ヒステリシス特性を有する多自由度構造系の不規則振動解析*

持 尾 隆 士^{*1}Random Vibration Analysis of Multi-Degree-of-Freedom Structures
with Hysteretic Characteristics Subjected to Combined Random Loads

Takashi MOCHIO

A method to estimate the stochastic response of hysteretic structures under combined random loads regarded as Gaussian white noise is investigated. The response statistical moments of structures, with hysteretic characteristics approximated by Wen's mathematical model, are obtained by using the Fokker-Planck equation method with a cumulant truncation technique. This paper deals with the formulation for the multi-degree-of-freedom system, and demonstrates that resulting variances of the response for a three-degree-of-freedom structure, as a numerical example, agree well with a Monte Carlo simulation.

Key Words: Random Vibration, Multi-Degree-of-Freedom System, Nonlinear Vibration, Simulation, Fokker-Planck Equation, Cumulant Truncation Technique

1. ま え が き

重工業界の製品の中にも不規則外乱を受ける現象を取扱わねばならないものは多い。たとえば構造物の耐震、波浪による船舶運動、突風による航空機や煙突の耐風問題などである。これらの現象における不規則外乱はいずれも再現性がなく時間的に変動する不確定量であるため、解析は確率統計論的取扱いとなるが、特に系が非線形の場合には取扱いがより複雑となるケースが多い。この非線形不規則振動問題に対する取組み方には、ケースバイケースで種々のアプローチが要求されるであろうが、工業問題に限定すれば二つに大別されるように思われる。すなわち第1の取組みかたは1自由度モデルによるアプローチであり、非線形現象自身の把握・解明、応答量の概略推定等が要求される場合の攻め方である。第2の取組みかたは多自由度モデルによるアプローチであり、すでに1自由度モデルにより既知あるいは開発された非線形特性を利用して、多自由度でなければ説明のつかない損傷モードの解釈、応答量の詳細評価などを実施する場合の取組み

かたである。

一方、現象に対するアプローチの方法が決まったとして、次に決めるべきものが、使用する解析手法の種類である。従来、非線形不規則振動解析法としては摂動法を応用したもの、Fokker-Planck 方程式を利用したもの、統計的等価線形化手法などが良く知られている。各手法には各々長短所があり対象とする問題ごとに使い分けられているが、比較的非線形性の大きな現象にも有効な後者の2手法の利用が近年目立っているようである。

本論文では、構造物を対象とした工業問題でしばしば遭遇する材料非線形性の一つであるヒステリシス特性を、多自由度モデルによるアプローチで取組むことが要求される場合について、これを Fokker-Planck 法により解析する一手法を提案するものである。

2. Fokker-Planck 法による
非線形多自由度系の解析

2・1 対象とする解析モデル 解析対象としては図1で示される多質点履歴系モデルを取り上げ、はん用性をもたせるため、これに強制変位入力による荷重と一般外力の両方が同時に作用する複数外乱問題の定式化を行う。

* 原稿受付 平成4年8月10日。

*¹ 正員、三菱重工業(株)長崎研究所 (〒851-03 長崎市深堀町5-717-1)。

なお図1においては,

m_k : k 点の集中質量

C_k : k 点と $(k-1)$ 点間の減衰係数

Q_k : k 点と $(k-1)$ 点間の非線形復元力

F_i : i 番目の種類の一般外力

x_g : 基部変位

x_k : k 点の絶対変位

を示している。この時の一般的な運動方程式は次のとおりである。

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{y}_1 + C_1 \dot{y}_1 - C_2 (\dot{y}_2 - \dot{y}_1) + Q_1(y_1) - Q_2(y_2 - y_1) \\ = -m_1 \ddot{x}_g + F_1 \\ \vdots \\ m_k \ddot{y}_k + C_k (\dot{y}_k - \dot{y}_{k-1}) - C_{k+1} (\dot{y}_{k+1} - \dot{y}_k) \\ + Q_k(y_k - y_{k-1}) - Q_{k+1}(y_{k+1} - y_k) \\ = -m_k \ddot{x}_g + F_i \\ \vdots \\ m_N \ddot{y}_N + C_N (\dot{y}_N - \dot{y}_{N-1}) + Q_N(y_N - y_{N-1}) \\ = -m_N \ddot{x}_g + F_M \end{aligned} \quad (1)$$

ただし y_k は k 点での基部に対する相対変位 ($=x_k - x_g$) を示す。

図1 複数の荷重を受ける多質点履歴系モデル

2.2 ヒステリシスモデル 式(1)で必要となる

ヒステリシスモデルには現在まで種々のものが提案されているが、不規則振動の理論解析にとって好都合なモデルは以外と少ない。その中でWenのモデル⁽¹⁾は比較的应用性の高いものであり数式表現で与えられているため理論解析の中にも取り込みやすい。このためここでは次式で示されるWenのモデルを利用する。

$$Q(u_i, t) = \alpha k u_i + (1 - \alpha) k Z \quad (2)$$

$$\dot{Z} = A \dot{u}_i - \beta |\dot{u}_i| |Z|^{n-1} Z - \gamma \dot{u}_i |Z|^n \quad (3)$$

ここで u_i は質点間の相対変位を示す。

式(2)における α は非線形性の度合を示すものであり $\alpha=1$ ならば系は線形でありこの時 k は通常のばね定数を示している。式(3)における A, β, γ, n は非線形特性を表わすパラメータでありこれらの値を変化させることにより種々の非線形性を表現することが可能である。その一例を図2に示す。

2.3 応答モーメント方程式の導出 Fokker-Planck 法を用いて応答共分散値を求める。

はじめに式(2)(3)を式(1)に代入して得られる新たな式を、

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= X_1, y_2 = X_2, \dots, y_N = X_N \\ \dot{y}_1 &= X_{N+1}, \dot{y}_2 = X_{N+2}, \dots, \dot{y}_N = X_{2N} \\ Z_1 &= X_{2N+1}, Z_2 = X_{2N+2}, \dots, Z_n = X_{3N} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

として状態変数表示すると、

$$\left. \begin{aligned} \dot{X}_1 &= X_{N+1} \\ &\vdots \\ \dot{X}_N &= X_{2N} \\ \dot{X}_{N+1} &= -2\xi_1 \omega_1 X_{N+1} + 2\rho_2 \xi_2 \omega_2 (X_{N+2} - X_{N+1}) \\ &\quad - \alpha_1 \omega_1^2 X_1 + \alpha_2 \rho_2 \omega_2^2 (X_2 - X_1) \\ &\quad - (1 - \alpha_1) \omega_1^2 X_{2N+1} + (1 - \alpha_2) \rho_2 \omega_2^2 X_{2N+2} \\ &\quad - \ddot{x}_g + \frac{F_1}{m_1} \\ &\vdots \\ \dot{X}_{2N} &= -2\xi_N \omega_N (X_{2N} - X_{2N-1}) - \alpha_N \omega_N^2 (X_N - X_{N-1}) \end{aligned} \right\}$$

図2 パラメータ変化による各種の非線形復元力特性

$$\left. \begin{aligned} & -(1-\alpha_N)\omega_N^2 X_{3N} - \ddot{x}_g + \frac{F_M}{m_N} \\ & \dot{X}_{2N+1} = A_1 X_{N+1} - \beta_1 |X_{N+1}| |X_{2N+1}|^{n_1-1} X_{2N+1} \\ & \quad - \gamma_1 X_{N+1} |X_{2N+1}|^{n_1} \\ & \quad \vdots \\ & \dot{X}_{3N} = A_N (X_{2N} - X_{2N-1}) \\ & \quad - \beta_N |X_{2N} - X_{2N-1}| |X_{3N}|^{n_N-1} X_{3N} \\ & \quad - \gamma_N (X_{2N} - X_{2N-1}) |X_{3N}|^{n_N-1} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

ただし,

$$k_i/m_i = \omega_i^2, C_i/m_i = 2\xi_i \omega_i, m_{i+1}/m_i = \rho_{i+1}$$

となるので, 式(5)において $\ddot{x}_g$ および F_i を確率過程と考えれば, 式(5)は $(X_1, \dots, X_{3N})$ を状態確率変数とする確率微分方程式となる。

式(5)における $\ddot{x}_g$ および $F_1 \sim F_M$ は互いに独立な定常確率過程とし, 次のように仮定する。

$$\ddot{x}_g = w_g(t) \dots\dots\dots (6)$$

$$F_i(t)/m_i = b_i w_i(t) (i=1, \dots, M) \dots\dots\dots (7)$$

ここで b_i は構造物に作用する荷重パターンを規定するための確定定数である。また $w_g(t)$ は, 次の特性を有する正規性ホワイトノイズとする。

$$\left. \begin{aligned} E[w_g(t)] &= 0 \\ E[w_g(t)w_g(t+\tau)] &= 2\pi S_{og}\delta(\tau) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

ここで,

$E[\cdot]$: アンサンブル平均

S_{og} : $w_g(t)$ のパワースペクトル強度

$\delta(\tau)$: デルタ関数

式(7)の $w_1(t) \sim w_M(t)$ も独立した確率過程ではあるが, 次のようにそのパワースペクトル強度はすべて等しい正規性ホワイトノイズであるものと仮定する。

$$\left. \begin{aligned} E[w_i(t)] &= 0 \\ E[w_i(t)w_i(t+\tau)] &= 2\pi S_{og}\delta(\tau) (i=1, \dots, M) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

式(5)において $\ddot{x}_g$ および $F_i (i=1, \dots, M)$ は互いに独立したホワイトノイズであるから, この時, 状態確率変数 $X = (X_1, \dots, X_{3N})^T$ はマルコフベクトル成分と考えられ, その推移確率密度は Fokker-Planck 方程式を満足する。ここで初期条件が確率1でわかっているとした場合には, システムの確率密度関数 $P_{(x)}(X^T)$ が満たすべき関係式が自動的に得られる。ここでは最も標準的な非線形パラメータ $n_k=1$ のケースについて具体的な関係式を以下のように導出した。

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial t} = & - \sum_{k=1}^N X_{N+k} \frac{\partial P}{\partial X_k} - \sum_{k=1}^N \left[-2\xi_k \omega_k P - 2\xi_k \omega_k X_{N+k} \frac{\partial P}{\partial X_{N+k}} + 2\xi_k \omega_k X_{N+k-1} \frac{\partial P}{\partial X_{N+k}} \right. \\ & + 2\rho_{k+1} \xi_{k+1} \omega_{k+1} X_{N+k+1} \frac{\partial P}{\partial X_{N+k}} - 2\rho_{k+1} \xi_{k+1} \omega_{k+1} P - 2\rho_{k+1} \xi_{k+1} \omega_{k+1} X_{N+k} \frac{\partial P}{\partial X_{N+k}} \\ & - \alpha_k \omega_k^2 (X_k - X_{k-1}) \frac{\partial P}{\partial X_{N+k}} + \alpha_{k+1} \rho_{k+1} \omega_{k+1}^2 (X_{k+1} - X_k) \frac{\partial P}{\partial X_{N+k}} - (1-\alpha_k) \omega_k^2 X_{2N+k} \frac{\partial P}{\partial X_{N+k}} \\ & \left. - (1-\alpha_{k+1}) \rho_{k+1} \omega_{k+1}^2 X_{2N+k+1} \frac{\partial P}{\partial X_{N+k}} \right] - \sum_{k=1}^N \left[A_k (X_{N+k} - X_{N+k-1}) \frac{\partial P}{\partial X_{2N+k}} \right. \\ & \left. - \beta_k |X_{N+k} - X_{N+k-1}| \frac{\partial}{\partial X_{2N+k}} (X_{2N+k} P) - \gamma_k (X_{N+k} - X_{N+k-1}) \frac{\partial}{\partial X_{2N+k}} (|X_{2N+k}| P) \right] \\ & + \pi \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N (S_{og} + S_{of} b_k^2) \frac{\partial^2 P}{\partial X_{N+k} \partial X_{N+l}} \dots\dots\dots (10) \end{aligned}$$

さらに式(10)における $|X_{N+k} - X_{N+k-1}|$, $|X_{2N+k}|$ の項を次のように近似化する。

$$|X_{N+k} - X_{N+k-1}| \approx a_{1k} (X_{N+k} - X_{N+k-1})^2 \dots\dots\dots (11)$$

$$|X_{2N+k}| \approx a_{2k} X_{2N+k}^2 \dots\dots\dots (12)$$

ここで a_{1k} , a_{2k} は近似化による統計的な二乗平均誤差が最小になるように決定する。すなわち

$$\frac{\partial}{\partial a_{1k}} E[(|X_{N+k} - X_{N+k-1}| - a_{1k} (X_{N+k} - X_{N+k-1})^2]^2] = 0 \dots\dots\dots (13)$$

$$\frac{\partial}{\partial a_{2k}} E[(|X_{2N+k}| - a_{2k} X_{2N+k}^2]^2] = 0 \dots\dots\dots (14)$$

を満たすように a_{1k} , a_{2k} を求める。

式(11)(12)両式を代入した式(10)を利用して $X_1, \dots, X_{3N}$ に関する2次モーメントまでの式(式総数 $3NH_2 = 3N(3N+1)/2$)を導くと以下ようになる。ただし導出の方法は文献(2)に従った。

$$\frac{\partial}{\partial t} E[X_k^2] = 2E[X_k X_{N+k}] \quad \dots\dots\dots (15)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} E[X_k X_l] = E[X_l X_{N+k}] + E[X_k X_{N+l}] \quad \dots\dots\dots (16)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} E[X_{N+k}^2] = & -4\xi_k \omega_k E[X_{N+k}^2] + 4\xi_k \omega_k E[X_{N+k-1} X_{N+k}] + 4\rho_{k+1} \xi_{k+1} \omega_{k+1} E[X_{N+k} X_{N+k+1}] \\ & - 4\rho_{k+1} \xi_{k+1} \omega_{k+1} E[X_{N+k}^2] \\ & - 2\alpha_k \omega_k^2 E[X_k X_{N+k}] + 2\alpha_k \omega_k^2 E[X_{k-1} X_{N+k}] + 2\alpha_{k+1} \rho_{k+1} \omega_{k+1}^2 E[X_{k+1} X_{N+k}] \\ & - 2\alpha_{k+1} \rho_{k+1} \omega_{k+1}^2 E[X_k X_{N+k}] - 2(1-\alpha_k) \omega_k^2 E[X_{N+k} X_{2N+k}] + 2(1-\alpha_{k+1}) \rho_{k+1} \omega_{k+1}^2 E[X_{N+k} X_{2N+k+1}] \\ & + 2\pi(S_{og} + S_{of} b_k^2) \quad \dots\dots\dots (17) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} E[X_{N+k} X_{N+l}] = & -2\xi_k \omega_k E[X_{N+k} X_{N+l}] - 2\xi_l \omega_l E[X_{N+k} X_{N+l}] \\ & + 2\xi_k \omega_k E[X_{N+k-1} X_{N+l}] + 2\xi_l \omega_l E[X_{N+l-1} X_{N+k}] \\ & + 2\rho_{k+1} \xi_{k+1} \omega_{k+1} E[X_{N+k+1} X_{N+l}] + 2\rho_{l+1} \xi_{l+1} \omega_{l+1} E[X_{N+k} X_{N+l+1}] \\ & - 2\rho_{k+1} \xi_{k+1} \omega_{k+1} E[X_{N+k} X_{N+l}] - 2\rho_{l+1} \xi_{l+1} \omega_{l+1} E[X_{N+k} X_{N+l}] - \alpha_k \omega_k^2 E[X_k X_{N+l}] \\ & + \alpha_k \omega_k^2 E[X_{k-1} X_{N+l}] \\ & - \alpha_l \omega_l^2 E[X_l X_{N+k}] + \alpha_l \omega_l^2 E[X_{l-1} X_{N+k}] + \alpha_{k+1} \rho_{k+1} \omega_{k+1}^2 E[X_{k+1} X_{N+l}] - \alpha_{k+1} \rho_{k+1} \omega_{k+1}^2 E[X_k X_{N+l}] \\ & + \alpha_{l+1} \rho_{l+1} \omega_{l+1}^2 E[X_{l+1} X_{N+k}] - \alpha_{l+1} \rho_{l+1} \omega_{l+1}^2 E[X_l X_{N+k}] - (1-\alpha_k) \omega_k^2 E[X_{N+k} X_{2N+k}] \\ & - (1-\alpha_l) \omega_l^2 E[X_{N+k} X_{2N+l}] + (1-\alpha_{k+1}) \rho_{k+1} \omega_{k+1}^2 E[X_{N+k} X_{2N+k+1}] + (1-\alpha_{l+1}) \rho_{l+1} \omega_{l+1}^2 E[X_{N+k} X_{2N+l+1}] \\ & + 2\pi S_{og} \quad \dots\dots\dots (18) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} E[X_{2N+k}^2] = & 2A_k E[X_{N+k} X_{2N+k}] - 2A_k E[X_{N+k-1} X_{2N+k}] - 2\beta_k a_{1k} E[X_{N+k}^2 X_{2N+k}^2] \\ & + 4\beta_k a_{1k} E[X_{N+k-1} X_{N+k} X_{2N+k}^2] - 2\beta_k a_{1k} E[X_{N+k-1}^2 X_{2N+k}^2] - 2\gamma_k a_{2k} E[X_{N+k} X_{2N+k}^3] \\ & + 2\gamma_k a_{2k} E[X_{N+k-1} X_{2N+k}^3] \quad \dots\dots\dots (19) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} E[X_{2N+k} X_{2N+l}] = & A_k E[X_{N+k} X_{2N+l}] - A_k E[X_{N+k-1} X_{2N+l}] + A_l E[X_{N+l} X_{2N+k}] - A_l E[X_{N+l-1} X_{2N+k}] \\ & - \beta_k a_{1k} E[X_{N+k}^2 X_{2N+k} X_{2N+l}] + 2\beta_k a_{1k} E[X_{N+k-1} X_{N+k} X_{2N+k} X_{2N+l}] \\ & - \beta_k a_{1k} E[X_{N+k-1}^2 X_{2N+k} X_{2N+l}] - \beta_l a_{1l} E[X_{N+l}^2 X_{2N+k} X_{2N+l}] + 2\beta_l a_{1l} E[X_{N+l-1} X_{N+l} X_{2N+k} X_{2N+l}] \\ & - \beta_l a_{1l} E[X_{N+l-1}^2 X_{2N+k} X_{2N+l}] - \gamma_k a_{2k} E[X_{N+k} X_{2N+k}^2 X_{2N+l}] + \gamma_k a_{2k} E[X_{N+k-1} X_{2N+k}^2 X_{2N+l}] \\ & - \gamma_l a_{2l} E[X_{N+l} X_{2N+k} X_{2N+l}^2] + \gamma_l a_{2l} E[X_{N+l-1} X_{2N+k} X_{2N+l}^2] \quad \dots\dots\dots (20) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} E[X_k X_{N+l}] = & E[X_{N+k} X_{N+l}] - 2\xi_l \omega_l E[X_k X_{N+l}] + 2\xi_l \omega_l E[X_k X_{N+l-1}] + 2\rho_{l+1} \xi_{l+1} \omega_{l+1} E[X_k X_{N+l+1}] \\ & - 2\rho_{l+1} \xi_{l+1} \omega_{l+1} E[X_k X_{N+l}] - \alpha_l \omega_l^2 E[X_k X_l] + \alpha_l \omega_l^2 E[X_k X_{l-1}] + \alpha_{l+1} \rho_{l+1} \omega_{l+1}^2 E[X_k X_{l+1}] \\ & - \alpha_{l+1} \rho_{l+1} \omega_{l+1}^2 E[X_k X_l] - (1-\alpha_l) \omega_l^2 E[X_k X_{2N+l}] + (1-\alpha_{l+1}) \rho_{l+1} \omega_{l+1}^2 E[X_k X_{2N+l+1}] \quad \dots\dots\dots (21) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} E[X_{N+k} X_{2N+l}] = & -2\xi_k \omega_k E[X_{N+k} X_{2N+l}] + 2\xi_k \omega_k E[X_{N+k-1} X_{2N+l}] + 2\rho_{k+1} \xi_{k+1} \omega_{k+1} E[X_{N+k+1} X_{2N+l}] \\ & - 2\rho_{k+1} \xi_{k+1} \omega_{k+1} E[X_{N+k} X_{2N+l}] - \alpha_k \omega_k^2 E[X_k X_{2N+l}] + \alpha_k \omega_k^2 E[X_{k-1} X_{2N+l}] + \alpha_{k+1} \rho_{k+1} \omega_{k+1}^2 E[X_{k+1} X_{2N+l}] \\ & - \alpha_{k+1} \rho_{k+1} \omega_{k+1}^2 E[X_k X_{2N+l}] - (1-\alpha_k) \omega_k^2 E[X_{2N+k} X_{2N+l}] + (1-\alpha_{k+1}) \rho_{k+1} \omega_{k+1}^2 E[X_{2N+k} X_{2N+l+1}] \\ & + A_l E[X_{N+k} X_{N+l}] - A_l E[X_{N+k} X_{N+l-1}] - \beta_l a_{1l} E[X_{N+k} X_{N+l}^2 X_{2N+l}] + 2\beta_l a_{1l} E[X_{N+k} X_{N+l} X_{N+l-1} X_{2N+l}] \\ & - \beta_l a_{1l} E[X_{N+k} X_{N+l-1}^2 X_{2N+l}] - \gamma_l a_{2l} E[X_{N+k} X_{N+l} X_{2N+l}^2] + \gamma_l a_{2l} E[X_{N+k} X_{N+l-1} X_{2N+l}^2] \quad \dots\dots\dots (22) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} E[X_k X_{2N+l}] = & E[X_{N+k} X_{2N+l}] + A_l E[X_k X_{N+l}] - A_l E[X_k X_{N+l-1}] - \beta_l a_{1l} E[X_k X_{N+l}^2 X_{2N+l}] \\ & + 2\beta_l a_{1l} E[X_k X_{N+l} X_{N+l-1} X_{2N+l}] - \beta_l a_{2l} E[X_k X_{N+l-1}^2 X_{2N+l}] - \gamma_l a_{2l} E[X_k X_{N+l} X_{2N+l}^2] \\ & + \gamma_l a_{2l} E[X_k X_{N+l-1} X_{2N+l}^2] \quad \dots\dots\dots (23) \end{aligned}$$

2・4 キュムラント打ち切り手法 式(15)～(23)

が求めるべきモーメント方程式群であるが、これらには高次モーメントを含むため閉じた方程式群とはならない。このため発生している高次モーメントを低次モーメントのみで表現する近似化が必要となるが、本論

文ではこの近似化にキュムラント打ち切り手法を採用する。本手法は、その近似精度がすでに Wilcox ら⁽³⁾により確認されており、さらに方程式の形に依存することなくはん用性がありまた求解精度も必要に応じて選択できることから、近年本手法を利用して非線形不

規則振動解析を実施する例が増加している^{(2)(4)~(7)}。以下に本手法の概要を述べる。

n 次元結合確率密度関数に対する特性関数は、

$$M_{x_1 x_2 \dots x_n}(\theta_1, \dots, \theta_n) = E\{\exp[i(\theta_1 X_1 + \dots + \theta_n X_n)]\} = \int \dots \int \exp[i(\theta_1 x_1 + \dots + \theta_n x_n)] \times P(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \dots (24)$$

でありこの時の $(m_1 + \dots + m_n)$ 次のキュムラントは次のように表される。

$$x_{m_1 + \dots + m_n}[X_1 \dots X_n] = \frac{1}{i^{m_1 + \dots + m_n}} \times \left(\frac{\partial^{m_1 + \dots + m_n}}{\partial \theta_1^{m_1} \dots \partial \theta_n^{m_n}} \ln M_{x_1 \dots x_n} \right)_{\theta_1 = \theta_2 = \dots = 0} \dots (25)$$

式(25)よりキュムラントは対数特性関数の展開時における係数と関係した量であると考えることができ、これの高次の値を零とすることにより高次モーメントを低次モーメントで近似しようとするのがキュムラント打ち切り法である。

具体的に示すため式(19)(20)および式(22)(23)で現れる4次モーメントの近似化について述べる。すなわち4次のキュムラント x_4 は、応答の平均値が0であることを仮定した場合、

$$x_4[X_i X_j X_k X_l] = E[X_i X_j X_k X_l] - E[X_i X_j]E[X_k X_l] - E[X_i X_k]E[X_j X_l] - E[X_i X_l]E[X_j X_k] \dots (26)$$

となるので、4次のキュムラント x_4 を0とすることにより、

$$E[X_i X_j X_k X_l] = E[X_i X_j]E[X_k X_l] + E[X_i X_k]E[X_j X_l] + E[X_i X_l]E[X_j X_k] \dots (27)$$

が得られる。ここに4次の高次モーメントが低次のモーメントのみで表現されたことになる。ゆえに式(27)を式(19)(20)および式(22)(23)に代入することにより閉じたモーメント方程式群が得られる。さらに本論文では定常応答を求めることに限定すれば、この時の対象となるモーメント方程式は、式(15)~(23)において各式の左辺を0としたものに相当するので、これらを数値計算することで定常応答モーメント量を求めることができる。

2.5 信頼性評価のために必要となる応答量 本論文では対象としないが、得られる応答モーメント量を用いて将来信頼性評価を行おうとする時には、すでに得られている応答モーメント以外の量が必要となる場合がある。すなわち、信頼性あるいは安全性の面から考えた時、ア) maintainability あるいは serviceability などから、ある質点の基部からの最大変位量が問題となる場合(変位制限タイプ)と、イ) 構造強度上から隣接する2質点間の相対変位量が問題となる場合(強度制限タイプ)がある。このうちアのケースは、状態変数を y (すなわち基部からの変位)に関してとっているので問題ないが、イ)については層間変位 u_k および層間速度 $\dot{u}_k$ に関する分散値がさらに必要となる。この値は $u_k = y_k - y_{k-1}$ であること、および定常応答の場合には式(15)(16)の右辺が0に等しいことを考慮することにより以下のように容易に求められる。

$$E[u_k^2] = E[y_k^2] + E[y_{k-1}^2] - 2E[y_{k-1}y_k] \dots (28)$$

$$E[\dot{u}_k^2] = E[\dot{y}_k^2] + E[\dot{y}_{k-1}^2] - 2E[\dot{y}_{k-1}\dot{y}_k] \dots (29)$$

$$E[u_k \dot{u}_k] = 0 \dots (30)$$

図3 入力パワースペクトル強度と応答モーメント量の関係(相対変位 y_k の場合)

図4 入力パワースペクトル強度と応答モーメント量の関係(層間変位 u_k の場合)

3. 数 値 計 算 例

図1のモデルにおいて質点数3個、作用する一般外力3個とした場合について数値計算を行った。この時の使用した履歴モデルにおける諸定数および構造の振動特性を示す定数は以下のとおりである。

$$A_1 = A_2 = A_3 = 1.0$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0.05$$

$$\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0.75$$

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 0.47$$

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 70.0(\text{rad/s})$$

$$\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0.01$$

$$\rho_2 = \rho_3 = 1.0$$

求められた応答モーメントの一部を $S_{og}(=S_{of})$ の関数として示したものが図3, 4である。多質点系の場合には既述のごとく信頼性評価関連で変位制限タイプと強度制限タイプが考えられるため、これに対応して図3には基部に対する相対変位量 y_k に関する応答モーメントを、一方図4には質点間の層間変位量 u_k に関するものを示している。ところで図3および図4には理論解析と同時に200波の模擬入力波を用いたモンテカルロ法による数値実験結果もプロットしているが両者は良く一致しており、これにより解析手法の妥当性は確認できたものと考ええる。

4. ま と め

ヒステリシス特性で代表される非線形多自由度構造物の不規則応答評価を、Fokker-Planck 法を利用し

て行った。本論文での実施内容をまとめれば以下のとおりである。

(1) Fokker-Planck 法の応用例として非線形多自由度系の不規則振動問題を取り上げこれの定式化を行った。Fokker-Planck 法を用いて応答量に関するモーメント方程式を求める際には、系が非線形の場合通常高次モーメントを式中含む場合が多くこれの処理が重要課題となる。そこで本論文ではキュムラント打ち切り手法を Fokker-Planck 法に援用することにより種々の非線形系に適用できるはん用性の高い方法を示した。

(2) 開発した解析手法の有用性を検討するため、具体例として複数の不規則外乱を受ける3自由度ヒステリシス構造物を取り上げ、これに対する理論解析とモンテカルロシミュレーションによる数値実験結果とを比較することにより、解析手法の妥当性を確認した。

文 献

- (1) Wen, Y. K., *J. Am. Soc. Civil Eng.*, EM2, 102 (1976), 249.
- (2) 持尾, 機論, 49-445, C (1983), 1455.
- (3) Wilcox, R. M. and Bellman, R., *J. Math. Anal. Appl.*, 32 (1970), 532.
- (4) Wu, W. F. and Lin, Y. K., *Int. J. Non-Linear Mech.*, 19-4 (1984), 349.
- (5) Ibrahim, R. A., ほか2名, *J. Appl. Mech.*, 52 (1985), 965.
- (6) Sun, J. Q. and Hsu, C. S., *J. Appl. Mech.*, 54 (1987), 649.
- (7) Soundararajan, A. and Ibrahim, R. A., *J. Sound Vib.*, 121-3 (1988), 445.