ねじり波動を受ける任意曲率を有する不均質屈曲棒と無限真直棒の 接合系における動的応力集中*

樫本 弘^{*1}, 長屋 幸助^{*2}, 白石 明男^{*1}

Dynamic Stress Concentration in an Arbitrary Curved and Inhomogeneous Rod Joined With Infinite Straight Rods Excited by Twisting Waves

Hiroshi KASHIMOTO, Kosuke NAGAYA and Akio SHIRAISHI

An analysis is presented for the dynamic stress concentration problem of an infinite inhomogeneous rod having a discontinuity of the curved portion in which the radius of cross sections varies continuously. The rod treated in this study consists of two infinitely straight portions and one finite curved portion of arbitrary curvature. The curved portion lies between the two straight portions. The twisting wave propagates from one of the infinite straight portions to the other, passing through the curved portion. The exact solution for the equilibrium equations for a curved rod has been obtained. The transfer matrix has been derived based on the exact solution and upon considering the internal forces and moments. At discontinuous sections, solutions of curved and straight rods have been connected by adjusting the boundary conditions. As examples, stress concentration factors in circular, elliptical and parabolic arc rods have been obtained.

Key Words: Vibration of Continuous System, Torsional Vibration, Transfer Matrix Method, Stress Concentration, Arbitrary Curvature, Twisting Wave

1. 結 言

重要な機械・構造物の要素として曲線棒は古くから注目され、その振動問題はすでに多くの研究結果が発表されている^{(1)~(5)}。しかし、この種の問題においては棒を有限長とし、棒端部における境界条件を設定して固有振動数やモードを算出しているものが多い^{(6)~(18)}。一方、棒の径に対して十分な長さを有する構造物も実際には存在すると思われるが、この場合には棒端部の影響は減少し、振動が作用した際の運動は波動運動に近くなる。そのため、従来のような定常振動よりも波動運動としての取扱が必要である。棒が円弧曲がりやL形、Z形などの場合⁽¹⁹⁾⁽²⁰⁾には解析が行われていたが、それ以外の形状や、曲率が数値でしか表せない一般曲率についてはまだ解析が行われていないようである。また、不連続部を有する棒中を波動が伝ばする場合には、反射波が発生し、入射波との干渉効果のために動的応力集中が生ずる。

著者らはこれらの系における動的応力集中を工学上の重要な問題と考えており、すでにたわみ波動が作用

する場合の面内波動問題を取上げ、曲率、断面に加えて弾性係数や密度の変化が応力集中に及ぼす影響を調べた⁽²¹⁾⁽²²⁾。しかし、振動源によっては棒にねじり波動が作用する場合も多いと考えられる。そこで本報では、任意曲率の曲がりを有する無限長棒の面外波動問題を取上げ、動的応力集中を理論的に解析したものである。屈曲部の解析には空間曲がりよりの静的釣合い方程式の厳密解から棒要素の格間マトリックスを作成し、各方向の慣性力、慣性モーメントを考慮して格点マトリックスを求め、伝達マトリックス法より各状態量を計算した。また、不連続部で解を接続して、棒の任意位置における応力集中係数を求める方程式を示した。棒の断面形状は円形とし、曲率、断面の半径、弾性係数や密度が中心線に沿って変化する一般平面曲線棒を取上げ、各位置における応力集中係数を算出する方程式を求めた。具体的な計算例として、屈曲部が円弧、だ円、放物線の場合についての応力集中の様相を示した。しかし、棒の中心線が任意の平面曲線で、その曲率が数式もしくは数値で与えられる場合も同様に計算可能である。

2. 解 析

2・1 基礎方程式 本報では屈曲部を有する無限

* 原稿受付 平成4年8月21日。

^{*1} 正員, 群馬工業高等専門学校 (〒371 前橋市鳥羽町580)。

^{*2} 正員, 群馬大学工学部 (〒376 桐生市天神町1-5-1)。

長棒において、その円形断面の中心線が平面曲線となる場合の面外振動を対象とする。座標系は図1に示すように中心線の接線方向を z 軸、主法線方向を x 軸、従法線方向を y 軸とし、 x - y 平面において x 軸から反時計方向の角度を ϕ とする。また、屈曲部を棒2とし、その両接続端 A, B で直線棒と接続している。なお、入射波側を棒1、反対側を棒3とする。

曲線棒の解析方法としては、すでにLove⁽²³⁾や清水・高田⁽²⁴⁾らによって空間曲がりよりの理論を用いた基礎式が公表されている。棒2にこの方程式を適用し、屈曲部の任意位置における断面の力とモーメントの釣合いは次式で表される。

$$\frac{dW}{ds}=0, \frac{dH}{ds}+\kappa T-W=0, \frac{dT}{ds}-\kappa H=0 \quad \dots\dots\dots(1)$$

ここに W は断面力の y 成分、 H, T は断面モーメントの x, z 成分である。 s は中心線に沿った長さ、 κ は中心線の曲率である。

また、断面モーメント H, T および回転角 δ は棒軸変位の y 成分 w 、回転角の z 成分 β を用いて表せば、

$$H=-EI_x\left(\frac{d^2w}{ds^2}-\kappa\beta\right), T=GI_p\left(\frac{d\beta}{ds}+\kappa\frac{dw}{ds}\right) \\ \delta=-\frac{dw}{ds} \quad \dots\dots\dots(2)$$

となる。 E, G は弾性係数、 I_x は x 軸に関する断面二次モーメント、 I_p は z 軸の断面二次極モーメントである。棒2の中心軸まわりの角座標を ϕ 、中心線の曲率半径を R とすれば、

図1 曲線棒の要素の座標関係

$$\frac{ds}{d\phi}=R=\frac{1}{\kappa} \quad \dots\dots\dots(3)$$

の関係が成り立ち、この関係を用いれば、式(1)、(2)は ϕ についての連立微分方程式に変換できる。ここでは解の誘導を割愛するが、 $\{ \}$ を列ベクトルとすれば、状態量ベクトル $X(\phi)$ は、次式ようになる。

$$X(\phi)=\{\bar{w}, \bar{\delta}, \bar{\beta}, \bar{W}, \bar{H}, \bar{T}\}=D(\phi)B \quad \dots\dots\dots(4)$$

B は積分定数の列ベクトル、 $D(\phi)$ は 6×6 の解マトリックスであり、各要素は付録1のとおりである。なお、各状態量は以下のような無次元化を行っている。

$$\left. \begin{aligned} \bar{w} &= \frac{w}{R_0 \Theta}, \bar{\delta} = \frac{\delta}{\Theta}, \bar{\beta} = \frac{\beta}{\Theta} \\ \bar{W} &= \frac{R_0^2}{E_0 I_{y0} \Theta} W, \bar{H} = \frac{R_0}{E_0 I_{y0} \Theta} H, \\ \bar{T} &= \frac{R_0}{E_0 I_{y0} \Theta} T \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(5)$$

R_0 は曲率半径を無次元化するために導入した基準半径、 Θ, I_{y0}, E_0 は基準となる角変位(入射波のねじり振幅)、断面二次モーメント、縦弾性係数である。

2.2 伝達マトリックス 式(4)の解マトリックスより、 i 番めの曲がりよりの要素の格間マトリックス F_i を求めると

$$F_i=[f_{kq}]=D(\phi_i)D(0)^{-1}, (k=1 \cdots 6, q=1 \cdots 6) \quad \dots\dots\dots(6)$$

となり、各要素は付録2に示すとおりである。

なお、基礎式(1)、(2)は曲率・断面一定、均質として厳密解を導いている。本報では、棒2の屈曲部を微小要素に分割し、各要素内では曲率、断面、弾性係数、密度を一定とし、伝達マトリックス法により屈曲部全体の変化を導入して解析を行った。

一方、格点に各要素の質量を集中させ、 y 方向の慣性力、 z 方向の慣性モーメントを考慮すると、 i 番めの格点両側における状態量の関係は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \bar{w}_i^R &= \bar{w}_i^L, \bar{\delta}_i^R = \bar{\delta}_i^L, \bar{\beta}_i^R = \bar{\beta}_i^L \\ \bar{W}_i^R &= \bar{W}_i^L - \bar{m}_i \bar{w}_i^L, \bar{H}_i^R = \bar{H}_i^L, \bar{T}_i^R = \bar{T}_i^L - \bar{J}_{Ti} \bar{\beta}_i^L \\ \bar{m}_i &= \bar{\rho}_i \bar{A}_i \bar{R}_i \phi_i \lambda_{y0}^4 \\ \bar{J}_{Ti} &= \bar{\rho}_i \bar{R}_i \phi_i \frac{I_{xi} + I_{yi}}{I_{y0}} \frac{\lambda_{y0}^4}{S_0^2}, S_0^2 = \frac{A_0 R_0^2}{I_{y0}} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(7)$$

ここで、添字の R, L は質点の右側、左側を示している。また $\bar{\rho}, \bar{A}$ は無次元密度、断面積であり、 I_x, I_y は断面二次モーメント、 λ_{y0} は基準となるたわみ波動の波数である。これをマトリックス表示すれば、格点マトリックス P_i も求まる。

$$P_i=[P_{kq}], (k=1 \cdots 6, q=1 \cdots 6) \quad \dots\dots\dots(8)$$

P_i も 6×6 のマトリックスであり、式(6)、(8)の積が

伝達マトリックスとなる。これを式で表せば以下のとおりである。

$$X_i = T_i X_0, T_i = [E_{kq}] = F_i P_{i-1} F_{i-1} \cdots F_1 P_0 F_0, \\ (k=1 \cdots 6, q=1 \cdots 6) \cdots \cdots (9)$$

2.3 解の接続 棒1, 3を一樣な直線棒とした場合、無次元回転角 $\bar{\delta}$, 断面力 $\bar{W}$, モーメント $\bar{H}$, $\bar{T}$ は棒軸変位 $\bar{w}$, 角変位 $\bar{\beta}$ を用いて表すことができる。棒1中:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\delta}_1 &= -\frac{\partial \bar{w}_1}{\partial z_1}, \bar{W}_1 = -\bar{E}_1 \bar{I}_{x1} \frac{I_{x0}}{I_{y0}} \frac{\partial^3 \bar{w}_1}{\partial z_1^3} \\ \bar{H}_1 &= -\bar{E}_1 \bar{I}_{x1} \frac{I_{x0}}{I_{y0}} \frac{\partial^2 \bar{w}_1}{\partial z_1^2} \\ \bar{T}_1 &= \bar{G}_1 \frac{1}{2(1+\nu_0)} \bar{I}_{p1} \frac{I_{p0}}{I_{y0}} \frac{\partial \bar{\beta}_1}{\partial z_1} \end{aligned} \right\} \cdots (10)$$

棒3中:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\delta}_3 &= -\frac{\partial \bar{w}_3}{\partial z_3}, \bar{W}_3 = -\bar{E}_3 \bar{I}_{x3} \frac{I_{x0}}{I_{y0}} \frac{\partial^3 \bar{w}_3}{\partial z_3^3} \\ \bar{H}_3 &= -\bar{E}_3 \bar{I}_{x3} \frac{I_{x0}}{I_{y0}} \frac{\partial^2 \bar{w}_3}{\partial z_3^2} \\ \bar{T}_3 &= \bar{G}_3 \frac{1}{2(1+\nu_0)} \bar{I}_{p3} \frac{I_{p0}}{I_{y0}} \frac{\partial \bar{\beta}_3}{\partial z_3} \end{aligned} \right\} \cdots (11)$$

なお、基準となる縦弾性係数 E_0 , 横弾性係数 G_0 , 断面二次モーメント I_{x0} , 断面二次極モーメント I_{p0} を用いて、次式のとおりの無次元化を行っている。

$$\left. \begin{aligned} \bar{E}_1 &= \frac{E_1}{E_0}, \bar{G}_1 = \frac{G_1}{G_0}, \bar{I}_{x1} = \frac{I_{x1}}{I_{x0}}, \bar{I}_{p1} = \frac{I_{p1}}{I_{p0}} \\ \bar{E}_3 &= \frac{E_3}{E_0}, \bar{G}_3 = \frac{G_3}{G_0}, \bar{I}_{x3} = \frac{I_{x3}}{I_{x0}}, \bar{I}_{p3} = \frac{I_{p3}}{I_{p0}} \end{aligned} \right\} \cdots \cdots (12)$$

また、 ν_0 は基準となるポアソン比であり、 E_0, G_0 より求まる。 z は直線棒中での座標であり、基準半径 R_0 で無次元化している。また、両接続端 A, B をそれぞれの原点としている。

次に、入射波として棒1中を $-\infty$ から原点方向に進行するねじり波動 β_{in} を考慮する。 γ_1 を棒1中のねじり波動の波数、 ω を円振動数、 t を時間として入射波は次式で表される。

$$\beta_{in} = \frac{\beta_{in}}{\Theta} = e^{i(\gamma_1 \bar{z}_1 - \omega t)} \cdots \cdots (13)$$

以上より、直線棒中の変位 $\bar{w}$, 角変位 $\bar{\beta}$ は以下のように表される。

棒1中:

$$\left. \begin{aligned} \bar{w}_1 &= (a_2 e^{-i\lambda_{x1} \bar{z}_1} + a_3 e^{\lambda_{x1} \bar{z}_1}) e^{-i\omega t} \\ \bar{\beta}_1 &= (b_1 e^{i\gamma_1 \bar{z}_1} + b_2 e^{-i\gamma_1 \bar{z}_1}) e^{-i\omega t} \\ \lambda_{x1}^4 &= \frac{\bar{\rho}_1 \bar{A}_1}{\bar{E}_1 \bar{I}_{x1}} \frac{I_{y0}}{I_{x0}} \lambda_{y0}^4, \gamma_1^2 = 2(1+\nu_0) \frac{\bar{\rho}_1}{\bar{G}_1} \frac{\lambda_{y0}^4}{S_0^2} \end{aligned} \right\} \cdots \cdots (14)$$

棒3中:

$$\left. \begin{aligned} \bar{w}_3 &= (a_1 e^{i\lambda_{x3} \bar{z}_3} + a_4 e^{-\lambda_{x3} \bar{z}_3}) e^{-i\omega t} \\ \bar{\beta}_3 &= b_1 e^{i\gamma_3 \bar{z}_3} e^{-i\omega t} \\ \lambda_{x3}^4 &= \frac{\bar{\rho}_3 \bar{A}_3}{\bar{E}_3 \bar{I}_{x3}} \frac{I_{y0}}{I_{x0}} \lambda_{y0}^4, \gamma_3^2 = 2(1+\nu_0) \frac{\bar{\rho}_3}{\bar{G}_3} \frac{\lambda_{y0}^4}{S_0^2} \end{aligned} \right\} \cdots \cdots (15)$$

ここに、 $a_1 \sim a_4, b_1, b_2$ は未定係数である。また、基準となる密度 ρ_0 , 断面積 A_0 を用いて、次式のとおりの無次元化を行っている。

$$\bar{\rho}_1 = \frac{\rho_1}{\rho_0}, \bar{\rho}_3 = \frac{\rho_3}{\rho_0}, \bar{A}_1 = \frac{A_1}{A_0}, \bar{A}_3 = \frac{A_3}{A_0} \cdots \cdots (16)$$

未定係数は両接続端での解を接続することにより計算できる。まず、棒2をO点からN点まで分割したとすれば

O点 ($\bar{z}_1=0$) における境界条件は

$$\left. \begin{aligned} \bar{w}_1(0) &= \bar{w}_0^R, \bar{\delta}_1(0) = \bar{\delta}_0^R, \bar{\beta}_1(0) = \bar{\beta}_0^R \\ \bar{W}_1(0) &= \bar{W}_0^R, \bar{H}_1(0) = \bar{H}_0^R, \bar{T}_1(0) = \bar{T}_0^R \end{aligned} \right\} \cdots (17)$$

N点 ($\bar{z}_3=0$) における境界条件は

$$\left. \begin{aligned} \bar{w}_3(0) &= \bar{w}_N^L, \bar{\delta}_3(0) = \bar{\delta}_N^L, \bar{\beta}_3(0) = \bar{\beta}_N^L \\ \bar{W}_3(0) &= \bar{W}_N^L, \bar{H}_3(0) = \bar{H}_N^L, \bar{T}_3(0) = \bar{T}_N^L \end{aligned} \right\} \cdots (18)$$

となる。式(14), (15)を式(17), (18)に代入して各状態量を求め、伝達マトリックスを乗算すると次の関係が求まる。

$$\begin{bmatrix} \bar{w} \\ \bar{\delta} \\ \bar{\beta} \\ \bar{W} \\ \bar{H} \\ \bar{T} \end{bmatrix}_L = [F_N P_{N-1} F_{N-1} \cdots P_0 F_0] \begin{bmatrix} \bar{w} \\ \bar{\delta} \\ \bar{\beta} \\ \bar{W} \\ \bar{H} \\ \bar{T} \end{bmatrix}_R \cdots \cdots (19)$$

この式(19)の両辺には未定係数 $a_1 \sim a_4, b_1, b_2$ を含んでおり、これらは数値的に求めることが可能である。得られた未定係数 $a_1 \sim a_4, b_1, b_2$ を式(14), (15)に代入し、式(10), (11)を利用すれば直線棒中の状態量が計算可能である。また、式(9)を利用すれば屈曲部中の i 点における状態量が計算できる。

2.4 棒中の応力 棒の各位置には①曲げモーメント H による垂直応力 σ_x ②ねじりモーメント T によるせん断応力 τ_t ③せん断力 W によるせん断力 τ_s が生ずる。棒1, 3は円形断面の真直棒なので式(14), (15)の棒軸変位, 角変位から各応力を計算することができる。作用する応力の方向, 面を添字で表すと、以下のようになる。

棒 1 中:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z &= -E_0 \Theta \bar{r}_1 \lambda_{y0}^2 \bar{E}_1 \left(\frac{\bar{\rho}_1 \bar{A}_1}{\bar{E}_1 \bar{I}_{x1}} \right)^{1/2} \frac{\eta_y}{r_1} (-a_2 e^{-i\lambda_{x1} \bar{z}_1} + a_3 e^{\lambda_{x1} \bar{z}_1}) \\ \tau_{tzz} &= -E_0 \Theta \bar{r}_1 \lambda_{y0}^2 \frac{1}{S_0} \left\{ \frac{\bar{\rho}_1 \bar{G}_1}{2(1+\nu_0)} \right\}^{1/2} \frac{\eta_y}{r_1} (ie^{i\gamma_1 \bar{z}_1} - ib_2 e^{-i\gamma_1 \bar{z}_1}) \\ \tau_{tzy} &= E_0 \Theta \bar{r}_1 \lambda_{y0}^2 \frac{1}{S_0} \left\{ \frac{\bar{\rho}_1 \bar{G}_1}{2(1+\nu_0)} \right\}^{1/2} \frac{\eta_x}{r_1} (ie^{i\gamma_1 \bar{z}_1} - ib_2 e^{-i\gamma_1 \bar{z}_1}) \\ \tau_{szz} &= E_0 \Theta \bar{r}_1 \lambda_{y0}^2 \frac{\bar{r}_1}{3} \bar{E}_1 \left(\frac{\bar{\rho}_1 \bar{A}_1}{\bar{E}_1 \bar{I}_{x1}} \right)^{3/4} \lambda_{y0} \frac{\eta_x}{r_1} \frac{\eta_y}{r_1} (ia_2 e^{-i\lambda_{x1} \bar{z}_1} + a_3 e^{\lambda_{x1} \bar{z}_1}) \\ \tau_{szy} &= -E_0 \Theta \bar{r}_1 \lambda_{y0}^2 \frac{\bar{r}_1}{3} \bar{E}_1 \left(\frac{\bar{\rho}_1 \bar{A}_1}{\bar{E}_1 \bar{I}_{x1}} \right)^{3/4} \lambda_{y0} \left\{ 1 - \left(\frac{\eta_y}{r_1} \right)^2 \right\} (ia_2 e^{-i\lambda_{x1} \bar{z}_1} + a_3 e^{\lambda_{x1} \bar{z}_1}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (20)$$

棒 3 中:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z &= -E_0 \Theta \bar{r}_1 \lambda_{y0}^2 \frac{\bar{r}_3}{r_1} \bar{E}_3 \left(\frac{\bar{\rho}_3 \bar{A}_3}{\bar{E}_3 \bar{I}_{x3}} \right)^{1/2} \frac{\eta_y}{r_3} (-a_1 e^{i\lambda_{x3} \bar{z}_3} + a_4 e^{-\lambda_{x3} \bar{z}_3}) \\ \tau_{tzz} &= -E_0 \Theta \bar{r}_1 \lambda_{y0}^2 \frac{\bar{r}_3}{r_1} \frac{1}{S_0} \left\{ \frac{\bar{\rho}_3 \bar{G}_3}{2(1+\nu_0)} \right\}^{1/2} \frac{\eta_y}{r_3} ib_1 e^{i\gamma_3 \bar{z}_3} \\ \tau_{tzx} &= E_0 \Theta \bar{r}_1 \lambda_{y0}^2 \frac{\bar{r}_3}{r_1} \frac{1}{S_0} \left\{ \frac{\bar{\rho}_3 \bar{G}_3}{2(1+\nu_0)} \right\}^{1/2} \frac{\eta_x}{r_3} ib_1 e^{i\gamma_3 \bar{z}_3} \\ \tau_{szz} &= E_0 \Theta \bar{r}_1 \lambda_{y0}^2 \frac{\bar{r}_3}{r_1} \frac{\bar{r}_3}{3} \bar{E}_3 \left(\frac{\bar{\rho}_3 \bar{A}_3}{\bar{E}_3 \bar{I}_{x3}} \right)^{3/4} \lambda_{y0} \frac{\eta_x}{r_3} \frac{\eta_y}{r_3} (-ia_1 e^{i\lambda_{x3} \bar{z}_3} - a_4 e^{-i\lambda_{x3} \bar{z}_3}) \\ \tau_{szy} &= -E_0 \Theta \bar{r}_1 \lambda_{y0}^2 \frac{\bar{r}_3}{r_1} \frac{\bar{r}_3}{3} \bar{E}_3 \left(\frac{\bar{\rho}_3 \bar{A}_3}{\bar{E}_3 \bar{I}_{x3}} \right)^{3/4} \lambda_{y0} \left\{ 1 - \left(\frac{\eta_y}{r_3} \right)^2 \right\} (-ia_1 e^{i\lambda_{x3} \bar{z}_3} - a_4 e^{-i\lambda_{x3} \bar{z}_3}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (21)$$

r は各棒の半径であり, $\bar{r}$ は R_0 で無次元化したものである. また, η_x, η_y は応力を求めたい位置の断面中心からの x, y 方向距離である.

次に棒 2 中では曲がりが存在するため, ねじり中心と重心 (図心) が異なり, T によるせん断応力を計算する場合には, その影響を考慮する必要がある. これについても著者の一人が任意断面に対する取扱いを示している⁽²⁵⁾. 本報の場合は円形断面を対象としているので, 文献(25)の式(48)の二重積分が解析的に計算でき, 補正係数 x' は以下のとおりである.

$$x' = \frac{\sqrt{1-2(\xi/\bar{r}) \cos \zeta + (\xi/\bar{r})^2}}{1 - (\bar{r}/\bar{R}) \cos \zeta} \dots\dots\dots (22)$$

ただし

$$\tan \zeta = \frac{\eta_y}{\eta_x}, \quad \xi = \frac{\bar{r}_2^2/2}{\bar{R} + \sqrt{\bar{R}^2 - \bar{r}_2^2}}$$

棒 2 中の各応力は $\bar{H}, \bar{T}, \bar{W}$ を用いて

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z &= E_0 \Theta \bar{r}_1 \frac{1}{(r_1/r_0)(r_2/r_0)^3} \frac{\eta_y}{r_2} \bar{H} \\ \tau_{tzz} &= -E_0 \Theta \bar{r}_1 \frac{1}{2(r_1/r_0)(r_2/r_0)^3} \frac{\eta_y}{r_2} \bar{T} x' \\ \tau_{tzy} &= E_0 \Theta \bar{r}_1 \frac{1}{2(r_1/r_0)(r_2/r_0)^3} \frac{\eta_x}{r_2} \bar{T} x' \\ \tau_{szz} &= -E_0 \Theta \bar{r}_1 \frac{\bar{r}_2}{3(r_1/r_0)(r_2/r_0)^3} \frac{\eta_x}{r_2} \frac{\eta_y}{r_2} \bar{W} \\ \tau_{szy} &= E_0 \Theta \bar{r}_1 \frac{\bar{r}_2}{3(r_1/r_0)(r_2/r_0)^3} \left\{ 1 - \left(\frac{\eta_y}{r_0} \right)^2 \right\} \bar{W} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (23)$$

となる.

2・5 応力集中係数 ねじりとせん断によるせん断応力の各 x, y 成分を足し合せ, 次のように表す.

$$\tau_{zx} = \tau_{tzz} + \tau_{szz}, \quad \tau_{zy} = \tau_{tzy} + \tau_{szy} \dots\dots\dots (24)$$

主応力を σ とすれば, 弾性学⁽²⁶⁾ より次式に示すとおり係数行列式の値が零になる.

$$\begin{vmatrix} -\sigma & 0 & \tau_{zx} \\ 0 & -\sigma & \tau_{zy} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0 \dots\dots\dots (25)$$

式(25)を展開すれば σ の三次方程式になり, この 3 根が主応力 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ となる. これを求めると,

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_z}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_z}{2} \right)^2 + \tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2}, \quad \sigma_3 = 0 \dots\dots\dots (26)$$

となる. なお, 応力も複素数として扱っているので式(26)中における平方根はそれ自身, 主値と実部, 虚部ともに符号を反転させた値の二つを持つ. ここでは便宜上,

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{\sigma_z}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_z}{2} \right)^2 + \tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2}, \\ \sigma_2 &= \frac{\sigma_z}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_z}{2} \right)^2 + \tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2} \dots\dots\dots (27) \end{aligned}$$

と表示するが, 必ずしも $|\sigma_1| > |\sigma_2|$ とは限らない.

次に主せん断応力は主応力を用いて,

$$\tau_1 = \pm \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}, \quad \tau_2 = \pm \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}, \quad \tau_3 = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \dots\dots\dots (28)$$

のような関係が成り立つので、主せん断応力 $\tau_1 \sim \tau_3$ は

$$\begin{aligned}\tau_1 &= \pm \frac{1}{2} \left\{ \frac{\sigma_z}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2} \right\}, \\ \tau_2 &= \pm \frac{1}{2} \left\{ \frac{\sigma_z}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2} \right\}, \\ \tau_3 &= \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2} \dots\dots\dots (29)\end{aligned}$$

となる。

ところで、入射波によるねじりの最大せん断応力は棒1の棒表面に生じる。これを τ_{1n} とすれば、式(13)より、その大きさは次式で表される。

$$|\tau_{1n}| = E_0 \theta r_1 \lambda_{y0}^2 \frac{1}{S_0} \left\{ \frac{\rho_1 G_1}{2(1+\nu_0)} \right\}^{1/2} \dots\dots\dots (30)$$

棒の任意位置における主応力(27)、主せん断応力(29)をこの $|\tau_{1n}|$ で無次元化を行い、それぞれの応力集中係数と定義し、 $\alpha_{\sigma 1} \sim \alpha_{\sigma 3}$, $\alpha_{\tau 1} \sim \alpha_{\tau 3}$ で表す(ただし、つねに $\alpha_{\sigma 3} = 0$)。

3. 数値計算例

3・1 固有振動数 著者らはすでに同種の系における面内波動問題について解析を行い、屈曲部の解析

表 1 屈曲部の両端を固定した場合の無次元固有振動数の他著者との比較⁽¹⁴⁾ ($S_0=25$, $b/a=0.8165$, $\theta_s=90^\circ$, $\theta_E=270^\circ$, $a/R_0=1.0954$)

Mode	Authors	Suzuki, Osawada & Takahashi
1	1.317	1.317
2	2.253	2.256
3	3.284	3.290
4	4.319	4.328
5	5.069	—
6	5.346	5.326
7	5.979	6.028

図 2 棒の各位置における主応力集中係数(屈曲部:放物線, 断面変化:なし, $a/R_0=1.2666$, $b/a=0.8$, $\theta_s=45^\circ$, $\theta_E=135^\circ$, $S_0=50$, $\lambda_{y0}=8$, 断面位置: $\eta_x=0$, $\eta_y=r_2$)

図 3 棒の各位置における主せん断応力集中係数(屈曲部:放物線, 断面変化:なし, $a/R_0=1.2666$, $b/a=0.8$, $\theta_s=45^\circ$, $\theta_E=135^\circ$, $S_0=50$, $\lambda_{y0}=8$, 断面位置: $\eta_x=0$, $\eta_y=r_2$)

図 4 棒の各位置における主応力集中係数(屈曲部:だ円, 断面変化:なし, $a/R_0=1.2970$, $b/a=0.5$, $\theta_s=0^\circ$, $\theta_E=90^\circ$, $S_0=100$, $\lambda_{y0}=5$, 断面位置: $\eta_x=0$, $\eta_y=r_2$)

図 5 棒の各位置における主せん断応力集中係数(屈曲部:だ円, 断面変化:なし, $a/R_0=1.2970$, $b/a=0.5$, $\theta_s=0^\circ$, $\theta_E=90^\circ$, $S_0=100$, $\lambda_{y0}=5$, 断面位置: $\eta_x=0$, $\eta_y=r_2$)

に伝達マトリックス法が適用できることを示した⁽²¹⁾。今回は面外波動問題にも伝達マトリックス法を利用することの妥当性を検証するため、前報同様に屈曲部の両接続端を固定とし、その無次元固有振動数を算出して他著者との比較を行った。

表1に鈴木・高橋らによるだ円弧棒における厳密解⁽¹⁴⁾との比較を示す。なお、本報とは固有振動数の無次元化が異なるため、代表長さ $R_0 = (a^2 + b^2)^{1/2}/2$ として計算を行った。また、長軸、短軸はそれぞれ $2a, 2b$ である。表1より両結果がよく一致するのが確認でき、面外波動問題にも前報同様に伝達マトリックス法が利用できると考えられる。

3・2 応力集中係数 本解法では棒2の屈曲部形状に解析的な制限を設けていないが、数値計算例とし

て前報と同様に円弧、だ円、放物線の3種類の形状を取上げた。数値計算に必要な無次元曲率半径は文献(22)の式(24)、(25)を用い、 $a/R_0, b/a, \theta_s, \theta_E$ で屈曲部形状を示すものとする。〔文献(22)の図2参照〕

図2～9は縦軸に主応力もしくは主せん断応力集中係数の絶対値、横軸には接続端Aを原点とした棒1～3における位置 Ls を示し、0から1までが棒2になるよう正規化を行っている。なお、前述したように σ_1 と σ_2 との区別は便宜上のものであるが、得られた結果の片方を σ_1 と仮定すれば、式(29)より $\sigma_2, \tau_1 \sim \tau_3$ も自動的に決定される。また、円形断面において $\xi = 90^\circ$ つまり位置の x 成分が零で、 y 成分が最大となる棒断面の真上表面を対象とするとともに、棒2の中心線の無次元長さが $\pi/2$ になるように a/R_0 を調整して

図6 棒の各位置における主応力集中係数(屈曲部：円，断面変化：半径 $1 \rightarrow 0.3$, $a/R_0=1$, $b/a=1$, $\theta_s=0^\circ$, $\theta_E=90^\circ$, $S_0=100$, $\lambda_{y0}=5$, 断面位置： $\eta_x=0$, $\eta_y=r_2$)

図8 棒の各位置における主応力集中係数(屈曲部：円，断面変化：なし， $a/R_0=1$, $b/a=1$, $\theta_s=0^\circ$, $\theta_E=90^\circ$, $S_0=25$, $\lambda_{y0}=5$, 断面位置： $\eta_x=0$, $\eta_y=r_2$)

図7 棒の各位置における主せん断応力集中係数(屈曲部：円，断面変化：半径 $1 \rightarrow 0.3$, $a/R_0=1$, $b/a=1$, $\theta_s=0^\circ$, $\theta_E=90^\circ$, $S_0=25$, $\lambda_{y0}=5$, 断面位置： $\eta_x=0$, $\eta_y=r_2$)

図9 棒の各位置における主せん断応力集中係数(屈曲部：円，断面変化：なし， $a/R_0=1$, $b/a=1$, $\theta_s=0^\circ$, $\theta_E=90^\circ$, $S_0=100$, $\lambda_{y0}=5$, 断面位置： $\eta_x=0$, $\eta_y=r_2$)

いる。

図2, 3は屈曲部形状が放物線で b/a が0.8とした場合である。棒2の中央部で曲率半径が最も大きくなるが、その少し手前で主応力の一方が極大値をとっている。また、干渉の影響で棒1, 3中でも応力の値が変動している。実際には、各位置において最も絶対値の大きいものを基準にして設計計算する必要がある。

図4, 5は屈曲部形状が $b/a=0.5$ のだ円で、接続端Aで曲率半径が最も小さくなるように $\theta_s=0^\circ$, $\theta_E=90^\circ$ とした場合である。明らかに、この $L_s=0$ 付近で応力の集中が大きく、その最大値は主応力では4を越えている。これは入射波がねじり波であっても曲がりの影響でたわみ波動が誘起され、さらに計算した位置が棒断面の真上表面($\zeta=90^\circ$)と、最も中立軸から離れているので応力集中係数が大きな値になったと考えられる。また、棒1側では応力の大きな変動がみられ、波長の違うたわみ波とねじり波の合成が見受けられる。逆に棒3側では、応力の変動はわずかであり、主応力では一方がおおよそ2、残りがほぼ零である。

図6, 7は屈曲部形状が円弧であるが、棒2中で断面の半径を正弦関数的に30%まで減少させた場合である。そのため応力は途中で一度減少した後に増加し、接続端B近傍では主応力、主せん断力の最大値が約5と2.5となり、以後棒3中ではあまり変動していない。

図8, 9では、太線がすべて鋼、細線は屈曲部の棒2のみ材質を鋼($\bar{E}=1$, $\bar{G}=1$, $\bar{\rho}=1$)からアルミニウム($\bar{E}=0.343$, $\bar{G}=0.321$, $\bar{\rho}=0.345$)に変更した場合を示している。主応力は $\alpha_{\sigma 1}$, $\alpha_{\sigma 2}$ の両方を描いているが、

図10 棒断面全周における主応力集中係数(屈曲部:円, 断面変化:なし, $a/R_0=1$, $b/a=1$, $\theta_s=0^\circ$, $\theta_E=90^\circ$, $S_0=25$, $\lambda_{v0}=10$, 位置: $L_s=1/2$)

主せん断応力は棒2中で絶対値が最も大きくなる $\alpha_{\tau 3}$ のみ表している。棒1中ではアルミニウムのほうが大きな値を示している箇所もあるが、屈曲部力の極大値を比較すると、主応力、主せん断力ともに材質をアルミニウムに変更すれば70%程度に応力集中を抑えることが可能である。

図2~9はすべて棒の真上表面における応力集中であったが、図10, 11では棒断面全周における計算結果を示している。図10は棒2の中央($L_s=1/2$)における主応力である。左右対称ではなく、断面内側のほうが大きな値を示している。これは曲がりによってねじり中心と重心がずれたためである。また、 $\alpha_{\sigma 1}$ と $\alpha_{\sigma 2}$ にそれほど大きな差はなく、誘起されるたわみの影響が少ないことがわかる。図11は $L_s=5/8$ と棒2の中央よ

図11 棒断面全周における主せん断応力集中係数(屈曲部:断面変化:なし, $a/R_0=0.6667$, $\theta_s=0^\circ$, $\theta_E=135^\circ$, $S_0=100$, $\lambda_{v0}=5$, 位置: $L_s=5/8$)

図12 棒の各位置における無次元変位(屈曲部:円, 断面変化:なし, $a/R_0=1$, $b/a=1$, $\theta_s=0^\circ$, $\theta_E=90^\circ$, $S_0=25$, $\lambda_{v0}=5$)

り少し棒3寄りの位置における主せん断応力である。

図10と異なり、たわみ波動の影響で α_{r1} と α_{r2} が上下に大きくずれている。一方ねじり中心と重心のずれによる差はわずかである。

3・3 無次元変位* 本報では応力集中係数の算出を主たる目的としている。しかし、屈曲部の解析に伝達マトリックス法を用いているので、無次元変位、角変位も計算途上で同時に求まっている。

図12はその一例であり、棒2の屈曲部形状を1/4円とした場合である。ねじり成分である $\bar{\beta}$ は屈曲部中央付近から入反射波の干渉で大きく変動しているのがわかる。 $\bar{\delta}$, $\bar{w}$ は棒2中で少し変動するとともに棒1, 3中に比べれば少し大きくなっているが、 $\bar{\beta}$ よりははるかに小さい値である。

上述の計算例から次のことがわかった。

(1) 入射波がねじり波動の場合でも、曲がりによってたわみ波動が発生し、両者とせん断を合せた影響が現れる。たわみによる応力集中は中立軸から離れるほど顕著になる。

(2) 同じ真直棒でも、入射波と反射波の干渉が発生する棒1のほうが棒3よりの応力集中の変動が大きい。

(3) たわみ波動が作用する面内波動とは応力集中の様相が異なり複雑である。例えば中心線の曲率半径が大きくなるような位置でも応力集中は極大となる場合がある。

(4) 曲がりの影響でねじり中心と重心にずれが生ずる。そのため棒断面において内側のほうが応力集中は大きくなる。

4. 結 言

本報では円形断面で任意曲率の曲がりを有する不均質な無限長棒のねじり波動問題を取扱い、棒内の応力集中について解析したものである。

(1) 空間曲がりはり理論から求めた厳密解から屈曲部の伝達マトリックスを作成し、境界条件で解の接続を行うことによって棒の任意位置における主応力、主せん断力の応力集中係数の算出法を求めた。

(2) 二次元だ円弧棒における固有振動数に対して他著者の結果との比較を行って両者がよく一致するのを示し、この種の面外波動問題に伝達マトリックス法が適用できることを確認した。

(3) 数値計算では、屈曲部形状、弾性係数や密度の違いが応力集中に及ぼす影響を明らかにした。

* 前報⁽²²⁾の図9, 10は数値計算に誤りがあった。

付 録 1

式(4)のマトリックス $D(\phi)$ の要素 d_{kq} は下記のとおりである。

$$d_{11}=1, d_{12}=\phi, d_{13}=\cos \phi$$

$$d_{14}=\sin \phi, d_{15}=\phi \cos \phi, d_{16}=\phi \sin \phi$$

$$d_{21}=0, d_{22}=-\frac{1}{\bar{R}}, d_{23}=\frac{1}{\bar{R}} \sin \phi$$

$$d_{24}=-\frac{1}{\bar{R}} \cos \phi$$

$$d_{25}=-\frac{1}{\bar{R}} (\cos \phi - \phi \sin \phi)$$

$$d_{26}=-\frac{1}{\bar{R}} (\sin \phi + \phi \cos \phi)$$

$$d_{31}=d_{32}=0$$

$$d_{33}=-\frac{1}{\bar{R}} \cos \phi, d_{34}=-\frac{1}{\bar{R}} \sin \phi$$

$$d_{35}=\frac{1}{\bar{R}} \left\{ -\frac{4(1+\nu)I_x}{2(1+\nu)I_x+I_p} \sin \phi - \phi \cos \phi \right\}$$

$$d_{36}=\frac{1}{\bar{R}} \left\{ \frac{4(1+\nu)I_x}{2(1+\nu)I_x+I_p} \cos \phi - \phi \sin \phi \right\}$$

$$d_{41}=0, d_{42}=\frac{\bar{E}I_p}{2(1+\nu)I_{y0}} \frac{1}{\bar{R}^3}$$

$$d_{43}=d_{44}=d_{45}=d_{46}=0$$

$$d_{51}=d_{52}=d_{53}=d_{54}=0$$

$$d_{55}=\frac{2\bar{E}I_x}{I_{y0}} \frac{1}{\bar{R}^2} \frac{I_p}{2(1+\nu)I_x+I_p} \sin \phi$$

$$d_{56}=-\frac{2\bar{E}I_x}{I_{y0}} \frac{1}{\bar{R}^2} \frac{I_p}{2(1+\nu)I_x+I_p} \cos \phi$$

$$d_{61}=0$$

$$d_{62}=\frac{\bar{E}I_p}{2(1+\nu)I_{y0}} \frac{1}{\bar{R}^2}$$

$$d_{63}=d_{64}=0$$

$$d_{65}=-\frac{2\bar{E}I_x}{I_{y0}} \frac{1}{\bar{R}^2} \frac{I_p}{2(1+\nu)I_x+I_p} \cos \phi$$

$$d_{66}=-\frac{2\bar{E}I_x}{I_{y0}} \frac{1}{\bar{R}^2} \frac{I_p}{2(1+\nu)I_x+I_p} \sin \phi$$

ただし、 $\bar{R}=R/R_0$, $\bar{E}=E/E_0$ である。

付 録 2

式(6)のマトリックス Fi の要素 f_{kq} は下記のとおりである。

$$f_{11}=1$$

$$f_{12}=-\bar{R} \sin \phi$$

$$f_{13}=\bar{R}(1-\cos \phi)$$

$$f_{14} = \frac{\bar{I}_x (1+\nu)(2\phi + \phi \cos \phi - 3 \sin \phi) + \bar{I}_p (\phi \cos \phi - \sin \phi)}{2\bar{E} \bar{I}_p \bar{I}_x} \bar{R}^3$$

$$f_{15} = \frac{\bar{I}_x (1+\nu)(2 - 2 \cos \phi - \phi \sin \phi) - \bar{I}_p \phi \sin \phi}{2\bar{E} \bar{I}_p \bar{I}_x} \bar{R}^2$$

$$f_{16} = \frac{\bar{I}_x (1+\nu)(\sin \phi - \phi \cos \phi) + \bar{I}_p (\sin \phi - \phi \cos \phi)}{2\bar{E} \bar{I}_p \bar{I}_x} \bar{R}^2$$

$$f_{21} = 0, f_{22} = \cos \phi, f_{23} = -\sin \phi$$

$$f_{24} = \frac{\bar{I}_x (1+\nu)(-2 + 2 \cos \phi + \phi \sin \phi) + \bar{I}_p \phi \sin \phi}{2\bar{E} \bar{I}_p \bar{I}_x} \bar{R}^2$$

$$f_{25} = \frac{\bar{I}_x (1+\nu)(\phi \cos \phi - \sin \phi) + \bar{I}_p (\phi \cos \phi + \sin \phi)}{2\bar{E} \bar{I}_p \bar{I}_x} \bar{R}$$

$$f_{26} = \frac{-\bar{I}_x (1+\nu)\phi \sin \phi - \bar{I}_p \phi \sin \phi}{2\bar{E} \bar{I}_p \bar{I}_x} \bar{R}$$

$$f_{31} = 0, f_{32} = \sin \phi, f_{33} = \cos \phi$$

$$f_{34} = \frac{\bar{I}_x (1+\nu)(\sin \phi - \phi \cos \phi) + \bar{I}_p (\sin \phi - \phi \cos \phi)}{2\bar{E} \bar{I}_p \bar{I}_x} \bar{R}^2$$

$$f_{35} = \frac{\bar{I}_x (1+\nu)\phi \sin \phi + \bar{I}_p \sin \phi}{2\bar{E} \bar{I}_p \bar{I}_x} \bar{R}$$

$$f_{36} = \frac{\bar{I}_x (1+\nu)(\phi \cos \phi + \sin \phi) + \bar{I}_p (\phi \cos \phi - \sin \phi)}{2\bar{E} \bar{I}_p \bar{I}_x} \bar{R}$$

$$f_{41} = f_{42} = f_{43} = 0$$

$$f_{44} = 1, f_{45} = f_{46} = 0$$

$$f_{51} = f_{52} = f_{53} = 0, f_{54} = \bar{R} \sin \phi$$

$$f_{55} = \cos \phi, f_{56} = -\sin \phi$$

$$f_{61} = f_{62} = f_{63} = 0, f_{64} = \bar{R}(1 - \cos \phi)$$

$$f_{65} = \sin \phi, f_{66} = \cos \phi$$

文 献

- (1) Chang, T. and Voleterra, E., *J. Acoust. Soc. Am.*, **46**-5(1969), 1165.
- (2) 平松, 機論, **38**-310, (1972), 1311.
- (3) Sato, K., *J. Acoust. Soc. Am.*, **57**-1(1975), 113.
- (4) 藤川・黒橋・井上, 機論, **41**-343, (1975), 813.
- (5) 藤川・井上・黒橋, 機論, **41**-345, (1975), 1417.
- (6) 入江・山田・高橋, 機論, **45**-396, C(1979), 876.
- (7) 高橋・鈴木, 機論, **43**-367, (1977), 897.
- (8) 鈴木・会田・高橋, 機論, **44**-380, 1(1978), 1183.
- (9) 鈴木・高橋, 機論, **45**-390, (1979), 163.
- (10) 入江・山田・高橋, 機論, **45**-399, C(1979), 1191.
- (11) Irie, T., Yamada, G. and Takahashi, I., *J. Sound Vib.*, **71**-1, (1980), 145.
- (12) 鈴木・高橋, 機論, **46**-411, C(1980), 1319.
- (13) 鈴木・佐藤・高橋, 機論, **47**-414, C(1981), 229.
- (14) 鈴木・小沢田・高橋, 機論, **48**-430, C(1982), 803.
- (15) 鈴木・杉・小沢田・高橋, 機論, **52**-476, C(1986), 1211.
- (16) 鈴木・小沢田, 機論, **53**-495, C(1987), 2217.
- (17) 長屋・後藤, 機論, **54**-498, C(1988), 329.
- (18) 王・長屋・横田, 機論, **58**-545, C(1992), 9.
- (19) 平野・長屋・奥田, 機論, **41**-352, (1975), 3449.
- (20) 平野・長屋・嘉藤, 機論, **45**-389, A(1979), 1258.
- (21) 樫本・長屋・白石, 機論, **57**-540, C(1991), 2566.
- (22) 樫本・長屋・白石, 機論, **58**-547, C(1992), 724.
- (23) Love, A. E. H., *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, (1944), 396, Dover.
- (24) 高田・須永, 機械解析学, (1979), 10, 共立出版.
- (25) 長屋, 機論, **51**-470, A(1985), 2293.
- (26) 例えば平, 現代弾性力学, (1974), 9, オーム社.