解析解の境界離散化法による連続体の振動解析*

(二次元ヘルムホルツ方程式系に関する基礎的検討)

浦田 喜彦^{*1}, 中川 稔章^{*2}

Vibration Analysis of Continuous Bodies with the Use of Analytic Solutions Discretized on Boundaries (A Basic Study on Two-Dimensional Problems Described by Helmholtz's Equation)

Yoshihiko URATA and Toshiaki NAKAGAWA

This paper discusses a new method of analysis of two-dimensional eigenvalue problems described by Helmholtz's equation. A general solution is assumed as a linear combination of plane waves which have the same wave number and travel in different directions. Nodal points are located only on the boundary of a convex domain which has an arbitrary shape. A set of equations similar to finite element equations can be derived from the general solutions. Eigenvalues obtained by this method are very close to the exact values. This method is effective in simplification of programming and in shortening of computational time.

Key Words: Vibration of Continuous System, Helmholtz's Equation, Eigenvalue, Analytic Solution, Plane Wave, Nodal Point, Accuracy

1. 緒 言

連続体力学の問題は一般に偏微分方程式で記述されるが、二次元、三次元の場合には任意形状領域に対して境界条件を満たす解を見出すことは困難である。そのために実用的計算では有限要素法や境界要素法が用いられている。これらははん用性に優れた強力な計算法であるが、データ作成に要する労力や計算時間、精度などの点で無論のことながら万能というわけにはいかない。したがってこれらの既存のものと互いに補強あるいは補完しながら使用できる計算法の存在は望ましいと考えられる。著者らはこのような考えから解析解と有限要素を直接接合する方法を検討し^{(1)~(4)}、適用可能な場合には計算規模の縮小や精度の面で良好な結果が得られることを確認した。この方法の骨子は場の方程式と境界条件の一部をすでに満たしている解析解を、条件が満たされていない境界上に設けた節点において有限要素と同様にポテンシャルとフラックスの集中量の関係に変換して、隣接する部分に用いた有限要素などと結合するというものである。この方法では解

析解を用いる部分領域では場の分割を必要とせず、一部の境界上に節点が現れるだけなので計算能率はよく、精度も優れている。しかしながら、これまで検討してきた範囲では基礎となる解析解を変数分離形のものに限定していたためにこの方法が適用できる領域形状も限られていた。基礎となる解析解に対して変数分離という限定を除くことができれば、境界上に節点を置くことである範囲で任意形状領域を直接扱うことができるうえに、細かい部分には有限要素を用いることもできるので、計算法としての柔軟性が非常に増すことになる。本研究はこのような計算法の開発を目的とするが、第1段階として二次元ヘルムホルツ方程式系についての検討を行った。基礎となる解としてあらゆる方向に進む平面波の重ね合せを採用してこれまでと同じ考え方による離散化を行ったところ、良好な結果が得られたので報告する。なお、同様の方法は方程式の形が異なっても適用できる可能性があり、本論文はさまざまな系への応用のための基礎としての意味を持つものである。

2. 解 析 法

2.1 単連結領域でのヘルムホルツ方程式の一般解

いま、平面上の領域 Ω 内で方程式

* 原稿受付 平成4年10月16日。

*¹ 正員、静岡理科大学理工学部(〒437 袋井市豊沢 2200-2)。

*² 正員、豊田中央研究所(〒480-11 愛知県愛知郡長久手町大字長湫字横道 41-1)。

$$\nabla^2 \varphi + k^2 \varphi = 0 \cdots \cdots \cdots (1)$$

を満たし、 Ω の境界 Γ 上で $\varphi=0$ や $\partial\varphi/\partial n=0$ などの条件を満たす固有関数 φ と固有値 k を見出すことが問題であるとする。このような φ はもちろん Ω 内で係数の不定を除けば一価かつ正則である。ここでは図 1 のように Ω を完全におおう円を考え、この円内で一価正則な φ の中に指定された境界条件を満たすものが存在すると仮定する。この円の中心を原点とする極座標 (r, θ) を設定すると φ はこの円内では 2π を基本周期とする θ の周期関数であるから、 θ に関してフーリエ級数に展開できる。この級数の係数は r の関数となるが、これらは φ が方程式 (1) を満たし、原点でも正則であるとの条件から決定され、第 1 種ベッセル関数で表される。このように展開した φ は

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} C_n J_n(kr) e^{jn\theta} \cdots \cdots \cdots (2)$$

と書くことができる。ところでベッセル関数の積分表示の一つ⁽⁵⁾⁽⁶⁾を用いれば、

$$\begin{aligned} J_n(kr) e^{jn\theta} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{j\{n(\gamma+\theta)-kr \cos(\gamma-\theta)\}} d\gamma \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{j\{n(\gamma+\pi/2)-kr \cos(\gamma-\theta)\}} d\gamma \cdots \cdots \cdots (3) \end{aligned}$$

という関係が得られる。これを式 (2) に代入すると

$$\varphi = \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} C_n e^{jn(\gamma+\pi/2)} \right\} e^{-jkr \cos(\gamma-\theta)} d\gamma \cdots \cdots \cdots (4)$$

となるが、右辺の $\{ \}$ の中は 2π を基本周期とする γ の未知関数なのでこれを $D(\gamma)$ と書くことにすると結局つぎの表現が得られる。

$$\varphi = \int_0^{2\pi} D(\gamma) e^{-jkr \cos(\gamma-\theta)} d\gamma \cdots \cdots \cdots (5)$$

これまでの計算過程から明らかなように式 (2) と (5) は等価であり、どちらも方程式 (1) の原点近傍で正則な解の最も一般的な表現といえることができる。極座標や直角座標系における変数分離形の解もこれらの式に特別な場合として含まれている。極座標系の場合は式 (2) と (5) の関係から明らかであるが、直角座標系に対してはたとえば、

$$\begin{aligned} D(\gamma) &= \frac{1}{4} \{ \delta(\gamma-a) + \delta(\gamma-a+\pi) \\ &\quad + \delta(\gamma-a-\pi) + \delta(\gamma-a+2\pi) \} \end{aligned}$$

として式 (5) に代入すると

$$\varphi = \cos(kx \cos a) \cos(ky \sin a)$$

となる。

2.2 一般解に対する解釈 式 (5) の被積分関数の意味を調べてみる。図 2 に示すように x - y 座標系と角 γ をなす ξ - η 座標系を考える。 ξ 軸に沿って進む波数 k の平面波は

$$\varphi = e^{-jk\xi}$$

と表される。極座標系で (r, θ) と表される任意の点 A におけるこの波の位相は ξ 軸上の点 B における位相に等しいから

$$\varphi(r, \theta) = e^{-jkr \cos(\gamma-\theta)}$$

となる。式 (5) は進行方向 γ を変化させたすべての方向の平面波に重み $D(\gamma)$ を掛けて重ね合せた結果が点 (r, θ) における φ の値になっていることを示している。この平面波の重ね合せというのは物理的本質というより一つの解釈であって、後に示す近似法も原理的には式 (2) から式 (5) から出発することは可能であるが、任意形状領域を多角形近似する場合には平面波を用いる方が計算が大幅に簡単化されるので以下では式 (5) を出発点にとる。

さて、原点になんらかの波源があって同心円状に波が出ている場合には時間因数が $e^{j\omega t}$ であるとするれば第 2 種ハンケル関数によって

$$\varphi = A H_0^{(2)}(kr)$$

と表すことができるが、 $kr \gg 1$ のときには漸近展開により

$$\varphi = \left\{ A \sqrt{\frac{2}{\pi kR}} e^{-j(kR - \pi/4)} \right\} e^{-jk\xi}$$

となる。ただし、 $r = R + \xi$ とし、 R は $R \gg \xi$ を満たす定数であるとして近似した。上式は平面波を表し、係数が振幅と位相を定めている。このように平面波は点波源から非常に遠い位置(遠方場)における波の近似的

図 1 単連結領域

図 2 ξ 方向に進む平面波

様相を表すものでもある。したがって、式(5)を出発点にとる計算法では各方向の無限遠に波源をおき、計算対象領域の境界条件を満たすように各波源の強さと位相の関係を決定すると解釈することができる。境界上に波源をおく境界要素法とはこの点で異なるものであり、この結果、提案する方法では特異積分は不要になる。

2.3 近似不可能な領域形状 平面波の重ね合わせである式(5)を出発点にとると対象に若干の限定を生じる。まず、同心環状領域の問題では

$$\varphi = \{AJ_n(kr) + BY_n(kr)\}e^{jn\theta}$$

の形の解が必要である。これからも明らかなように、多連結領域の問題では内部境界からの反射を表すのに内部境界の内側に特異点を持つ項が必ず必要になり、解全体を遠方場として扱うことはできない。本論文で単連結領域に限定しているのはこのためである。同様な理由で単連結であっても極端な凹形状は不適当と考えられる。たとえば図3で全周が $\varphi=0$ のときには解は

$$\varphi = \{AJ_\nu(kr) + BY_\nu(kr)\} \sin \nu\theta$$

$$\nu = \frac{n\pi}{\alpha}$$

となるから多連結領域の場合と事情は変わらない。これらの場合も数値積分を許容するのであれば後に示すのと同様の手順で解析は可能であるが、計算能率の問題もあるので検討は別の機会にゆずる。

2.4 近似計算法 以上の考察をもとに本論文では計算対象をさしあたり凸形の単連結領域に限定し、これを多角形で近似して計算することを考える。まず、積分形で与えられた式(5)をつぎのように離散近似する。

$$\varphi = \sum_{i=1}^N D_i \varphi_i \dots\dots\dots (6)$$

$$\varphi_i = e^{-jkrcos(\gamma_i - \theta)} \dots\dots\dots (7)$$

つまり、波数は同一であるが進行方向が異なるために

図3 本方法が適用できない単連結領域

互いに一次独立になっている平面波の離散的重ね合わせを近似の一般解と考えるのである。採用する平面波の進行方向は $0 \leq \gamma_i < 2\pi$ の範囲内に均等に配置する必要がある。また、固有値問題では対象とする物理現象は定常波であって、いずれの方向にもエネルギーの流れは存在しない。それゆえ、式(6)には互いに反対方向に進む平面波が必ず対で含まれるようにすべきである。したがって、級数の項数 N は偶数となる。式(6)を基礎にして近似を行う方法は一つに限らないが、ここでは著者らの従来の研究と同じ考え方による近似法を検討する。

ここで対象領域 Ω を N 角形で近似して頂点に式(6)の項数と同じ N 個の節点を配置する。 Ω に長い直線辺があつて、その上に複数の節点をおく必要のあるときにはそれらの節点を頂角が π に等しい頂点とみなせばよい。 n 番目の節点を P_n と表し、その座標を (x_n, y_n) とする。 Ω の境界 Γ 上では φ のフラックス $-\nabla\varphi$ の外向き法線方向の成分 $-\partial\varphi/\partial n$ が節点に集中化した体積フラックス Q_i で置き換えられるものとする

$$-\sum_{i=1}^N D_i \left[\frac{\partial \varphi_i}{\partial n} \right]_r = \sum_{n=1}^N Q_n \delta(x - x_n, y - y_n) \dots\dots (8)$$

この式に対して重み付き残差法を適用するために両辺に $\varphi_m (m=1, 2, \dots, N)$ をかけ、全境界 Γ 上で積分すれば次式が得られる。

$$[h_{mi}]\{D_i\} = [g_{mn}]\{Q_n\} \dots\dots\dots (9)$$

ただし、

$$h_{mi} = - \int_{\Gamma} \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} \varphi_m d\Gamma$$

$$g_{mn} = \varphi_m(x_n, y_n) \dots\dots\dots (10)$$

とした。これらの行列要素の具体形は後述する。

一方、節点 l における φ の値を Φ_l と書くことにすると式(6)より

$$\Phi_l = \sum_{i=1}^N D_i \varphi_i(x_l, y_l) = \sum_{i=1}^N D_i g_{il}$$

すなわち、

$$\{\Phi_l\} = [g_{il}]^T \{D_i\} \dots\dots\dots (11)$$

さて、境界条件として全 Γ 上で $\varphi=0$ が指定されている場合の近似表現は $\{\Phi_l\} = \{0\}$ となり、式(11)から固有値方程式として次式が得られる。

$$[[g_{il}]^T] = [g_{il}] = 0 \dots\dots\dots (12)$$

これからも明らかなように、 Γ 上で φ が指定されたときには一般解の式(6)に対して選点法を適用したのと同じである。選点法については精度の点で好ましくないとの認識が一般的であるが、後に結果を示すようにこの場合には精度的に何らの問題もない。

一方、全 Γ 上で $\partial\varphi/\partial n=0$ が指定されたときの近似

表現は $\{Q_n\}=\{0\}$ となるから式(9)より

$$[g_{mn}]^{-1}[h_{mi}]\{D_i\}=\{0\} \quad \cdots \cdots (13)$$

となり、固有値方程式は

$$|h_{mi}|/|g_{mn}|=0 \quad \cdots \cdots (14)$$

となる。式(10)による h_{mi} の定義からわかるように $|h_{mi}|=0$ には境界を通してのエネルギーの授受のない条件、つまり一般に $\partial\varphi/\partial n=0$ と $\varphi=0$ の二つの境界条件の場合の固有値が同時に対応するが、 $1/|g_{mn}|$ なる因数によって $\varphi=0$ に対する固有値を与える k は式(14)の左辺の零点から排除されることになる。問題によっては二つの境界条件 $\varphi=0$ と $\partial\varphi/\partial n=0$ で同一の固有値が対応することがあるが、そのような k では $|h_{mi}|$ は2位の零点となっており、 $1/|g_{mn}|$ によって式(14)の左辺は1位の零点に変わるのである。

以上の二つの境界条件に対してはここで説明した方法で固有値方程式を求めるのがよいが、そのほかの一般的な境界条件が与えられている場合やほかの部分領域と結合を行う必要がある場合に対しては式(9)、(11)から未知係数 $\{D_i\}$ を消去して得られる次式を用いる。

$$\{Q_n\}=[g_{mn}]^{-1}[h_{mi}]\{[g_{il}]^{-1}\}^T\{\Phi_i\} \quad \cdots \cdots (15)$$

この式は対象領域 Ω 全体を周辺部のみに節点を配置して有限要素化したのと形式的には同じであるので、隣接部に通常の有限要素を用いることも式(15)と同様に定式化したほかの領域を接合することも可能である。

2・5 行列要素の具体形 ここで行列 $[g_{mn}]$ と $[h_{mi}]$ の要素を具体的に示しておく。節点の座標は直角座標で与えるものとする。式(7)を変形すると

$$\varphi_m=\exp\{-jk(x\cos\gamma_m+y\sin\gamma_m)\}$$

したがって、式(10)より

$$g_{mn}=\exp\{-jk(x_n\cos\gamma_m+y_n\sin\gamma_m)\} \quad \cdots \cdots (16)$$

一方、 h_{mn} の求め方はつぎのようである。図4に示すように節点 P_n と P_{n+1} を結ぶ辺 P_nP_{n+1} あるいはその延長と原点を通るこの辺の法線との交点を $R_n(\bar{x}_n,$

図4 多角形の節点に関する記号

$\bar{y}_n)$ とすれば

$$\left. \begin{aligned} \bar{x}_n &= -\frac{(x_{n+1}y_n - x_ny_{n+1})(y_{n+1} - y_n)}{(x_{n+1} - x_n)^2 + (y_{n+1} - y_n)^2} \\ \bar{y}_n &= -\frac{(x_{n+1}y_n - x_ny_{n+1})(x_{n+1} - x_n)}{(x_{n+1} - x_n)^2 + (y_{n+1} - y_n)^2} \end{aligned} \right\} \quad \cdots \cdots (17)$$

であるが、法線が x 軸となす角を β_n とするとこれはつぎのように求められる。

$$\beta_n = \cos^{-1} \frac{\bar{x}_n}{\sqrt{\bar{x}_n^2 + \bar{y}_n^2}} \quad \cdots \cdots (18)$$

点 R_n がどの象限にあるかを判定して β_n を0から 2π までの範囲に換算しておくものとする。この角度 β_n を用い、

$$H_{mi}^{(n)} = - \int_{P_n}^{P_{n+1}} \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} \varphi_m d\Gamma \quad \cdots \cdots (19)$$

として積分計算を実行して式(16)の表現を用いれば

$$\begin{aligned} H_{mi}^{(n)} &= - \frac{\cos(\gamma_i - \beta_n)}{\sin(\gamma_i - \beta_n) + \sin(\gamma_m - \beta_n)} \\ &\quad \times (g_{m(n+1)}g_{i(n+1)} - g_{mn}g_{in}) \quad \cdots \cdots (20) \end{aligned}$$

となる。ただし、 $\sin(\gamma_i - \beta_n) + \sin(\gamma_m - \beta_n) = 0$ の特別な場合には

$$\begin{aligned} H_{mi}^{(n)} &= jk \{ -(x_{n+1} - x_n) \sin \beta_n + (y_{n+1} - y_n) \cos \beta_n \} \\ &\quad \times \exp[-jk(x_n \cos \beta_n + y_n \sin \beta_n)] \\ &\quad \times \{ \cos(\gamma_i - \beta_n) + \cos(\gamma_m - \beta_n) \} \quad \cdots \cdots (21) \end{aligned}$$

としなければならない。これらの各辺上での積分結果を合計して

$$h_{mi} = \sum_{n=1}^N H_{mi}^{(n)} \quad \cdots \cdots (22)$$

を得る。

φ_m, φ_i が方程式(1)を満たしていることにより、グリーンの定理を適用すればつぎの対称性が導かれる。

$$h_{mi} = h_{im} \quad \cdots \cdots (23)$$

$[h_{mi}]$ が対称行列であることにより、式(15)の三つの行列の積も結果は対称である。

なお、2・4節で述べたように式(6)には互いに反対方向に進む平面波を対で含めなければならないが、これをさらに進めて実数化することもできる。それには式(6)、(7)の代わりに次の表現を用いればよい。

$$\varphi = \sum_{i=1}^N [A_i \cos\{kr(\gamma_i - \theta)\} + B_i \sin\{kr(\gamma_i - \theta)\}] \quad \cdots \cdots (24)$$

ただし、 $0 \leq \gamma_i < \pi$ とする。行列 $[g], [h]$ もこれまでと同じように求めればよいが、実数化した方がプログラミングは若干複雑になる。式(24)で $\cos$ 項と $\sin$ 項の数を異なるようにとれば節点数が奇数の場合も扱える。

2・6 数値計算上の注意 前述の式(15)は形式上は有限要素と同じであり、同様に使うことができるが、特別な場合には注意が必要である。たとえば長方形領

域の全周の境界条件が $\varphi=0$ と $\partial\varphi/\partial n=0$ の二つの場合には後者に現れる $\partial\varphi/\partial x=0$ や $\partial\varphi/\partial y=0$ を満たす固有モードに対応するものを除けば固有値分布は一致する。それゆえ、長方形の場合に式(15)に対して $\{\Phi_i\}=\{0\}$ または $\{Q_n\}=\{0\}$ とおいて形式的に固有値方程式を導いても意味をなさない。なぜならば、両者で一致する固有値に対しては $|g_{mn}|^2/|h_{mi}|=0$ と $|h_{mi}|/|g_{mn}|^2=0$ に同じ解を要求することになるからである。このような場合には式(15)に至る前の段階で現れた式(12)または(14)を固有値方程式として採用しなければならない。ただし、この問題点は本方法に固有のものではなく、境界上にのみ配置した節点上のポテンシャルとフラックスの集中量との関係に帰着した表現であれば原理的にはどの方法でも同じである。本方法によって単一領域の全周で $\varphi=0$ または $\partial\varphi/\partial n=0$ が指定された問題を扱うときには長方形に限らず、計算能率からみてあらゆる場合に式(12)または(14)を用いるべきである。

本方法を用いて固有値計算をする場合、計算法は行列式探索法によることになる。複素数表現を用いる場合には行列式の値も計算上は複素数となるが、実際には実部または虚部のみに意味がある。どちらが意味を持つかは節点配置などによって決まる。実際に比較してみたところでは計算結果の精度は複素数形でも実数形でもほとんど差はないが、複素数形では行列式の値のたとえば実部に意味がある場合でも条件によっては誤差として現れる虚部との間にオーダーの差がほとんどないということも生じるので計算の安定性では実数形の方が優れているということはある。

また、式(12)の場合を除いて固有値方程式には零点だけでなく特異点(極)も現れることに留意する必要がある。本研究では2分法を用いて計算したが、2分法のループ内で行列式の値の絶対値が下降傾向にあるか上昇傾向にあるかで零点か特異点であるかの判定を行った。

なお、節点配置のデータを作成する際の座標の原点は領域の内部にとっても外部にとっても差しつかえないが、境界上にとると行列を特異にしてしまうことがあるので注意が必要である。

3. 計算結果と検討

本章で示す計算結果は比較のために示した有限要素法によるものを除いてすべてパーソナルコンピュータ上の倍精度フォートランで求めたものである。

本論文では提案する方法の精度などの基本的特性を知るために長方形および半円形領域の固有値を計算し

て厳密解との比較で検討した。計算に用いた節点配置などを図5に示す。表1~5に固有値の計算結果を示す。モード名は長方形の場合には x 軸および y 軸のそれぞれに垂直な φ の節線の数で、半円の場合には円領域の振動と見なしたときの節直径数と節円数の組合せで表した。

表1は長方形の全周に $\varphi=0$ の境界条件を与えた場合、表2は $\partial\varphi/\partial n=0$ を与えた場合の結果である。二重縮退のある場合は固有値方程式が2位の零点になるが、単純な2分法だけを用いたのでこれらは求めていない。比較的あらい節点位置であるにもかかわらず求めた固有値は厳密な値ときわめてよく一致している。表1, 2に参考として示したNASTRANで求めた有限要素法による値と比較すれば、提案する方法の精度のよさは明らかである。有限要素は四辺形とし、要素分割は図5(a)に破線で示した。境界条件が $\varphi=0$ の場合には前述のように単純な選点法を用いていること

(a)

(b)

(c)

図5 計算対象の節点配置

になっているのであるが、とくに問題はない。表1には振動形の誤差もかつこ内に付記した。この誤差はつぎのように求めた。 φ を近似解、 φ_0 を厳密解としていづれもつぎのように規格化する。

$$\int_{\Omega} \varphi^2 d\Omega = 1, \int_{\Omega} \varphi_0^2 d\Omega = 1$$

そのうえでつぎの量を誤差とした。

$$\varepsilon = \sqrt{\int_{\Omega} (\varphi - \varphi_0)^2 d\Omega}$$

表1によればかなり高次まで振動形も良好な精度を保っていることがわかる。この程度の計算規模にしては誤差は小さく、ほかの近似解法では得がたい精度といえることができる。表2の $\partial\varphi/\partial n=0$ の場合には固有値として求められるべき値が特異点として現れているところがある。この場合、境界条件が $\varphi=0$ のときと厳密には同じ固有値が対応しているのであるが、 k が大きくなると計算精度が悪くなり、 $|h_{mi}|$ の2位の零点と $1/|g_{mn}|$ の極の位置がずれたためにこの点が固有値方程式の零点として捕捉できなかったことによる。したがって、このあたりがこの方法の限界となる。ただし、この限界は節点数を増せば上げることはできる。この限界以下では境界条件が $\partial\varphi/\partial n=0$ と $\varphi=0$ とで厳密な固有値が同じ値になる点でも固有値方程式は零点として振舞い、固有値の精度は表1よりよい。これは積分の効果であると考えられる。なお、二つの境界条件で固有値が一致するのは領域形状が長方形など特殊であるからで、そのような場合には厳密解が得られるので近似法を必要とせず、實際上このことが問題になることはほとんどないと考えられる。

表3は長方形に対して混合境界条件を与えた場合である。境界条件は図5(b)で影を施した部分を $\varphi=0$ 、ほかの部分 $\partial\varphi/\partial n=0$ とした。固有値方程式は式(15)から求める。この場合には最低次の固有値の精度は表1, 2ほどではないが、示した範囲では全般に3けた程度は確保できている。しかしながら高次では偽の固有値が得られている。この値は全周を $\varphi=0$ や $\partial\varphi/\partial n=0$ としたときのものに一致している。このような結果が得られる理論的背景は明らかではないが、 k が大きくなると現れる本方法の限界の一つであろう。しかし、低次では問題はないので節点数と有効な解の次数の範囲との関係が明らかになれば実用的には差しつかえはないと考えられる。

つぎに表4, 5はそれぞれ半円の全周の境界条件を $\varphi=0$ と $\partial\varphi/\partial n=0$ とした場合の結果である。表4の精度はきわめてよいのに表5では実用上は問題がない程度ではあるものの、ほかの場合に比べて誤差がやや大

きくなっている。これは境界条件が $\partial\varphi/\partial n=0$ である場合には行列 $[h]$ が計算に関与するが、この行列の定式化に際して境界上での積分が必要なために円弧を多角形とした近似の誤差が直接現れたことによるものである。表2の長方形の場合には領域を多角形化したことによる誤差は生じないので結果の精度はよいのである。半円でも境界条件が $\varphi=0$ の場合には選点法を用いていることになるために多角形近似の誤差が現れ

表1 長方形の固有値($\varphi=0$)

Mode	Exact	Present Method (Mode Error)	FEM
(0, 0)	1.88786	1.88786 (7.04E-07)	1.91256
(1, 0)	2.61799	2.61799 (7.41E-06)	2.67152
(0, 1)	3.31152	3.31152 (3.47E-04)	3.58349
(2, 0)	3.51240	3.51241 (2.23E-04)	3.73463
(1, 1)	3.77572	3.77581 (1.69E-03)	3.94968
(2, 1)	4.44288	4.44196 (1.59E-02)	4.58257
(3, 0)	4.47362	4.47344 (2.92E-03)	5.02974
(0, 2)	4.82734	4.82802 (6.21E-03)	5.66307
(1, 2)	5.15684	5.16050 (7.40E-02)	5.77237
(3, 1)	5.23598	5.23536 (9.47E-03)	5.47723
(4, 0)	5.46653	5.46753 (4.71E-03)	6.32089
(2, 2)	5.66358	5.66810 (2.84E-02)	5.98053

表2 長方形の固有値($\partial\varphi/\partial n=0$)

Mode	Exact	Present Method	FEM
(1, 0)	1.04720	1.04720	1.05920
(0, 1)	1.57080	1.57080	1.61142
(1, 1)	1.88786	1.88786	1.91256
(2, 0)	2.09440	2.09440	2.19089
(2, 1)	2.61799	2.61799	2.67152
(0, 2)	3.14159	-	3.46410
(3, 0)	3.14159	-	3.46410
(1, 2)	3.31153	3.31153	3.58349
(3, 1)	3.51241	3.51244	3.73463
(2, 2)	3.77572	3.77580 (singular)	3.94968
(4, 0)	4.18879	4.18879	4.89898
(3, 2)	4.44288	4.44333	4.58257

表3 長方形の固有値(混合境界条件)

Mode	Exact	Present
(0, 0)	0.94393	0.94414
(1, 0)	1.75620	1.75451
(0, 1)	2.41367	2.41333
(2, 0)	2.73327	2.73023
(1, 1)	2.83179	2.83002
(2, 1)	3.52215	3.51998
(3, 0)	3.74840	3.74632
	-	3.77569 (pseud)
(0, 2)	3.96174	3.96286
(1, 2)	4.22950	4.22653
(3, 1)	4.35721	4.35381

表 4 半円の固有値 ($\varphi=0$)

Mode	Exact	Present
(1, 0)	3.83171	3.83171
(2, 0)	5.13562	5.13562
(3, 0)	6.38016	6.38016
(1, 1)	7.01559	7.01559
(4, 0)	7.58834	7.58835
(2, 1)	8.41724	8.41724
(5, 0)	8.77148	8.77147
(3, 1)	9.76102	9.76137
(6, 0)	9.9361	9.9429
(1, 3)	10.1735	10.1736
(4, 1)	11.0647	11.2350
(2, 3)	11.6198	11.6205

表 5 半円の固有値 ($\partial\varphi/\partial n=0$)

Mode	Exact	Present
(1, 0)	1.84118	1.85643
(2, 0)	3.05424	3.07951
(3, 0)	4.20119	4.23594
(4, 0)	5.31755	5.36149
(1, 1)	5.33142	5.37562
(5, 0)	6.41562	6.43312
(2, 1)	6.70613	6.76169
(6, 0)	7.50127	7.65133
(3, 1)	8.01523	8.08163
(1, 2)	8.53631	8.84296

ず、精度がよくなっていることは興味深いことである。平面波をベッセル関数で級数展開すれば⁽⁵⁾⁽⁷⁾積分を円弧上で行うことも可能ではあるが計算が複雑になり、近似法としての特長をかえって減殺することになるのでとくに高精度が必要な場合以外は多角形近似で十分であろう。

以上のように式(6)を出発点とする近似法は非常に高精度の結果を与える。これは式(6)が少なくとも凸形状の任意形状領域に関しては厳密解の言わば部分列になっているからであると考えられる。

4. 結 言

本論文では任意形状の単連結領域における二次元ヘルムホルツ方程式の固有値問題を扱う新しい近似解法

を検討した。この方法はあらゆる方向に進む平面波を重ね合せたものを一般解として採用し、これを境界上で離散化して固有値方程式を導くというもので、固有値方程式には固有値が陰に含まれることになるので行列式探索法によって数値計算を行う必要がある。しかしながら計算規模が小さくなるために計算能率はよく、また、解析解を基礎にしているという特徴を最大限にき出すことができるために結果の精度は計算規模に比較すればきわめてよいといえることができる。プログラミングも容易で、節点配置のデータさえ交換すればさまざまな問題に対応できる。それに加えて在来の有限要素や同じ方法で定式化したほかの部分領域と直接結合することができるので計算法としては柔軟性が大きいといえる。ただ、現在までのところでは、節点数と有効な固有値の数との関係や、どの程度の細長比の領域まで有効なのか、あるいは境界に凹部がある場合にはどの程度まで耐えられるのかなど明らかにできていないことも多いので引き続き検討を行っていく予定である。さらに、この方法の基礎となった平面波解は換言すれば一次元的な解である。変化する方向の異なる一次元的な解の重ね合せで一般解を構成する方法は方程式の形が異なっても有効な場合があると考えられるので、この面からの研究も行っていきたいと考えている。

本研究は平成4年度文部省科学研究費補助金（一般研究C）の助成を受けて行われたものである。関係各位に謝意を表する。

文 献

- (1) 浦田・中川, 機論, 54-507, C (1988), 2571.
- (2) 浦田・中川, 機論, 55-512, C (1988), 895.
- (3) 浦田・ほか2名, 機論, 56-523, C (1990), 595.
- (4) 浦田・熊谷, 機論, 57-538, C (1991), 1848.
- (5) Watson, G. N., *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, (1944), 19, Cambridge Univ. Press.
- (6) 森口・ほか2名, 数学公式, (1960), 179, 岩波書店.
- (7) 寺沢編, 自然科学者のための数学概論 (応用編), 521, 岩波書店.