初期たわみを有する片面補強正方形板の自由振動特性* (第3報, 非線形振動実験)

有 富 正 男^{*1}, 角 誠之助^{*2}

Free Vibration Characteristics of Eccentrically Stiffened Square Plates with an Initial Deflection (3rd Report, Experiments for Nonlinear Vibration)

Masao ARITOMI and Seinosuke SUMI

Experimental investigations are presented for nonlinear (large amplitude) fundamental vibrations of eccentrically stiffened square plates with a small initial deflection. The stiffened plates made of copper by photoetching are excited by an acoustic speaker. The effects of an initial deflection on the characteristics of the natural frequency depending on the amplitude are clarified. The experimental values for the ratio of nonlinear frequency to linear frequency agree well with the theoretical results obtained by applying the method of successive approximations.

Key Words: Free Vibration, Nonlinear Vibration, Vibration of Continuous System, Eccentrically Stiffened Plate, Initial Deflection, Experiments

1. 緒 言

薄板そのものの非線形曲げ振動問題に関しては, Herrmann⁽¹⁾⁽²⁾が板の静的たわみに関する Kármán の式を修正した大振幅振動の基礎式を確立して以来, 多くの研究がなされており^{(3)~(12)}, その中には初期たわみを考慮した研究^{(6)~(8)}や, 直交異方性板を取扱った研究^{(9)~(12)}も見受けられる. 著者らは第1報⁽¹³⁾で, smeared out 法により直交補強板を等価剛性をもつ直交異方性板に置き換え, 板のたわみ理論により初期たわみを有する片面補強長方形板の大振幅非線形自由振動に対する支配方程式を導出した. さらに, Galerkin 法と逐次近似法を用いて理論解析し, 片面補強正方形板に対する数値計算例を示して補強材パラメータ, 補強材の配置様式, 初期たわみの大きさ, 面内境界条件などのほか振幅の大きさが固有振動数に及ぼす影響を明らかにした. 第2報⁽¹⁴⁾では, スピーカによる音響加振法で片面補強正方形板の線形振動実験を行い, 理論解析で用いた smeared out 法が初期たわみを

有する片面補強板の自由振動解析でも有効な手法となることを示し, 同時に初期たわみの大きさや補強材配置による異方性が固有振動モードに及ぼす影響を, 理論と実験の両面から明らかにした.

本報告はそれらに引き続き, 片面補強正方形板の基本振動に関する非線形振動実験を行い, 第1報の理論解析の妥当性を検証したものである. まず, スピーカの音響加振力の大きさを適当に設定することにより, 逐次振動振幅を変えて板中央点の振動変位と固有振動数を測定し, 補強板の固有振動数の振幅依存性が初期たわみの大きさによって異なることを確認する. また, 逐次近似法で求めた線形固有振動数に対する非線形系の固有振動数の比の近似式は実験値とほぼ一致し, 初期たわみを有する片面補強正方形板の非線形振動問題にも十分適用可能であることを示す.

2. 実 験 要 領

図1に, 非線形振動実験装置の概略図を示す. 実験は第2報で用いたのと同じ片面補強板の試験片を使用して, その基本振動に対して行ったが, 試験片の詳細は第2報で述べたので, ここではその概要を簡単に再記しておく. 片面補強板の試験片は, 厚さ 0.7 mm のタフピッチ銅板をフォトエッチングにより腐食させ,

* 平成元年7月14日 第31回構造強度に関する講演会において講演, 原稿受付 平成4年12月18日.

^{*1} 正員, 鹿児島大学工学部(〒890 鹿児島市郡元1-21-40).

^{*2} 正員, 久留米工業大学工学部(〒830 久留米市上津町2228-66).

非補強部の厚さ h (この板厚 h の等厚正方形板を前報⁽¹³⁾⁽¹⁴⁾と同様に非補強板と呼ぶ) が 0.32 mm の二方向補強板と一方向補強板を製作した。試験片の寸法は、補強材と非補強板の伸び剛性比 α_s, α_r と曲げ剛性比 β_s, β_r がそれぞれ2組の一定値をもつように設定し、補強材本数 n が10本と20本のそれぞれ合計4種類ずつを製作した⁽¹⁴⁾。また、試験片の外形寸法はすべて $150 \text{ mm} \times 150 \text{ mm}$ の正方形である。次に、残留ひずみを取除くため焼鈍を行い、この焼鈍後の試験片を理論解析で用いた余弦曲面の初期たわみ形状をもつ金型に挟み、電気炉内で 250°C まで加熱して一定時間保持したのち徐冷することで初期たわみを与えた。このとき、補強材が初期たわみ曲面の凹側になるようにし、加熱時間を調整することで初期たわみの大きさを種々変えることができた。

非線形振動実験は次の要領で行った。まず、試験片①を挟んで16本のボルトに一定トルクをかけて締付けた取付枠②を、4個の支持台③上に水平に設置してクランプ④で固定する。このとき、支持台③はそれ自体が振動しないように重量のあるものとした。次に、発振器からの正弦波をパワーアンプで増幅して口径 160 mm のスピーカ⑤に入力し、その音響出力をホーン型ノズルで集中させて試験片の中央部を音響加振し、試験片中央部の振動変位を測定範囲 $\pm 1 \text{ mm}$ (出力電圧は $\pm 10 \text{ V}$ が対応する) の非接触型変位計⑥で測定する。ところで、初期たわみを有する板の非線形振動は、振幅の増加につれて固有振動数が高くなるハードばねタイプと低下するソフトばねタイプの2通りがある。実験では、音響出力を一定に保ち、加振振動数を変化させて共振点を求めたが、その際、振幅が最大振幅点に到達せずにジャンプすることを避けるため、ハードばねタイプの試験片に対しては加振振動数を増加させていった場合に、ソフトばねタイプの試験片では

減少させていった場合に、それぞれ振動変位が極大を示すときの振動数を固有振動数とした。同時にこのときの振動変位はデジタルメモリに読込ませてパーソナルコンピュータで処理して計測した。

3. 振 動 変 位

初期たわみを有する片面補強長方形板の非線形自由振動に対するモード方程式は、第1報の式(31)で与えられた。基本振動に対するモード方程式は、その第1報の式(31)で $m=n=1$ かつ $q_{11}=9, Z_{11}=1/4$ において次のように簡単な式として求まる。

$$\bar{A}_{11,rr} + \phi_1 \bar{A}_{11} + \phi_2 \bar{A}_{11}^2 + \phi_3 \bar{A}_{11}^3 = 0 \quad \cdots \cdots (1)$$

ここで、係数 ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 は

$$\left. \begin{aligned} \phi_1 &= \frac{\pi^4 \{ h_{11} + {}^1x_{11} \bar{B} + ({}^1\mu_{11} + \Lambda \cdot {}^1\nu_{11}) \bar{B}^2 \}}{9(1+\bar{\rho})} \\ \phi_2 &= \frac{\pi^4 \{ {}^2x_{11} + ({}^2\mu_{11} + \Lambda \cdot {}^2\nu_{11}) \bar{B} \}}{36(1+\bar{\rho})} \\ \phi_3 &= \frac{\pi^4 ({}^3\mu_{11} + \Lambda \cdot {}^3\nu_{11})}{144(1+\bar{\rho})} \end{aligned} \right\} \quad \cdots \cdots (2)$$

であり、式(2)の中の $\bar{\rho}$ は補強材と非補強板の質量比、 $\bar{B}$ は板中央点の最大初期たわみ B を非補強板の厚さ h で割った無次元最大初期たわみ、 Λ は面内境界条件⁽¹³⁾によって

$$\left. \begin{aligned} [A] \text{ 面内可動周辺: } \Lambda=0 \\ [B] \text{ 面内不動周辺: } \Lambda=1 \end{aligned} \right\} \quad \cdots \cdots (3)$$

の値をとる。なお、この1項モード近似による線形固有振動数 ω は

$$\omega = \sqrt{\phi_1 \{ \sqrt{D/(\rho h)} / b^2 \}} \quad \cdots \cdots (4)$$

と表される。ここで、上式中の D, ρ および b はそれぞれ非補強板の曲げ剛性、密度および辺の長さである。

また、式(2)の中の各係数は付録1に示してある。

式(1)のモード方程式は振動変位 $\bar{A}_{11}$ の2乗の項を含んでいるため、第1報でも述べたように初期たわみのたわみ線から曲率の増加する方向への振幅 A_1 と曲率の減少する方向への振幅 A_2 ではその値が異なったものになる。そこでここでは、無次元振幅 $\bar{A}_1 = A_1/h$ と $\bar{A}_2 = A_2/h$ の大小関係について考えてみる。ただし、 $\bar{A}_1 \geq 0, \bar{A}_2 \geq 0$ である。モード方程式(1)をいわゆるエネルギー積分し、 $\bar{A}_{11} = \bar{A}_1$ と $\bar{A}_{11} = -\bar{A}_2$ のとき $\bar{A}_{11,r} = 0$ であることを考慮すると、振幅 $\bar{A}_1$ と $\bar{A}_2$ の間には

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \phi_1 \bar{A}_1^2 + \frac{1}{3} \phi_2 \bar{A}_1^3 + \frac{1}{4} \phi_3 \bar{A}_1^4 \\ &= \frac{1}{2} \phi_1 \bar{A}_2^2 - \frac{1}{3} \phi_2 \bar{A}_2^3 + \frac{1}{4} \phi_3 \bar{A}_2^4 \quad \cdots \cdots (5) \end{aligned}$$

の関係式が成立する。式(5)では各物理量は正の実数を表すので、この式が成立するためには

図1 非線形振動実験装置

$$\bar{A}_1 \leq \bar{A}_2 \dots\dots\dots (6)$$

でなくてはならない。しかも、 $\bar{A}_2$ と $\bar{A}_1$ の差は振幅が増大するにつれて大きくなることがわかる。

実験では、加振力の大きさを適当に設定することにより、逐次振動振幅を変えて板中央点の振動変位を測定した。その結果の例として、補強材本数 n が 10 本と 20 本で、それらが辺に平行に配置された一方向補強板で測定した、4 種類の振動振幅での振動変位を図 2 に示す。まず (a) 図の初期たわみのない ($\bar{B}=0$) 補強板は振幅の大きさが等しい $A_1=A_2$ の振動を行っているのに対し、(b) 図の初期たわみ ($\bar{B}=3.12$) を有する補強板は初期たわみのたわみ線近傍で安定な周期振動を行い、しかも曲率の減少する方向への振幅 A_2 が曲率の増加する方向への振幅 A_1 よりも常に大きくなっている。しかしながら、この初期たわみを有する場合には、振幅が大きくなるに伴って幾分乱れた波形を生じているが、これは一方向補強板の場合、補強材が一方向に偏心して配置されているため、振動中に非補強部が曲げとともにねじりを受けやすくなるためではないかと思われる。

4. 振動数比 ω^*/ω の近似式の検討

式(1)の近似解は、振動変位 $\bar{A}_{11}(\tau)$ を曲率の減少する方向への振幅 $\bar{A}_2$ のべき級数で展開し、逐次近似法を使用すれば求められる⁽¹⁵⁾。そしてこのとき、非線形系の固有振動数 ω^* と線形固有振動数 ω との比、すなわち振動数比 ω^*/ω は第 1 報の式(32)で近似的に表され、それを再記すると

$$\begin{aligned} \frac{\omega^*}{\omega} = & \left[1 + \left\{ \frac{3}{4} \cdot \mu_2 - \frac{5}{6} (\mu_1)^2 \right\} \bar{A}_2^2 \right. \\ & - \left\{ \frac{1}{2} \cdot \mu_1 \cdot \mu_2 - \frac{5}{9} (\mu_1)^3 \right\} \bar{A}_2^3 \\ & + \left\{ -\frac{3}{128} (\mu_2)^2 + \frac{185}{96} (\mu_1)^2 \mu_2 \right. \\ & \left. \left. - \frac{235}{288} (\mu_1)^4 \right\} \bar{A}_2^4 - \dots\dots \right]^{1/2} \dots\dots\dots (7) \end{aligned}$$

となる。ただし、 μ_1 と μ_2 は振動の非線形性を表すパラメータで

$$\mu_1 = \phi_2/\phi_1, \mu_2 = \phi_3/\phi_1 \dots\dots\dots (8)$$

とおいたものである。また、式(1)の近似解は曲率の増加する方向への振幅 $\bar{A}_1$ によっても表すことができるはずであり、初期たわみを有する補強板の非線形振動問題では、どちらの近似式が適切であるかを検討する必要がある。そこで、振動変位 $\bar{A}_{11}(\tau)$ を振幅 $\bar{A}_1$ のべき級数で展開して逐次近似法を使用すれば、振動数比 ω^*/ω が

$$\begin{aligned} \frac{\omega^*}{\omega} = & \left[1 + \left\{ \frac{3}{4} \cdot \mu_2 - \frac{5}{6} (\mu_1)^2 \right\} \bar{A}_1^2 \right. \\ & + \left\{ \frac{1}{2} \cdot \mu_1 \cdot \mu_2 - \frac{5}{9} (\mu_1)^3 \right\} \bar{A}_1^3 \\ & + \left\{ -\frac{3}{128} (\mu_2)^2 + \frac{185}{96} (\mu_1)^2 \mu_2 \right. \\ & \left. \left. - \frac{235}{288} (\mu_1)^4 \right\} \bar{A}_1^4 + \dots\dots \right]^{1/2} \dots\dots\dots (9) \end{aligned}$$

で与えられる。式(7)と式(9)を比較してみると、振幅 $\bar{A}_2$ と $\bar{A}_1$ のべき級数の奇数乗の項の符号のみが異なるだけである。

そこで、これら二つの近似式と補強材本数 n が 20 本の二方向補強板の実験結果を比較したものが図 3 であり、これらの図では、縦軸に振動数比 ω^*/ω を、横軸に無次元振幅 $\bar{A}_1 = A_1/h$ と $\bar{A}_2 = A_2/h$ をとって示している。また、図中の α_s, α_r は補強材と非補強板の伸び剛性比、 β_s, β_r は曲げ剛性比、 β_{sr} はねじり剛性比、 $\gamma_s \sim \gamma_{21}$ は曲げと面内伸びの無次元連成剛性で、それらの値は第 2 報の式(1)で計算したものである。さらに○印は実験結果、破線と実線は式(9)および式(7)でそれぞれ $\bar{A}_1$ と $\bar{A}_2$ の 4 乗の項までとって計算した面内可動周辺と面内不動周辺の理論曲線である。まず、これらの近似計算の結果が適切であるかを検討するため、モード方程式(1)で面内不動周辺の場合を取上げて Runge-Kutta-Gill 法により

$$\bar{A}_{11}(0) = -2 = (-\bar{A}_2), \bar{A}_{11,r}(0) = 0 \dots\dots\dots (10)$$

の初期条件のもとで計算して振動波形を求めた。その結果、曲率の増加方向への無次元振幅 $\bar{A}_1 = 1.37$ と無次元固有振動数 $\omega^* = 106.28$ が得られ、この $\bar{A}_1 = 1.37$ と $\bar{A}_2 = 2$ の値は振幅の関係式(5)を満足する。そこで、

(a) $\bar{B}=0, n=10$

(b) $\bar{B}=3.12, n=20$

図 2 板中心点の振動変位 (一方向補強板)

図3の実線からこれら振幅値に対する振動数比の値を求めると、左の図では $\omega^*/\omega = 0.914$ 、右の図では $\omega^*/\omega = 0.913$ となって両者はよく一致し、しかもこれらの値は Runge-Kutta-Gill 法から得られる $\omega^*/\omega = \omega^*/\sqrt{\phi_1} = 0.918$ とほとんど一致する。したがって、振幅の4乗の項までで近似した式(9)と式(7)は、実用的な意味で十分な精度をもつものであるといえる。次に図3の実験値をみると、起振力の変化に対応する振幅 $\bar{A}_1$ の変化は小さく、振幅 $\bar{A}_2$ を採用した場合に比べて測定誤差が含まれやすくなるものと思われる。それゆえ、初期たわみを有する補強板の非線形振動問題に対しては、曲率の減少方向への振幅 $\bar{A}_2$ のべき級数の形で表した振動数比の近似式(7)のほうが、曲率の増加方向への振幅 $\bar{A}_1$ を用いた式(9)よりも適切であるといえる。したがって、これ以後、振動数比 ω^*/ω の値は振幅 $\bar{A}_2$ のべき級数の形で表した式(7)で、 $\bar{A}_2$ の4乗の項までとって計算することにする。

5. 固有振動数の振幅依存性

図4と図5は、それぞれ二方向補強板と一方向補強板について、固有振動数の振幅依存性に及ぼす初期たわみの影響をより明瞭に示すため、縦軸に振動数比 ω^*/ω を、横軸に曲率の減少方向への無次元振幅 $\bar{A}_2$ をとって示したものである。これらの図で、各試験片の線形固有振動数の実験値 f_{EX} 、および式(4)で計算した1項モード近似による面内可動周辺と面内不動周辺の理論値 f_{MO} 、 f_{IM} はそれぞれ次のとおりである。ただし参考のため、カッコ内には9項モード近似による計算結果⁽¹⁴⁾が示してある。

図4

- (a) $f_{EX} = 168.9 \text{ Hz}$, $f_{MO} = f_{IM} = 173.7(169.2) \text{ Hz}$
- (b) $f_{EX} = 198.1 \text{ Hz}$, $f_{MO} = 205.8(193.4) \text{ Hz}$,
 $f_{IM} = 229.2(214.3) \text{ Hz}$
- (c) $f_{EX} = 278.2 \text{ Hz}$, $f_{MO} = 253.9(222.6) \text{ Hz}$,
 $f_{IM} = 309.5(267.5) \text{ Hz}$

図5

- (a) $f_{EX} = 135.7 \text{ Hz}$, $f_{MO} = f_{IM} = 137.4(134.3) \text{ Hz}$
- (b) $f_{EX} = 148.6 \text{ Hz}$, $f_{MO} = 166.8(159.4) \text{ Hz}$,
 $f_{IM} = 189.7(178.6) \text{ Hz}$
- (c) $f_{EX} = 205.7 \text{ Hz}$, $f_{MO} = 228.5(193.9) \text{ Hz}$,
 $f_{IM} = 295.2(241.0) \text{ Hz}$

さらにまた、図5の(a)図と(c)図の○印は、振動変位の四つの代表例が図2の(a)図と(b)図に示される場合の測定結果である。

ところで、線形固有振動数 ω の値は振幅 $\bar{A}_2$ とは無関係に一定であるので、図4と図5の(a)図の初期たわみのない ($\bar{B} = 0$) 補強平板の振動は、固有振動数が振幅の増加につれて高くなるハードばねタイプとなり、しかも振動数比 ω^*/ω の実験値は面内不動周辺の理論曲線によく一致している。次に、(b)図のように初期たわみ $\bar{B}$ が振幅 $\bar{A}_2$ の最大値2よりも小さな場合には、振幅 $\bar{A}_2$ が初期たわみ $\bar{B}$ の大きさに等しい1.71もしくは1.48付近を越えるまで固有振動数 ω^* の値はわずかに減少し、振幅がそれ以上の大きさになると振動数はわずかに増加し始める傾向にある。このような特性は両面对称補強板の場合にもみられた⁽¹⁶⁾。したがって、初期たわみを有する補強板の振動は、振幅が増大して最大初期たわみの値を越えると、

図3 振動数比 ω^*/ω と振幅 $\bar{A}_1$ および $\bar{A}_2$ の関係 (二方向補強板, $\bar{B} = 2.57$, $n = 20$)

ソフトばねタイプからハードばねタイプへ反転する⁽¹⁷⁾ものと思われる。また、(c)図の場合のように初期たわみ $\bar{B}$ が振幅 $\bar{A}_2$ の最大値 2 よりも大きな補強板の振動は、実験した振幅の範囲内では、(a)図の初期たわみのない場合とは異なり固有振動数が振幅の増加につれて低下するソフトばねタイプとなる。しかも、振動数比 ω^*/ω の実験値はいずれの場合も面内不動周辺の理論値にほぼ一致しており、理論解析で用いた逐次近似法は初期たわみを有する片面補強正方形板の非線形振動問題にも十分適用可能であるといえる。

6. 結 言

本報告は、初期たわみを有する片面補強正方形板の基本振動について、非線形振動実験を行って固有振動数の振幅依存性を調査し、第1報の理論解析結果と比較してその妥当性を検証したものである。得られた結果を要約すると次のとおりである。

(1) 非線形系の固有振動数 ω^* を線形固有振動数

ω で割った振動数比 ω^*/ω の実験値は、曲率の減少する方向への振幅 $\bar{A}_2$ のべき級数で表した近似式(7)の面内不動周辺の理論曲線とほぼ一致した。

(2) この結果より、逐次近似法を使用した第1報の手法は、初期たわみを有する片面補強正方形板の非線形振動問題にも十分適用可能であることが確認できた。

(3) 初期たわみのない補強平板の振動は、常に固有振動数が振幅の増加につれて高くなるハードばねタイプとなることが実験により検証できた。

(4) 初期たわみを有する補強板の振動は、振幅が最大初期たわみの値を越えると、ソフトばねタイプからハードばねタイプへ反転する傾向にあることがわかった。

最後に、卒業研究として実験に協力いただいた橋本久仁日氏(現在 ソニー株式会社)と瀬戸口隆一氏(現在 株式会社アーレスティ)に深く感謝する。

図4 振動数比 ω^*/ω と振幅 $\bar{A}_2$ の関係(二方向補強板)

図5 振動数比 ω^*/ω と振幅 $\bar{A}_2$ の関係(一方向補強板)

付録1 式(2)の ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 の中の各係数

式(2)の ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 の中の各係数は、非補強板が第1報と同じく直交異方性長方形板とすると

$$\left. \begin{aligned} h_{11} &= 16 \left[\left(3 \frac{H_{\xi}}{\lambda^4} + 2 \frac{H_{\xi\eta}}{\lambda^2} + 3 H_{\eta} \right) \right. \\ &\quad \left. + 2 \left(\frac{\Gamma_s^2}{\lambda^4 K_{11}} + \frac{\Gamma_r^2}{K_{22}} \right) + \lambda^2 \chi_{11}^2 \phi_{11} \right] \\ {}^1\chi_{11} &= 16(\chi_{10}\phi_{10} + \chi_{01}\phi_{01} + \chi_{11}\phi_{11}) \\ {}^1\mu_{11} &= \frac{17}{8} \left(\frac{1}{K_{11}} + \frac{1}{\lambda^4 K_{22}} \right) + \frac{1}{\lambda^2} (4\phi_{11} + \phi_{12} + \phi_{21}) \\ {}^1\nu_{11} &= 27 \left[\frac{1 + \alpha_s}{\lambda^4} + 2 \frac{E_{12}}{\lambda^2 E_{11}} + \left(\frac{E_{22}}{E_{11}} + \alpha_r \right) \right] \\ {}^2\chi_{11} &= 3 \cdot {}^1\chi_{11}, {}^2\mu_{11} = 6 \cdot {}^1\mu_{11}, {}^2\nu_{11} = 6 \cdot {}^1\nu_{11} \\ {}^3\mu_{11} &= 8 \cdot {}^1\mu_{11}, {}^3\nu_{11} = 8 \cdot {}^1\nu_{11} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

と表される。ただし、式(11)の中の χ_{11}, ϕ_{11} らは

$$\left. \begin{aligned} \chi_{pq} &= p^4 \frac{\Gamma_s}{\lambda^4} + p^2 q^2 \frac{\Gamma_{sr}}{\lambda^2} + q^4 \Gamma_r \\ \phi_{pq} &= \frac{1}{p^4 (K_{11}/\lambda^2) + p^2 q^2 (2K_{12} + K_{33}) + q^4 \cdot \lambda^2 K_{22}} \\ p, q &= 0, 1, 2, \dots\dots, \text{かつ } \phi_{00} = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

とおいたものである。これらの式の中で、 λ はアスペク

ト比、 α_s, α_r は伸び剛性比、 E_{11}, E_{22}, E_{12} は非補強板の弾性係数でそれぞれ第1報の式(17), (11), (9)で与えられ、また $H_{\xi}, H_{\eta}, H_{\xi\eta}$ は第1報の式(6)、 $K_{11}, K_{22}, K_{12}, K_{33}$ は式(7)、 $\Gamma_s, \Gamma_r, \Gamma_{sr}$ は式(8)で与えられる係数である。

文 献

- (1) Herrmann, G., *NACA Tech. Note*, 3578 (1956), 1.
- (2) Chu, H. N. and Herrmann, G., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, 23 (1956), 532.
- (3) Yamaki, N., *Z. Angew. Math. Mech.*, 41 (1961), 501.
- (4) Bauer, H. F., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, 35 (1968), 47.
- (5) 八巻・永井, 機論, 39-327 (1973), 3334.
- (6) Nowinski, J. L., *AIAA J.*, 2-6 (1964), 1025.
- (7) Celep, Z., *Z. Angew. Math. Mech.*, 56 (1976), 423.
- (8) 八巻・千葉, 機論, 48-435, C (1982), 1687.
- (9) Prabhakara, M. K. and Chia, C. Y., *J. Sound Vib.*, 52-4 (1977), 511.
- (10) Prathap, G. and Varadan, T. K., *J. Sound Vib.*, 56-4 (1978), 521.
- (11) Banerjee, B., *J. Sound Vib.*, 82-3 (1982), 329.
- (12) Eslami, H. and Kandil, O. A., *AIAA J.*, 27-7 (1989), 955.
- (13) 有富・角・桐岡・戸谷, 機論, 59-558, C (1993), 322.
- (14) 有富・角, 文献(13)の330ページ.
- (15) 角・有富・桐岡, 航宇誌, 36-416 (1988), 418.
- (16) 角・有富・桐岡, 航宇誌, 38-443 (1990), 660.
- (17) 田村・岡部・末岡, 機論, 57-537, C (1991), 1431.