の場合には, 最適スケジュールにおいて, 期待加工完了時刻が共通納期 d に等しいジョブが存在する.

(証明) $w_1 \geq w_2$ の場合には, コスト関数がジョブの加工完了時刻に関する単調非減少関数であるため, 条件 4 (1) が成り立つのは明らかである.

条件 4 (2) については, 図 1 に示すようにジョブ J_k の期待加工開始時刻が $d - t_b$ であり, 期待完了時刻が $d + t_a$ であるような最適スケジュール $\pi^\dagger$ が存在すると仮定する. 図 1 において, B および A はそれぞれジョブ J_k の前および後に順序づけられているジョブの集合であり, 各集合に含まれるジョブの数を $|B|$ および $|A|$ で表す. これより, 以下の 2 つの場合が考えられる.

(a) $|B|(w_2 - w_1) \leq (|A| + 1)(w_1 + w_3)$,

(b) $|B|(w_2 - w_1) > (|A| + 1)(w_1 + w_3)$.

(a) の場合には, 全てのジョブを $E[C_k] = d$ となる

図 1. スケジュール $\pi^\dagger$ におけるジョブ J_k の位置

よう前方に t_a 時間移動させ, スケジュール π_1 を得る. このとき, π_1 と $\pi^\dagger$ の期待総コストの変化は,

$$\begin{aligned} E[TC(\pi^\dagger)] - E[TC(\pi_1)] \\ = [|B|(w_2 - w_1) - (|A| + 1)(w_1 + w_3)]t_a \leq 0 \end{aligned}$$

となる. これは $\pi^\dagger$ が最適であるという条件と矛盾する.

同様に, (b) の場合には, 全てのジョブを $E[C_k] = d + t_b + t_a$ となるよう後方に t_b 時間移動させ, スケジュール π_2 を得る. この場合の π_2 と $\pi^\dagger$ の期待総コストの変化は,

$$\begin{aligned} E[TC(\pi^\dagger)] - E[TC(\pi_2)] \\ = [(|A| + 1)(w_1 + w_3) - |B|(w_2 - w_1)]t_b \leq 0 \end{aligned}$$

となる. これは $\pi^\dagger$ が最適であるという条件と矛盾する.

以上より条件 4 (2) が成り立つ. (証明終)

条件 4 (2) と関連して, 次の条件 5 が成り立つ.

[条件 5] $w_1 < w_2$ の場合の最適スケジュールにおいて, 期待加工完了時刻が共通納期に等しいジョブは第 b 番目に順序づけられている. ただし, b は次式を満たす整数である.

$$n \frac{(w_1 + w_3)}{(w_2 + w_3)} \leq b \leq 1 + n \frac{(w_1 + w_3)}{(w_2 + w_3)}. \quad (11)$$

(証明) 条件 4 (2) より, 最適スケジュールにおいて, 期待加工完了時刻が共通納期 d に等しいジョブが存在する. このジョブが第 b ($1 \leq b \leq n$) 番目に順序づけられているとする.

全てのジョブを左へ任意の幅 $\Delta t > 0$ だけ移動させると, 総コストの期待値の増分は,

$$b(w_2 - w_1)\Delta t - (n - b)(w_1 + w_3)\Delta t \geq 0$$

となる. したがって, 次式が得られる.

$$b \geq n(w_1 + w_3)/(w_2 + w_3).$$

同様に, 全てのジョブを右へ任意の幅 $\Delta t > 0$ だけ移動させると, 総コストの期待値の増分は,

$$-(b - 1)(w_2 - w_1)\Delta t + (n - b + 1)(w_1 + w_3)\Delta t \geq 0$$

となる。したがって、次式が得られる。

$$b-1 \leq n(w_1 + w_3)/(w_2 + w_3).$$

以上の結果をまとめると式 (11) が得られる。(証明終)

ここで、 $n(w_1 + w_3)/(w_2 + w_3)$ が整数となる場合には、 $b = 1 + n(w_1 + w_3)/(w_2 + w_3)$ または $b = n(w_1 + w_3)/(w_2 + w_3)$ のどちらでもかまわない。

条件 4(2) および 5 から次の条件 6 が導かれる。

[条件 6] $w_1 < w_2$ の場合には、最適スケジュールにおいて、故障修正加工時間（したがって加工時間）が最小となるジョブ J_b の期待加工完了時刻は d または $d + (1 + \theta)p_b$ のいずれかである。

(証明) 条件 5 より、最適スケジュールにおいて、第 b 番目に順序づけられたジョブの加工完了時刻の期待値は共通納期 d に等しい。これより、最適スケジュール π^* の総コストは、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} E[TC(\pi^*)] &= nw_1d + (w_2 - w_1) \sum_{i=1}^b (i-1)(1+\theta)p_{[i]} \\ &\quad + (w_1 + w_3) \sum_{i=b+1}^n (n-i+1)(1+\theta)p_{[i]}. \end{aligned}$$

本式より係数が最大となる項は第 b 番目または第 $b+1$ 番目のジョブに関する項である。故障修正加工時間が最小となるジョブは最適スケジュールにおいて明らかにこのいずれかの位置に順序づけられる。したがって、条件 6 が成り立つ。(証明終)

4.2 制約問題に対する必要条件

上述の機械故障を考慮した制約のない問題に対する最適スケジュールの必要条件のうち、条件 1, 2 および 4 (1) は制約問題に対しても成り立つ。しかし、条件 3, 4(2), 5 および 6 は、制約問題では必ずしも成り立たない。Zheng らは、コスト関数がジョブの加工完了時刻の非線形凸関数である場合に、制約のある総コスト最小化スケジューリングの最適スケジュールでは、加工時間が最小となるジョブの加工完了時刻が

$$\Omega = [c_{opt} - \zeta, c_{opt} + \eta] \quad (12)$$

の時間間隔の中に含まれることを示した⁽³⁾。ただし、

$$\zeta = p_a + c_{opt} - G_+^{-1}[G(c_{opt} - \zeta)] - p_{min}, \quad (13)$$

$$\eta = p_b - c_{opt} + G_-^{-1}[G(c_{opt} + \eta - p_{min})] \quad (14)$$

である。ここで、 p_b および p_a はそれぞれ最小加工時間 p_{min} をもつジョブの前および後に隣接するジョブの

加工時間であり、 $G_+^{-1}(\cdot)$ および $G_-^{-1}(\cdot)$ はそれぞれ次式で与えられる $G_+(\cdot)$ および $G_-(\cdot)$ の陰関数である。

$$G(C_i) = \begin{cases} G_-(C_i), & \text{if } C_i < c_{opt}; \\ G_+(C_i), & \text{if } C_i \geq c_{opt}. \end{cases} \quad (15)$$

これを本研究で対象とする機械故障を考慮した問題に適用すると、次の条件 7 が得られる。

[条件 7] 故障修正加工時間（したがって加工時間）が最小となるジョブの期待加工完了時刻は次の時間間隔 $\Omega^\dagger$ の中に含まれる。

$$\Omega^\dagger = [d - \zeta^\dagger, d + \eta^\dagger]. \quad (16)$$

ただし、

$$\zeta^\dagger = (1 + \theta)(p_a - p_{min})/(1 + \varepsilon), \quad (17)$$

$$\eta^\dagger = (1 + \theta)(\varepsilon p_b + p_{min})/(1 + \varepsilon), \quad (18)$$

$$\varepsilon = (w_2 - w_1)/(w_1 + w_3).$$

である。

(証明) 式 (1) より、次式が得られる。

$$G_+^{-1}(G) = d + (G - w_1d)/(w_1 + w_3), \quad (19)$$

$$G_-^{-1}(G) = d - (G - w_1d)/(w_2 - w_1). \quad (20)$$

式 (13) および (14) に $c_{opt} = d$, $G(c_{opt} + \eta - p_{min}) = G_+(d + \eta - p_{min}) = (w_1 + w_3)(\eta - p_{min}) + w_1d$ および $G(c_{opt} - \zeta) = G_-(d - \zeta) = (w_2 - w_1)\zeta + w_1d$ を代入し、式 (19) および (20) を用いれば、

$$\zeta = (p_a - p_{min})/(1 + \varepsilon), \quad (21)$$

$$\eta = (\varepsilon p_b + p_{min})/(1 + \varepsilon) \quad (22)$$

が得られる。

式 (6) および (9) より、故障を考慮した場合は加工時間 p_i を故障修正時間 $(1 + \theta)p_i$ と置換すればよいから、

$$\zeta^\dagger = (1 + \theta)(p_a - p_{min})/(1 + \varepsilon),$$

$$\eta^\dagger = (1 + \theta)(\varepsilon p_b + p_{min})/(1 + \varepsilon)$$

が得られる。

(証明終)

条件 7 の中の p_a および p_b を前もって確定することはできないため、 $\Omega^\dagger$ を求めるのは一般に困難である。ところが、 $p_a \leq p_{max}$ および $p_b \leq p_{max}$ が成り立つため、これらを式 (17) および (18) に適用すると、

$$\zeta^\dagger \leq \zeta_{max}^\dagger = (1 + \theta)(p_{max} - p_{min})/(1 + \varepsilon), \quad (23)$$

$$\eta^\dagger \leq \eta_{max}^\dagger = (1 + \theta)(\varepsilon p_{max} + p_{min})/(1 + \varepsilon) \quad (24)$$

となる。したがって、次の条件 8 が導かれる。

[条件 8] 故障修正加工時間（したがって、加工時間）が最小となるジョブの期待加工完了時刻は次の時間間隔 $\Omega_{max}^{\dagger}$ の中に含まれる。

$$\Omega_{max}^{\dagger} = [d - \zeta_{max}^{\dagger}, d + \eta_{max}^{\dagger}]. \quad (25)$$

また、共通納期 d がジョブの故障修正加工時間の最大値より小さい場合には、 $\Omega_{max}^{\dagger}$ は

$$\Omega_{max}^{\dagger} = [\max\{(1+\theta)p_{min}, d - \zeta_{max}^{\dagger}\}, d + \eta_{max}^{\dagger}] \quad (26)$$

となる。

任意の $R_k \in \Omega_{max}^{\dagger}$ に対して、故障修正加工時間が最小となるジョブの期待加工完了時刻を R_k に等しくおくことによって、 R_k -条件付き最適スケジュールが得られ、これを $\pi(R_k)$ と記す。 $\pi(R_k)$, $R_k \in \Omega_{max}^{\dagger}$ の中で式 (6) の $E[TC(\pi)]$ を最小にするスケジュール π^* が最適スケジュールであり、次式で与えられる。

$$E[TC(\pi^*)] = \min\{E[TC(\pi(R_k))] \mid 1 \leq k \leq K\}, \quad (27)$$

$$R_k = d - \zeta_{max}^{\dagger} + k - 1, \quad (28)$$

$$K = \eta_{max}^{\dagger} + \zeta_{max}^{\dagger} - 1 = (1+\theta)p_{max} - 1. \quad (29)$$

5. 最適スケジュールの生成法

5.1 制約のない問題に対する最適化アルゴリズム

最適スケジュールの条件 1～6 に基づき、機械故障を考慮した制約のない問題に対する最適化アルゴリズムを次のように提案する。

〈手順 1〉 n 個のジョブを LPT で順序づけ、 $p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_n$ のように番号をつける。

〈手順 2〉 $B = \phi$, $A = \phi$ および $k = 0$ と設定する。

〈手順 3〉 $k = n$ なら、手順 7 へ進む。

〈手順 4〉 $|B|(w_2 - w_1) \leq (|A| + 1)(w_1 + w_3)$ なら、手順 5 へ進む、それ以外は、手順 6 へ進む。

〈手順 5〉 ジョブ J_{k+1} をジョブ集合 B に入れ、 $k = k + 1$ とし、手順 3 へ戻る。

〈手順 6〉 ジョブ J_{k+1} をジョブ集合 A に入れ、 $k = k + 1$ とし、手順 3 へ戻る。

〈手順 7〉 集合 B のジョブをその中の最後のジョブの期待加工完了時刻が共通納期 d に等しくなるように LPT で順序づけ、集合 A のジョブをその中の最初のジョブの期待加工開始時刻が d に等しくなるように SPT で順序づける。最適スケジュールの最初のジョブの加工開始時刻を $t_s = d - (1+\theta)\sum_{j \in B} p_j$ とし、手順を終了する。

また、このアルゴリズムは $(1+\theta)\sum_{j=1}^n p_j \geq d$ の場合に対しても、 $(1+\theta)\sum_{j \in B} p_j \leq d$ 、すなわち最初のジョブの加工開始時刻 t_s が非負である限り、適用可能である。

このアルゴリズムで得られるスケジュールは最適である。その証明は Kanet⁽¹⁰⁾ と同様の方法により行える。

5.2 制約問題に対する最適化アルゴリズム

最適スケジュールの条件 1, 2, 4 (1) および 7 に基づき、機械故障を考慮した制約問題に対する最適化アルゴリズムを次のように提案する。

〈手順 1〉 制約のない問題として、5.1 のアルゴリズムで解き、得られたスケジュールを π^* と記す。

〈手順 2〉 π^* の加工開始時刻 t_s が非負であれば、 π^* が最適解となり、手順を終了する。それ以外の場合には、 π^* の順序を変えないで加工開始時刻を $t_s = 0$ として期待総コストを求め、これを下界として手順 3 へ進む。

〈手順 3〉 鄭ら⁽³⁾ の提案している分岐手順、加工開始時刻の上界および期待総コストの下界を援用して、式 (27)～(29) を解き、最適解を求める。

6. 数値例

提案アルゴリズムを FORTRAN でコーディングし、クロック周期が 20MHz で、数値演算プロセッサ付きの CPUi82386 のパソコンで、いくつかの例題を解いた。

例題におけるジョブの加工時間は 1～20[h] の一様乱数で発生させた。機械の故障および修理に関するデータは表 1 のように与えた。コスト関数は、 $G_1(t) = t$, $G_2(d-t) = 2(d-t)$ および $G_3(t-d) = 3(t-d)$ とした。共通納期は $d = 0.5d^*$ および d^* とした。ただし、 $d^* = [(1+\theta)\sum_{i=1}^n p_i]$ である。ジョブ数 $n = 10, 15, 20, 25$ と納期 $d = 0.5d^*$, d^* の各組合せにより、機械故障を考慮したスケジューリング問題をそれぞれ 10 題生成し、提案法と故障を考慮していない総コスト最小化のスケジューリング法^{(1),(3)}で解を求めた。

計算結果は表 2 のように得られた。表 2 において、故障を考慮しない場合の最適スケジュール π^0 と提案法による最適スケジュール π^* との式 (6) による期待総コストの比を $E[TC(\pi^0)]/E[TC(\pi^*)]$ の欄に示した。また、 R_k -条件付き最適スケジュールを一つ求めるための平均計算時間は、故障を考慮した場合と考慮しない場合とではほぼ等しかったので、故障を考慮した場合の提案法による値を CPU time の欄に示した。

表 2 の結果から、故障を考慮した場合の期待総コスト

表 1. 数値例における機械の故障率と修理時間

Failure k	1	2	3	4	5
Failure Rate $\lambda_k [h^{-1}]$	0.01	0.008	0.006	0.004	0.002
Repair Time $t_k [h]$	2	3	4	5	6

表 2. 数値例の計算結果

d	n	$E[TC(\pi^o)]/E[TC(\pi^*)]$			Average CPU Time[s]
		Min	Mean	Max	
d^*	10	1.007	1.024	1.037	0.0
	15	1.011	1.040	1.045	
	20	1.008	1.029	1.035	
	25	1.027	1.034	1.047	
$0.5d^*$	10	1.009	1.030	1.050	0.4
	15	1.013	1.019	1.034	2.0
	20	1.006	1.015	1.021	15.0
	25	1.011	1.017	1.025	205.4

トは故障を考慮しない場合の値より平均で 1.5 ~ 4.0% 小さい。また、共通納期が $d = d^*$ と大きく制約のない問題となる場合のほうが、制約問題となる $d = 0.5d^*$ の場合と比べて、故障を考慮することによる期待総コストの減少効果は大きい。故障を考慮することによる期待総コストの減少はスケジュールの最初のジョブの加工開始時刻の調整とジョブの順序づけの両面からはかれるが、制約問題では前者の調整ができなくなるため、上記の減少効果が下がるのである。また、提案法の計算量は制約のない問題に対して $O(n)$ であり、制約問題に対しては、故障を考慮しない場合の解法⁽¹⁾とほぼ同じであり、 $O(1.4^n) \sim O(1.8^n)$ である。したがって、提案法はより大規模な問題へも適用可能といえる。

7. 結 言

本研究の内容は次のようにまとめられる。

- (1) 機械の故障を考慮した期待総コスト最小化の単一機械スケジューリング問題を定式化し、最適スケジュールの必要条件を導いた。
- (2) これらの必要条件を利用した最適化アルゴリズムを提案し、その有効性を数値例で示した。

文 献

- (1) Zheng, W. X., Nagasawa, H. and Nishiyama, N., Single Machine Scheduling for Minimizing Total Cost with Identical, Asymmetrical Earliness and Tardiness Penalties, Proceedings of the 11th ICPR, China (1991), 185.
- (2) 鄭文学・長沢啓行・西山徳幸, 総コスト最小化の並列機械スケジューリング, 日本経営工学会誌, 43, 3(1992), 193.
- (3) 鄭文学・長沢啓行・西山徳幸, ジョブ加工開始時刻の非負条件を考慮した総コスト最小化の単一機械スケジューリング, 日本経営工学会誌投稿中。
- (4) 下郷太郎・山崎和雄, 群制御工作機械システムの自動保守に関する研究, (1974), 15, 日本機械学会。
- (5) Glazebrook, K. D., Scheduling Stochastic Jobs on Single Machine Subject to Breakdowns, *Naval Research Logistics Quarterly*, 31(1984), 251.
- (6) Glazebrook, K. D., Evaluating the Effects of Machine Breakdowns in Stochastic Scheduling Problem, *Naval Research Logistics*, 34 (1987), 319.
- (7) Pinedo, M. L. and Rammouz, E., A Note on Stochastic Scheduling on a Single Machine Subject to Breakdown and Repair, *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, 2 (1988), 41.
- (8) Birge, J., Frenk, J., Mittenthal, J. and Rinnooy Kan, A.H.G., Single-Machine Scheduling Subject to Stochastic Breakdowns, *Naval Research Logistics*, 37 (1990), 661.
- (9) 鄭文学, 日本における総合的设备管理 (TPM) に関する研究, 修士論文 (名工大) (1989), 47.
- (10) Kanet, J. J., Minimizing the Average Deviation of Job Completion Times about a Common Due Date, *Naval Research Logistics Quarterly*, 28 (1981), 155.