集団処理・同期型検査工程の解析* (第1報, 2段型工程)

昇高茂樹^{*1}, 山崎源治^{*2}, 梅田茂樹^{*3}

Inspection System with Batch and Synchronized Service (1st Report, Two-Stage System)

Shigeki SHOTAKA, Genji YAMAZAKI and Shigeki UMEDA

In this paper we analyze a two-stage inspection system. There are two stations numbered 1 and 2, in tandem. An infinite number of jobs always waits in front of station 1 and there is a finite buffer space between stations 1 and 2. If a processed (inspected) job at station 1 is defective, it is rejected; otherwise it proceeds to station 2. Station 2 in operates the same manner. Both stations process m jobs at a time and there may be failures during each processing time. In this mode of operation station 1 will at any time be busy or blocked and station 2 will be busy or idle. An important problem for such a system is how to improve the production rate by increasing the buffer space. We attempt to formulate this problem as a Markov chain. It is shown that the buffer size should be larger than the batch service size, m . Furthermore, we propose an approximation formula for the production rate. Numerical examples are presented which support the usefulness of the approximation.

Key Words: Production System, Modeling, Process Planning, Inspection System, Two-Stage System, Batch Service, Synchronized Service

1. 緒 言

最近の生産技術の著しい発展により, 生産システムは自動化され, 高速生産が可能となってきた。一方ユーザの製品に対して要求する信頼性がきわめて高い場合, メーカーは全数検査を行い, 検査・はね出し工程を多数設置することで対応せざるを得ないが, その負荷により生産率(上記の生産システムのものではなく, 実際に市場に向けての)が向上しない, というのが現状である。例えば, “かんばん方式”などで余分な在庫を持たずに組立工程を円滑に行うために, 部品メーカーなどは不良品の出荷率を p. p. m のオーダーに抑えることが強いられている。また, コンピュータに関連した製品(ボード, フロッピディスクなど)は, 技術面の発展がきわめて速く, 一つの種類の生産期間はきわめて短い, という特徴を持っているにもかかわらず, 高い生産性を保持しなければならない, という問題を常に持つことになる。

生産システムの効率的設計・運用のための確率モデル(主に待ち行列モデル)の有用性が議論されている

(例えば山崎・逆瀬川⁽¹⁾)。中間バッファが有限のフローショップ型生産システムにおける最適機械配置問題などに関しては, 待ち行列モデルを用いた研究が多数なされている(このサーベイとしては, (1), Yamazaki ほか2名⁽²⁾を参照)。

品質検査を伴う生産システムでは検査をどこで行うかによって, 次の二つに大別できる。

(a) 各加工工程に検査工程がつき全数あるいは抜き取り検査により, 合格したものが次の加工工程に送られる。

(b) 加工工程と検査工程が分離し, すべての加工を終了した加工品(以後ジョブと呼ぶ)に対して一連の検査項目を多段階の検査工程でチェックする。

(a)の待ち行列モデルの研究として, Hsu and Tapiero⁽³⁾⁻⁽⁵⁾があげられる。(4)では, ジョブが外部から Poisson 過程により到着し加工時間が一般分布に従う工程が一つである生産システムで抜き取り検査を行うモデルを扱っている。(3)では, (4)の工程数を複数にしたものを BCMP 型のオープンネットワークモデル(Baskett ほか3名⁽⁶⁾)として, 抜き取り検査を行う場合を解析している。(5)は, (4)のモデルで検査の結果によって工程の修理を行う場合を解析している。いずれの場合でも抜き取り検査を増やすことに

* 原稿受付 平成4年8月18日。

^{*1} 東京都立科学技術大学大学院(〒191 日野市旭が丘6-6)。

^{*2} 正員, 東京都立科学技術大学。

^{*3} 武蔵大学(〒176 東京都練馬区豊玉上1-261)。

よる検査費用の増加と抜き取り検査を減すことによる不良品出荷による損失との和を最小とするような抜き取り検査の最適化を扱っている。また最近、坂本・森⁽⁷⁾は(4)で複数工程が直列に並び(4段まで)全数検査を伴う場合の解析をシミュレーションにより試みている。

(b)の多段検査工程に直接対応する待ち行列モデルの研究はそれほどされていないようである。本研究は、その一種である集団処理・同期型多段検査工程を対象にする。これは、フロッピー・ディスクの検査工程のみならず、ほかでも多く採用されている検査工程である。この場合では、各工程間のバッファサイズは有限であり、工程の相互干渉(ブロッキング(1)参照)が生じる。これをモデル化するといわゆるブロッキングを伴う直列型待ち行列システムとなる。このモデルを用いて、その多段工程の性能評価を行うとき、システム全体の処理能力、平均システム内ジョブ数などいろいろな評価尺度が考えられるが、ブロッキングを伴う場合にはこの処理能力が最も重要な尺度となることはよく知られている。この能力は、その直列型システムに無限のジョブの供給があるとしたとき、最後の工程からのジョブの退去率(個/単位時間)として定義され生産率と呼ばれている(例えば(2))。本論文ではこの尺度を採用する。

この直列型システムの工程数を任意としたときの生産率を正確に求めることはきわめてむずかしい。これはこのシステムでのジョブの動きをMarkov連鎖で定式化したとき、工程数の増加とともにその状態数が急増することによる(例えば、工程数を K 、集団サイズを m 、各工程間のバッファサイズを M としたとき、その状態数は $(m+M)^{K-1}$ より多くなる)。しかしながら、このタイプのシステムの $K \geq 3$ の生産率の推定(近似)には、 $K=2$ の結果がきわめて重要であることがGershwin⁽⁸⁾により示されている。それゆえ本論文では、この多段階検査工程の解析の出発点として、 $K=2$ の場合を取り上げる。

この2段型検査工程の分析では、生産性向上の立場から、生産率がパラメータ： m, M 、各工程でのジョブの不良率、各工程自身の故障率、によりいかに影響されるかを明らかにすることが重要である。上記のパラメータのなかで m を固定したとき、人為的に最もコントロールしやすいのはバッファサイズ M であることから、本論文では特に M の生産率に与える影響に的を絞り、一連の数値実験に基づき、 M は少なくとも m 以上にすべきことを示す。さらに、 $M \geq m$ の場合の生産率の近似式(上のパラメータを含んだ形で)を提

案し、この式が必要な生産率を確保するためのバッファサイズの決定などに十分な精度を有することを明らかにする。

2. モデル

本論文では、ある製品の2種類の検査項目を検査工程1, 2で検査する、というシステムを解析する。被検査品(以後ジョブと呼ぶ)は m 個の単位でパレットに乗せられ、最初に検査工程1(以後工程1と呼ぶ)で検査される。この一度の検査に要する時間(検査時間)を T_1 とする。そして、検査開始から T_1 後に、検査自体が正常(成功)か否(失敗)かを知ることができる。もし成功ならその結果に従い、 m 個のジョブは合格か不合格に識別され、合格品のみが次の工程に送られる。不合格品は生産工程に戻されるか廃棄となりこのシステムから取り除かれる。検査自体が失敗ならその m 個のジョブはただちにその工程で再検査を受けることになる(この時の検査時間も T_1 とする)。検査工程2(以後工程2と呼ぶ)においても、ジョブは m 個の単位でパレットに乗せられ検査を受ける。工程2での検査の時間は T_2 であることを除いて、ほかの点は工程1のそれらと同じである。合格となったジョブのみが合格品としてシステムを去る。また一度に m 個ずつ処理するため、工程2ではもしジョブが $(m-1)$ 以下なら、 m 以上になるまで検査を行わない。工程1と工程2の間には有限のバッファ(サイズ M)が設けられている。そして、もし工程1での検査終了直後、合格となったジョブがバッファに入り切ることができなければ、工程1はそれらのジョブがすべてバッファに移るまで次の検査をしない(この状態を'ブロッキング'と呼ぶ、その詳細に関しては、山崎、逆瀬川⁽⁴⁾をみよ)。 $T = \max(T_1, T_2)$ としたとき、このシステムはサイクルタイム T の同期型検査工程とみなすことができる。それ故以下では、このシステムを集団処理(m 個ずつ検査)・同期型検査工程と呼ぶことにする。

本論文では、次の仮定に基づいてこのシステムを解析する。

- (仮定1)：工程1の前に十分ジョブがあり、ジョブの不足による作業の中断はないものとする。
- (仮定2)：工程 i での検査自体が失敗する確率は r_i ($i=1, 2$)であり、これはほかの状態、過去の履歴とは独立である。
- (仮定3)：工程 i での検査自体が成功したとき、1つのジョブが不合格となる確率は p_i ($i=1, 2$)であり、これはシステムのほかの状態、過去の履歴とは独立である。

システムの状態を、検査が終了直後でのみ観察することにする。 k 回目の同期時刻を $t_k = kT (k=0, 1, 2, \dots)$ とする。 t_k の直後 t_k^+ において次の状態空間をもつ確率過程 $\{X_k\}$ を考える。

(I, i, k) : 時刻 t_k^+ において中間バッファに i 個ジョブがあり、工程 2 が稼動していない状態 ($0 \leq i \leq m-1$)

(R, i, k) : 時刻 t_k^+ において中間バッファに i 個ジョブがあり、工程 2 が稼動している状態 ($0 \leq i \leq M$)

(B, i, k) : 時刻 t_k^+ において中間バッファに M 個ジョブがあり、工程 2 が稼動していて、工程 1 に i 個ジョブが残っている状態 ($1 \leq i \leq m$)

この時、仮定 2, 3 より $\{X_k\}$ は定常推移確率をもつ Markov 連鎖となることは明らかである。 $\{X_k\}$ の状態確率を $P(\cdot, k)$ で表し、 $P(\cdot, k), P(\cdot, k+1)$ に関する平衡方程式をたてると、式 (1) になる。 $\{X_k\}$ の定常確率 $P(\cdot)$ は式 (1) において $P(\cdot, k+1) = P(\cdot, k) = P(\cdot)$ (すなわち $P(\cdot, k)$ は k によらない) とし、これらに確率の正規化条件を加えて解くことにより得ることができる。これは $M+2m+1$ 元の連立方程式の解に帰着する。

$$\left. \begin{aligned} P(I, i, k+1) &= \sum_{x=0}^i \{A_{i-x}P(I, x, k) + B_{i-x}P(R, x, k)\} & (0 \leq i \leq m-1) \\ P(R, i, k+1) &= \sum_{x=0}^{m-i-1} A_{m-x}P(I, i+x, k) + \sum_{x=0}^i C_{i-x}P(R, x, k) + \sum_{x=0}^m B_{m-x}P(R, i+x, k) & (0 \leq i \leq m-1) \\ P(R, i, k+1) &= \sum_{x=0}^m C_{m-x}P(R, i-m+x, k) + \sum_{x=0}^m B_{m-x}P(R, i+x, k) & (m \leq i \leq M-m) \\ P(R, i, k+1) &= \sum_{x=0}^m C_{m-x}P(R, i-m+x, k) + \sum_{x=0}^{M-i} B_{m-x}P(R, i+x, k) + (1-r_2)P(B, i-m, k) & (M-m+1 \leq i \leq M) \\ P(B, i, k+1) &= \sum_{x=0}^{m-i} C_{m-x}P(R, i+m+x, k) + r_2P(B, i, k) & (1 \leq i \leq m) \end{aligned} \right\} \dots\dots (1)$$

ただし

$$\left\{ \begin{aligned} A_0 &= r_1 + (1-r_1) \binom{m}{0} p_1^m (1-p_1)^0 \\ A_i &= (1-r_1) \binom{m}{i} p_1^{m-i} (1-p_1)^i \\ B_j &= (1-r_2) A_j \\ C_j &= r_2 A_j \\ 1 &\leq i \leq m \\ 0 &\leq j \leq m \end{aligned} \right.$$

この $P(\cdot)$ を用いて、 $T=1$ (これにより一般性を失うことはない) とおくと工程 2 の稼働率 (ρ_2) は

$$\rho_2 = \sum_{i=0}^M P(R, i) + \sum_{i=1}^m P(B, i) = 1 - \sum_{i=0}^{m-1} P(I, i) \dots\dots\dots (2)$$

となる。この ρ_2 を用いると生産率 $S(r_1, p_1, r_2, p_2, m, M)$ は、次式で求めることができる。

$$S = (1-r_2)(1-p_2)m\rho_2 \dots\dots\dots (3)$$

3. 生産率の近似

式 (2), (3) から、生産率 S と工程 2 での稼働率 ρ_2 を求めることは等価である。したがって、ここでは稼働率を考えることとする。 ρ_2 を正確に求めようとすると、前節で述べたように未知数が $M+2m+1$ 個の連立方程式を解かなければならない。

ここで $m=1$ のときの稼働率を解析的に求めると、 $b \neq 1$ のとき

$$\rho_2 = \left(1 - \frac{1-a}{1-a^2b^{M+1}}\right) \dots\dots\dots (4)$$

$b=1$ のとき

$$\rho_2 = \left(1 - \frac{r_2}{M+2+r_2-a(1-r_2)}\right) \dots\dots\dots (5)$$

ただし

$$\left\{ \begin{aligned} a &= \frac{(1-r_1)(1-p_1)}{(1-r_2)} \\ b &= a \frac{r_2}{1-(1-p_1)(1-r_1)} \end{aligned} \right.$$

となる (導出は付録 A を参照)。

$m=1$ の場合は式 (4) (5) のように ρ_2 を解析的に求めることができるが、 $m \geq 2$ の場合のそれはきわめてむずかしい。それゆえ、本節では $b \neq 1, M \geq m$ の条件下での ρ_2 の近似式を導く。そのための出発点は、 $m \geq 2$ でも ρ_2 は、式 (4) と類似の形で表すことができる。と仮定することである。すなわち、

$$\rho_2 = 1 - \frac{1}{c - db^t}$$

とする。この式で、 $t=(M+1)/m$ とセットしたとき、 c, d がどのような形になるかを考える。ここではその詳細な導出過程は省略し、アウトラインのみを述べる (その詳細については、中島⁽⁹⁾ をみよ)。

$f=1/(1-\rho_2)$ とし、 M 以外のパラメータ (m, p_1, p_2, r_1, r_2) を固定し、 M のみを動かすと f は t の関数 ($f(t)$) となる。相異なる t の n 個の点 ($t_k, k=0, 1, \dots, n-1$) に対して、 ρ_2 の真値を数値解として計算し、

$f(t_k)$ の階差表を作る。その差分を用いて、 $\log(f'(t))$ の回帰直線を求め、それから c, d を決定する。この手順を m, p_1, p_2, r_1, r_2 の種々の組合せに対して実施した結果、 c, d は次の形にまとめることができる。

$$c = \frac{1}{1-a} + \varepsilon_1(m, M, p_1, p_2, r_1, r_2)$$

$$d = \frac{a^2}{1-a} + \varepsilon_2(m, M, p_1, p_2, r_1, r_2)$$

ここで、 $\varepsilon_1(\cdot), \varepsilon_2(\cdot)$ は t_k のとり方に依存する項で、これらを見捨て $c \approx \frac{1}{1-a}, d \approx \frac{a^2}{1-a}$ とすると次の近似式が得られる。

$$\rho_2(\text{app.}) = \left(1 - \frac{1-a}{1-a^2 b^{(MH)/m}}\right) \dots \dots \dots (6)$$

この近似式の精度が応用上十分であることが、4章2節で示される。また、式(3)、(6)から、生産率の近似

として次式を得る。

$$S(\text{app.}) = m(1-r_2)(1-p_2)\rho_2(\text{app.}) \dots \dots \dots (7)$$

ρ_2 は b に関して連続関数となることから、 ε を十分小さく選ぶと、 $\rho_2(b=1) \approx \rho_2(b=1+\varepsilon)$ とすることができる。これは、 $b=1$ の場合でも $b=1+\varepsilon$ として式(6)が使えることを意味する。

4. 数値例と考察

4.1 バッファサイズの生産率への影響 いま、 r_1, p_1, r_2, p_2, m を固定したとき稼働率 ρ_2 を M についての関数 $\rho_2(M)$ とすると、 $\rho_2(M)$ が M についての単調増加関数になることは明らかである。すなわち、 $\rho_2(M)$ は $\rho_2(0)$ で最小値をとり、 $\rho_2(\infty)$ で最大値をとる。

この $\rho_2(M)$ の最大値、すなわち $\rho_2(\infty)$ は解析的に

表 1 バッファサイズの稼働率に与える影響 ($m=10$)

(a) $\rho < 1$ の場合の $\rho_2(M)/\rho_2(\infty) \times 100$

p_1	p_2	r_1	$M=0$	$M=10$	$M=20$	$M=40$
0.01	0.01	0.01	52.88	99.13	99.74	99.96
0.05	0.05	0.05	53.92	96.26	98.89	99.85
0.10	0.10	0.10	55.28	93.79	98.17	99.78

(b) $\rho > 1$ の場合の $\rho_2(M)/\rho_2(\infty) \times 100$

p_1	p_2	r_1	$M=0$	$M=10$	$M=20$	$M=40$
0.01	0.20	0.01	57.63	99.18	99.95	100
0.05	0.20	0.05	55.51	94.39	98.40	99.83
0.10	0.20	0.10	52.72	87.58	93.49	96.94

表 2 稼働率の近似式の精度 ($m=10$)

(a) $\rho < 1$ の場合の近似値の真値との相対誤差(%)

p_1	p_2	r_1	$M=10$	$M=20$	$M=40$	$M = \infty$
ρ			relative error			
0.01	0.01	0.01	0.9814	0.9875	0.9896	
$\rho=0.99$			-0.031	0.038	0.024	
0.05	0.05	0.05	0.9144	0.9395	0.9486	0.950
$\rho=0.95$			-0.102	0.203	0.068	
0.10	0.10	0.10	0.8441	0.8835	0.8980	0.900
$\rho=0.90$			-0.074	0.430	0.120	

(b) $\rho > 1$ の場合の近似値の真値との相対誤差(%)

p_1	p_2	r_1	$M=10$	$M=20$	$M=40$	$M = \infty$
ρ			relative error			
0.01	0.20	0.01	0.9918	0.9995	1.0000	1.0
$\rho=1.23$			0.175	0.032	0.000	
0.05	0.20	0.05	0.9439	0.9840	0.9983	1.0
$\rho=1.13$			0.215	0.403	0.163	
0.10	0.20	0.10	0.8758	0.9349	0.9694	1.0
$\rho=1.01$			0.151	0.811	0.737

(a) ($\rho < 1$)

(b) ($\rho \geq 1$)

図 1 バッファサイズと稼働率の関係 ($m=10$)

求めることができる。 $M=\infty$ では工程1にブロッキングが生じないので次式が成り立つ

$$\left[\begin{array}{l} M=\infty \text{ の工程 2 への} \\ \text{ジョブの到着率} \end{array} \right] = m(1-r_1)(1-p_2)$$

工程2での1サイクル時間当たりの処理能力は $m(1-r_2)$ であるから、 $m(1-r_1)(1-p_1) < m(1-r_2)$, すなわち

$$\rho_{\text{def}} \frac{(1-r_1)(1-p_1)}{1-r_2} < 1$$

のとき、工程2の待ち行列は発散しない。待ち行列論では上式の ρ は利用率と呼ばれ、 $\rho < 1$ のとき $\rho_2 = \rho$ となる。一方、 $\rho \geq 1$ のとき、工程2の待ち行列は発散し、工程2の前には常に待ちジョブが存在することになり、 $\rho_2 = 1$ となる。

$\rho_2(M)$ の最小値、すなわち $\rho_2(0)$ は M が有限のときと同様に理論的に求めることは非常にむずかしいので数値計算によらざるを得ない。このバッファサイズによる、 $\rho_2(M)$ の最大値に対する比 $(\rho_2(M)/\rho_2(\infty) \times 100)$ の変化を表した一例が表1(a), (b)である。表1(a)は $\rho_2 = \rho < 1$ の場合で、表1(b)は $\rho > 1$ すなわち $\rho_2 = 1$ の場合である。表1(a), (b)からわかるとおり、 $M=0$ のときは最大稼働率の約50%の稼働率しか得ることができないが、 $M=m$ では最大稼働率の約90%の稼働率が得られている。また、バッファサイズによる $\rho_2(M)$ の変化を詳しく求めたものが図1(a), (b)である。図中の破線は $\rho_2(\infty)$ の値を示している。図1(a), (b)からわかるとおり、 $M < m$ のときは、 M の増加により急激に稼働率は上昇する。 $M \geq m$ のときは M の増加によりなだらかに稼働率は上昇する。同様に、一連の数値実験を行ったところ $M \leq 100$, $m \leq 20$, $r_1 \leq 0.2$, $r_2 \leq 0.2$, $p_1 \leq 0.2$ であれば同様の結果が得られた。このことから中間バッファサイズは少なくとも集団処理サイズ以上にすべきことが明らかである。これが $M \geq m$ とセットして生産率の近似式(7)を導いた一つの理由である。

4.2 近似式の精度 $m=1, b \neq 1$ のとき(4)より $\rho_2(\text{app.}) = \rho_2(\text{exact})$ となる。 $m \geq 2, b \neq 1$ の場合の近似式の精度をチェックするため一連の数値実験を行った。その結果の一つが表2(a), (b)である。表の relative error は % であり次式で求めている。

$$[\text{relative error}] = \frac{\rho_2(\text{exact}) - \rho_2(\text{app.})}{\rho_2(\text{exact})} \times 100 \quad \dots\dots\dots (8)$$

この表2(a), (b)からわかるとおり相対誤差は1%以内におさまっている。同様に、一連の数値実験を行ったところ $r_2 \leq 0.2$, $r_1 \leq 0.1$, $p_1 \leq 0.1$ なら、 p_2 によら

ずに $M \geq m (\geq 2)$ で、相対誤差は1%以内におさまっていることが明らかになった。 $M \geq m$ とすると ρ_2 は $\rho_2 \approx \rho_2(\text{app.})(M=m)$ から $\rho_2(M=\infty) = \min(\rho, 1)$ まで変化する。この間で適当な稼働率を得るためのバッファサイズの決定には次式を用いることができる。

$$M = m \frac{\log\left(1 - \frac{1-a}{1-\rho_2}\right) - 2 \log a}{\log b} - 1 \dots\dots\dots (9)$$

必要な生産率を得るためには $(m(1-p_2)(1-r_2)\rho_2)$ から $m(1-p_2)(1-r_2) \min(\rho, 1)$ の範囲で式(3)により ρ_2 をもとめ、式(9)を用いれば良い。

5. 結 言

本論文では、集団処理・同期型2段検査工程の状態を同期直後で観察し、それをMarkov連鎖として定式化した。このMarkov連鎖の平衡方程式を、理論的、数値的に解析することにより次のことを明らかにした。

(1) 中間バッファサイズ M は少なくとも集団処理サイズ m 以上にする：工程1, 2での不良率 p_1, p_2 , 故障率 r_1, r_2 を固定し、生産率を M の関数としたとき、生産率の上限 ($M=\infty$) を理論的に求め、下限 ($M=0$) および $M < \infty$ の場合を数値解より求めた。生産率は $M=0$ から $M=m$ の間で急激に上昇し $M > m$ ではなだらかに上昇する。また、 $M=m$ では上限値の約90%の生産率を得ることができる。

(2) $M \geq m$ の生産率の近似式： $m=1$ の場合、解析的に生産率を求めることができ、 $m \geq 2$ の場合の数値解を基に差分法により、 $M \geq m$ の場合の生産率の近似解を提案した。この近似式は、 $r_2 \leq 0.2$, $r_1 \leq 0.1$, $p_1 \leq 0.1$ の範囲なら相対誤差が1%以内におさまるという精度をもつ。

(3) バッファサイズの決定法：ここで得られた近似式により目標とする生産率を得るためのバッファサイズを求めることができる。

今後の研究課題としては、集団処理サイズが各工程間で異なるとき、はね出し工程が3以上になったときの解析がある。

終わりに、本研究に対してご協力いただいた、東京都立科学技術大学管理工学科1990年度卒研 浅見俊一、1991年度卒研 稲垣秀則、中島一洋君に謝意を表す。

付録 A. 式(4) の誘導

式(1)の平衡方程式は, $m=1$ のとき以下のように表すことができる.

$$\left. \begin{aligned} P(I, 0) &= A_0 P(I, 0) + B_0 P(R, 0) \\ P(R, 0) &= A_1 P(I, 0) + (B_1 + C_0) P(R, 0) + B_0 P(R, 1) \\ P(R, 1) &= C_1 P(R, 0) + (B_1 + C_0) P(R, 1) + B_0 P(R, 2) \\ &\vdots \\ P(R, M-1) &= C_1 P(R, M-2) + (B_1 + C_0) P(R, M-1) + B_1 P(R, M) \\ P(R, M) &= C_1 P(R, M-1) + (B_1 + C_0) P(R, M) + (1-r_2) P(B, 1) \\ P(B, 1) &= C_1 P(R, M) + r_2 P(B, 1) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= r_1 + (1-r_1)p_1 \\ A_1 &= (1-r_1)(1-p_1) = 1-A_0 \\ B_0 &= A_0(1-r_2) \\ B_1 &= A_1(1-r_2) \\ C_0 &= A_0 r_2 \\ C_1 &= A_1 r_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

これらをまとめると以下のようにまとめられる.

$$\left. \begin{aligned} (1-A_0)P(I, 0) &= B_0 P(R, 0) \\ C_1 P(R, i) &= B_0 P(R, i+1) \\ C_1 P(R, M) &= (1-r_2)P(B, 1) \\ &\quad (0 \leq i \leq M-1) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

上式より

$$P(R, i) = \left(\frac{C_1}{B_0} \right)^i P(R, 0) \quad (0 \leq i \leq M) \dots\dots\dots (13)$$

またここで, 各状態確率の総和は 1 であるから, (以下では $C_1/B_0 \neq 1$ とする.)

$$\begin{aligned} 1 &= P(I, 0) + \sum_{i=0}^M P(R, i) + P(B, 1) \\ &= \frac{B_0}{1-A_0} P(R, 0) + \sum_{i=0}^M \left(\frac{C_1}{B_0} \right)^i P(R, 0) + \frac{C_1}{1-r_2} \left(\frac{C_1}{B_0} \right)^M P(R, 0) \\ &= \left\{ \frac{B_0}{1-A_0} + \frac{1 - \left(\frac{C_1}{B_0} \right)^{M+1}}{1 - \left(\frac{C_1}{B_0} \right)} + \frac{C_1}{1-r_2} \left(\frac{C_1}{B_0} \right)^M \right\} P(R, 0) \dots\dots\dots (14) \end{aligned}$$

式(11)より $\frac{1}{1-r_2} = \frac{A_0}{B_0}$ なので式(13)は

$$1 = \left\{ \frac{B_0}{1-A_0} + \frac{1 - \left(\frac{C_1}{B_0} \right)^{M+1}}{1 - \left(\frac{C_1}{B_0} \right)} + A_0 \left(\frac{C_1}{B_0} \right)^{M+1} \right\} P(R, 0) \dots\dots\dots (15)$$

ここで, $b = \frac{C_1}{B_0}$ とすると,

$$1 = \left\{ \frac{B_0}{1-A_0} + \frac{1 - b^{M+1}}{1-b} + A_0 b^{M+1} \right\} P(R, 0) \dots\dots\dots (16)$$

ところで,

$$1-b = \frac{A_0 - r_2}{A_0(1-r_2)}$$

より式(14)は,

$$1 = \left\{ \frac{A_0(1-r_2)}{1-A_0} + \frac{(1-r_2)A_0(1-b^{M+1})}{A_0 - r_2} + A_0 b^{M+1} \right\} P(R, 0) \dots\dots\dots (17)$$

$$= \frac{(1-A_0)A_0}{A_0-r_2} \left\{ \left(\frac{1-r_2}{1-A_0} \right)^2 - b^{M+1} \right\} P(R, 0) \dots\dots\dots (18)$$

ここで、工程2の稼働率は

となる。

$$\rho_2 = \sum_{i=0}^M P(R, i) + P(B, 1) \dots\dots\dots (19)$$

$$= 1 - P(I, 0) \dots\dots\dots (19)$$

で表される。上式からわかるとおり $P(I, 0)$ を求めれば工程2の稼働率は求められる。ここで式(12)より

$$P(I, 0) = \frac{A_0(1-r_2)}{1-A_0} P(R, 0) \dots\dots\dots (20)$$

$$P(I, 0) = \frac{(1-r_2)(A_0-r_2)}{(1-r_2)^2 - (1-A_0)^2 b^{M+1}} \dots\dots\dots (21)$$

ここで $\frac{A_1}{1-r_2} = a$ としてまとめると

$$P(I, 0) = \frac{1-a}{1-a^2 b^{M+1}} \dots\dots\dots (22)$$

ゆえに工程2の稼働率は

$$\rho_2 = 1 - \frac{1-a}{1-a^2 b^{M+1}} \dots\dots\dots (23)$$

文 献

- (1) 山崎・逆瀬川, オペレーションズ・リサーチ, **33**-5 (1988), 215.
- (2) Yamazaki, G., ほか2名, *Management Science*, **31**-1 (1985), 78.
- (3) Hsu, L. F. and Tapiero, C. S., *The International J. of FMS*, **1**-2 (1989), 325.
- (4) Hsu, L. F. and Tapiero, C. S., *European J. of Operational Research*, **42**-1 (1989), 88.
- (5) Hsu, L. F. and Tapiero, C. S., *IJPR*, **28**-8 (1990), 1447.
- (6) Baskett, F., ほか3名, *J. ACM*, **22**-2 (1975), 248.
- (7) 坂本・森, 科研費総合研究(A): 情報通信ネットワークに関する待ち行列モデルの総合的研究・シンポジウム報文集, (1992), 171.
- (8) Gershwin, S. B., *Opera. Res.*, **35**.2.291.
- (9) 中島, 東京都立科学技術大学管理工学科1991年度卒業論文.