二次元非線形構造系の実験的同定法*

安田 仁彦^{*1}, 神谷 恵輔^{*1}, 駒木根 宗伸^{*2}Experimental Identification Technique for Nonlinear
Two-Dimensional Structures

Kimihiko YASUDA, Keisuke KAMIYA and Munenobu KOMAKINE

In previous papers, the authors proposed an experimental identification technique for nonlinear beams. In this paper, an attempt is made to generalize the technique so that it can be used to identify nonlinear two-dimensional structures such as plates and shells. First, it is shown that analysis of the equations of motion for such structures is always reduced to analysis of the modal equations. Then a technique is proposed which enables us to determine the modal equations by use of experimental data. Numerical simulation is conducted for some nonlinear plates, and the validity of the technique is confirmed.

Key Words: Identification, Nonlinear Vibration, Vibration of Continuous System

1. ま え が き

機械や構造物などの構造系を実験的に同定するための有力な手段として実験モード解析法があり、設計の有力な手段として広く用いられている。しかし実験モード解析法は線形理論に基づいた手法であり、系を線形系として同定するため、対象あるいは目的によっては正しい同定結果が期待できない。

機械や構造物の使用条件が厳しくなるにつれて、より精密な応答を予測する必要性が増し、このため対象とする系を非線形系として同定する多くの手法が提案されてきている^{(1)~(20)}。しかしこれまで提案された方法は自由度が小さい多自由度系を対象としたものに限られている。

前報で著者らは、一般の非線形構造系の同定法を開発することを目的として、一次元構造系である非線形はりに対する同定法を提案し、その有効性を数値シミュレーションと実験により確認した^{(21)~(23)}。

この報告でははじめに、前報で提案した同定法が、非線形二次元構造系の同定法として一般化できること

を示す。次に提案した同定法の有効性を確かめるため、例として非線形板を取上げ、数値シミュレーションを行う。

2. 問 題 設 定

膜、板、殻などの二次元構造系は、大きな振幅で振動するとき非線形系となる。本研究では、このような系を実験的に同定することを検討する。このための準備として、数学モデルから応答を求めるという解析の問題をまず考える。

対象とする系の変形前の中央面に直交曲線座標系 x, y を定め、この面の垂直方向のたわみを w 、面内の合応力を定める応力関数を F とおく。面に垂直方向に外力 q が作用し、減衰係数 c の粘性減衰力が作用するものとする、この系に対する Kármán 形の運動方程式は

$$\begin{aligned} \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + c \frac{\partial w}{\partial t} - N_0 \nabla^2 w + D \nabla^4 w \\ = L(w, F) + \nabla_k^2 F + q \dots\dots\dots (1) \\ \frac{1}{Eh} \nabla^4 F = -\frac{1}{2} L(w, w) - \nabla_k^2 w \end{aligned}$$

となる。ここに ρ, h, N_0, D, E はそれぞれ密度、厚さ、面内の初期張力、曲げこわさ、縦弾性係数である。

* 原稿受付 平成4年12月17日。

*¹ 正員、名古屋大学工学部(〒464-01 名古屋市千種区不老町)。*² 日本電装(株)(〒448 刈谷市昭和町1-1)。

また式(1)中の演算子 ∇^2 , ∇_k^2 , L は, k_1, k_2 を x, y 方向の曲率, f, g を任意の関数として,

$$\begin{aligned}\nabla^2 f &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \nabla_k^2 f = k_1 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + k_2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \\ L(f, g) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} \\ &\quad + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \dots\dots\dots (2)\end{aligned}$$

を意味する。式(1)において, k_1, k_2 に適当な値を与えれば殻の運動方程式が, $k_1 = k_2 = 0$ とすれば板の運動方程式が, さらに $D = 0$ とすれば膜の運動方程式がそれぞれ得られる。式(1)に適当な境界条件をつけ加えたものが数学モデルで, これを解くことが解析の問題である。

この問題を解くため, あらかじめ二つの固有値問題を解いておく。一つは, 式(1)に対応する線形系の固有値と固有関数を, もとの問題と同じ境界条件のもとに定める問題である。固有値を p , 関数 w, F に対する固有関数を Φ, G とおくと, これらを定める方程式は

$$\left. \begin{aligned}\rho h p^2 \Phi - N_0 \nabla^2 \Phi + D \nabla^4 \Phi &= \nabla_k^2 G \\ \frac{1}{Eh} \nabla^4 G &= -\nabla_k^2 \Phi\end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

である。これを解いて得られる固有値を $p_n (n=1, 2, \dots)$ とし, $p = p_n$ に対する固有関数を $\Phi = \Phi_n, G = G_n$ とおく。ここで Φ_n は線形系のたわみのモード関数であり, p_n は固有角振動数であることを注意しておく。もう一つの固有値問題は, 方程式

$$\frac{1}{Eh} \nabla^4 H = \lambda^4 H \dots\dots\dots (4)$$

に対する固有値 λ と固有関数 H を, もとの問題の F に対する境界条件のもとに定めることである。これを解いて得られる固有値を $\lambda_n (n=1, 2, \dots)$ とし, $\lambda = \lambda_n$ に対する固有関数を $H = H_n$ とおく。

以上のようにして得られた関数 Φ_n, G_n, H_n を用いて, 式(1)の未知量 w, F を

$$\left. \begin{aligned}w &= \sum_{n=1}^{\infty} X_n \Phi_n \\ F &= \sum_{n=1}^{\infty} X_n C_n + \sum_{n=1}^{\infty} Y_n H_n\end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

の形に展開する。ここに X_n, Y_n は時間の未知関数である。後の便宜のため, たわみのモード関数 Φ_n の係数 X_n を, モード解析で用いられる用語を準用してモード座標とよぶことにする。

未知量 w, F を式(5)の形におくとき, Φ_n, G_n, H_n の定め方から, w, F は常に境界条件を満たす。したがって解析の問題は, 式(1)を満たすように X_n, Y_n を定めることである。これを次に考える。

まず式(5)を式(1)の第2式に代入し, $\Phi = \Phi_n, G = G_n$ が式(3)を満たすこと, $H = H_n$ が式(4)を満たすことに注意すると, 式(5)が式(1)の第2式を満たす条件として

$$\sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m^4 Y_m H_m = -\frac{1}{2} L \left(\sum_{i=1}^{\infty} X_i \Phi_i, \sum_{j=1}^{\infty} X_j \Phi_j \right) \dots\dots\dots (6)$$

を得る。この式の両辺に H_n を掛け, 得られた式を x, y に関して問題の領域で積分すると, 固有関数 H_n の直交性から

$$Y_n = \sum_{i,j=1}^{\infty} a_{n,ij} X_i X_j \dots\dots\dots (7)$$

を得る。ここに

$$a_{n,ij} = -\frac{1}{2\lambda_n^4} \frac{\int L(\Phi_i, \Phi_j) H_n dx dy}{\int H_n^2 dx dy} \dots\dots\dots (8)$$

である。積分はいずれも問題の領域に関するものとする。

次に式(5)が式(1)の第1式を満たす条件を求めると

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{\infty} \left(\rho h \ddot{X}_m \Phi_m + c \dot{X}_m \Phi_m + \rho h p_m^2 X_m \Phi_m \right) \\ = L \left(\sum_{i=1}^{\infty} X_i \Phi_i, \sum_{j=1}^{\infty} X_j G_j \right) \\ + L \left(\sum_{i=1}^{\infty} X_i \Phi_i, \sum_{j=1}^{\infty} Y_j H_j \right) + \sum_{j=1}^{\infty} Y_j \nabla_k^2 H_j + q\end{aligned} \dots\dots\dots (9)$$

となる。ここに記号「 $\cdot$ 」は時間に関する微分を表す。式(9)の両辺に Φ_n を掛けて問題の領域で積分し, さらに式(7)を代入すると

$$\begin{aligned}m_n \ddot{X}_n + c_n \dot{X}_n + k_n X_n + \sum_{i,j=1}^{\infty} a_{n,ij} X_i X_j \\ + \sum_{i,j,k=1}^{\infty} \beta_{n,ijk} X_i X_j X_k = q_n \\ (n=1, 2, 3, \dots) \dots\dots\dots (10)\end{aligned}$$

を得る。ここに各係数は

$$\begin{aligned}m_n &= \int \rho h \Phi_n^2 dx dy \\ c_n &= \int c \Phi_n^2 dx dy \\ k_n &= \int \rho h p_n^2 \Phi_n^2 dx dy \\ q_n &= \int q \Phi_n dx dy \\ a_{n,ij} &= -\int \left\{ L(\Phi_i, G_j) + \sum_{m=1}^{\infty} a_{m,ij} \nabla_k^2 H_m \right\} \\ &\quad \times \Phi_n dx dy \\ \beta_{n,ijk} &= -\sum_{m=1}^{\infty} a_{m,ij} \int L(\Phi_i, H_m) \Phi_n dx dy\end{aligned} \dots\dots\dots (11)$$

である。積分はいずれも問題の領域に関するものとする。

る。後の便宜のため、式(11)の各量のうち、 q_n をモード外力と呼ぶことにする。

式(10)はモード座標 X_n に関する無限個の連立常微分方程式となっており、モード方程式とよばれる。ここで得られたモード方程式は、未知量を線形モード関数で展開して得たものであるため、線形項では連成せず非線形項のみで連成していること、その非線形項はモード座標の2乗と3乗の項よりなることなどに注意しておこう。

得られたモード方程式を解いてモード座標 X_n を定め、これを式(7)、(5)に順次代入することによって、たわみ w を求めることができる。これで応答を求めるという解析の問題が解決された。

そこで実験的同定の問題設定に移る。対象とする系を実験的に同定するとは、その系の動的な挙動を記述する数学モデルを実験データから決定することである。これまでの議論からわかるように、対象としている非線形二次元構造系の動的な挙動はモード方程式(10)によって定めることができる。したがって逆に、実験データによってモード方程式(10)を定めることができれば、対象としている系が実験的に同定されたことになる。モード方程式は無限個の方程式からなるが、解析の問題では、実用上はいくつかの方程式のみを用い、他は無視する。これと同じように同定の問題でも、必要ないくつかの方程式を定めれば、同定の目的を達したことになる。そこで加えた外力とそれに対する系の応答の実験データから、モード方程式のうち必要ないくつかを定める方法を提案し、これを同定法の提案とする。

3. 同定法の提案

非線形構造系の同定の問題において、特に難しい問題は非線形特性を定めることである。これに対し線形のモード関数 ϕ_n は、例えば有限要素法あるいは微小振幅に対する実験モード解析の方法などによって比較的精度よく求められる。そこでここでは、モード関数 ϕ_n は利用できるという前提のもとに、実験的同定法を提案する。

提案する同定法はいくつかの過程から成る。以下、必要となる順に各過程を説明する。

3・1 モード座標 X_n とモード外力 q_n の決定 最初の過程は、外力 q とそれに対する応答であるたわみ w の実験データからモード座標 $X_n(n=1, 2, \dots, M)$ とモード外力 $q_n(n=1, 2, \dots, M)$ を定めることである。

たわみ w の測定点として、対象とする構造系の上

に N 個の点を定め、各測定点におけるたわみ $w_m(m=1, 2, \dots, N)$ を測定する。式(5)の第1式において、たわみの測定点と同数のモード座標 $X_n(n=1, 2, \dots, N)$ を考慮し他を無視すれば、測定値 w_m と未知のモード座標 X_n は近似的に

$$\begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_N \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \cdots & \phi_{1N} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \cdots & \phi_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{N1} & \phi_{N2} & \cdots & \phi_{NN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_N \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots (12)$$

の関係を満たす。ここに右辺のマトリックス成分 $\phi_{mn}(m, n=1, 2, \dots, N)$ は、 m 番めの測定位置における n 番めのモード関数 ϕ_n の値で、既知の量である。式(12)は X_n に関する線形連立方程式であり、この方程式が特異にならない限り X_n が求められる。この連立方程式を解いて $X_n(n=1, 2, \dots, N)$ を定める。以上の方法を各時刻について繰返せば、 X_n を時間の関数として求めることができる。求めた $X_n(n=1, 2, \dots, N)$ の中に無視できる程度の小さいものがあれば、それらは無視する。ここでは M 個のモード座標 $X_n(n=1, 2, \dots, M)$ が主要であったとする。

モード外力 $q_n(n=1, 2, \dots, M)$ を定める問題は簡単である。外力 q の実験データを用いて、式(11)の q_n の式

$$q_n = \int q \phi_n dx dy \quad \dots\dots\dots (13)$$

に現れる積分を各時刻について数値的に行えば、時間の関数として q_n が求められる。

以上で X_n と q_n が得られたので、次にモード方程式を定める方法を考える。

3・2 モード方程式の形に対する考察 二次元非線形構造系のモード方程式は、2章の理論によれば式(10)の形となる。実験的にこの式を定める方法を考える前にいくつか考察を加えておく。まず式(10)の減衰項は、式(1)において減衰がたわみ速度 $\partial w / \partial t$ に比例するとして得られたものであり、実際の場合にはもう少し一般化したほうがよいと思われる。また非線形項の例えば $X_i X_j$ の係数と $X_j X_i$ の係数は、同定にあたってはまとめておく必要がある。最後に、主要なモード座標は M 個であったので、求める方程式は M 個のモード座標に関する M 個の方程式とする。以上のことから、求めるモード方程式を

$$m_n \ddot{X}_n + \sum_{m=1}^M c_{nm} \dot{X}_m + k_n X_n$$

$$+ \sum_{\substack{i,j=1 \\ (i \leq j)}}^M \alpha_{n,ij} X_i X_j + \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ (i \leq j \leq k)}}^M \beta_{n,ijk} X_i X_j X_k \\ = q_n \quad (n=1, 2, \dots, M) \quad \dots\dots\dots (14)$$

の形におく。ここに c_{nm} は

$$c_{nm} = c_{mn} \quad (n \neq m) \quad \dots\dots\dots (15)$$

を満たすとする。このように方程式の形が定められたので、同定問題は、この式の未知パラメータ m_n , c_{nm} , k_n および $\alpha_{n,ij}$, $\beta_{n,ijk}$, ...を実験的に定めることに帰着される。

3.3 モード方程式のパラメータの決定 同定のため系に加える外力 q としてここでは周期外力を採用する。周期を T とする任意の周期外力を系に加え、外力と同じ周期の定常応答のたわみ w を実験データとして測定する。その実験データから、3.1節に述べた方法によって q_n および X_n を求める。このようにして求めた q_n と X_n は外力と同じ周期を持つので、加えた外力の周期 T から決まる角振動数 $\omega (=2\pi/T)$ を用いてこれらを

$$q_n = (q_n)_0 \\ + (q_n)_1 \cos \omega t + (q_n)_2 \cos 2\omega t + \dots \\ + (q_n)_1^* \sin \omega t + (q_n)_2^* \sin 2\omega t + \dots \\ \dots\dots\dots (16)$$

$$X_n = (X_n)_0 \\ + (X_n)_1 \cos \omega t + (X_n)_2 \cos 2\omega t + \dots \\ + (X_n)_1^* \sin \omega t + (X_n)_2^* \sin 2\omega t + \dots$$

の形のフーリエ級数に展開する。ここにフーリエ係数 $(q_n)_0$, $(q_n)_1$, $(q_n)_2$, ... および $(X_n)_0$, $(X_n)_1$, $(X_n)_2$, ... は、FFT(高速フーリエ変換)などの手法により容易に求められる既知の量である。次に式(14)に含まれる項 $X_i X_j$, $X_i X_j X_k$, ...を上で求めたモード座標 X_n の演算によって求め、それらも

$$X_i X_j = (X_i X_j)_0 \\ + (X_i X_j)_1 \cos \omega t + (X_i X_j)_2 \cos 2\omega t + \dots \\ + (X_i X_j)_1^* \sin \omega t + (X_i X_j)_2^* \sin 2\omega t + \dots \\ X_i X_j X_k = (X_i X_j X_k)_0 \\ + (X_i X_j X_k)_1 \cos \omega t + (X_i X_j X_k)_2 \cos 2\omega t + \dots \\ + (X_i X_j X_k)_1^* \sin \omega t + (X_i X_j X_k)_2^* \sin 2\omega t + \dots \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \dots\dots\dots (17)$$

の形のフーリエ級数に展開する。ここでもフーリエ係数 $(X_i X_j)_0$, $(X_i X_j)_1$, ...は既知の量である。

式(16)および(17)を式(14)に代入し、ハーモニクバランスの原理を用いて、両辺の定数項および $\cos \omega t$, $\sin \omega t$, ...の係数を適当な次数で打切ってそれぞ

れ等しいとおく。このようにして未知パラメータに関する線形方程式を得る。パラメータ m_n , c_{nm} , k_n および $\alpha_{n,ij}$, $\beta_{n,ijk}$, ...を成分とする未知のベクトル $\{S\}$ を導入すれば、この方程式は

$$[A]\{S\} = \{Q\} \quad \dots\dots\dots (18)$$

の形にまとめることができる。ここに $[A]$ は式(16)の第2式と式(17)に現れるフーリエ係数から決まるマトリックス、 $\{Q\}$ は式(16)の第1式に現れるフーリエ係数から決まるベクトルであり、いずれも既知である。これらは、求めたいモード方程式の数、フーリエ級数展開の打ち切り次数などを指定すれば容易に求められる。一般的な表示は面倒であるから、ここでは省略する。

加える外力の周期 T としていくつかの値を適当に与え、上と同じようにして式(18)の形の方程式を求め、それらを合すると未知数の数より多い方程式が得られる。これを再び式(18)の形の方程式にまとめる。

最後に得られた式(18)に最小二乗法を適用すれば、 $\{S\}$ は

$$\{S\} = ([A]^T [A])^{-1} [A]^T \{Q\} \quad \dots\dots\dots (19)$$

によって定められる。必要があれば重みマトリックスを用いて同定の精度を上げるよう試みることができる。重みマトリックス $[W]$ を用いるとき、 $\{S\}$ は式(19)の代わりに

$$\{S\} = ([A]^T [W] [A])^{-1} [A]^T [W] \{Q\} \quad \dots\dots\dots (20)$$

で与えられる。式(19)あるいは(20)によって $\{S\}$ が定められ、モード方程式が求められたことになる。以上が同定法の提案である。

4. 数値シミュレーション

二次元構造系の例として板を取上げ、提案した同定法の有効性を、数値シミュレーションによって検討する。このため適当な外力を加えた場合の板の応答を数値的に求め、加えた外力の値と合せて実験データとみなし、提案した同定法を適用する。

4.1 長方形板 はじめに周辺で単純支持された長方形板を考える。板の隣合う二辺に沿って x 軸, y 軸を定めれば、対象としている板の線形モード関数 ϕ_n は周知のように

$$\phi_n = \sin \frac{i\pi x}{a} \sin \frac{j\pi y}{b} \quad \dots\dots\dots (21)$$

である⁽²⁴⁾。ここに a , b は板の二辺の長さ、 i , j はモードの次数を規定する整数である。この線形モード関数は既知であるとする。

応答を数値的に求めるため、長方形板の寸法および物理定数を次のように定める。

表 1 長方形板の同定結果の例

	Exact	Identified		Exact	Identified		Exact	Identified
m_1 kg	3.92	3.97	N/m^3	$\times 10^{11}$	$\times 10^{11}$	N/m^3	$\times 10^{11}$	$\times 10^{11}$
c Ns/m	$\times 10^2$	$\times 10^2$	$\beta_{1.111}$	1.61	1.63	$\beta_{1.266}$	0.00	1.02
c_{11}	1.20	1.21	$\beta_{1.112}$	0.00	0.00	$\beta_{1.333}$	0.00	-0.14
c_{12}	0.00	0.00	$\beta_{1.113}$	-1.25	-1.30	$\beta_{1.334}$	0.00	0.12
c_{13}	0.00	0.00	$\beta_{1.114}$	0.00	-0.01	$\beta_{1.335}$	0.00	2.58
c_{14}	0.00	0.01	$\beta_{1.115}$	0.00	0.08	$\beta_{1.336}$	0.00	0.77
c_{15}	0.00	0.01	$\beta_{1.116}$	0.00	0.00	$\beta_{1.344}$	-3.38	-2.87
c_{16}	0.00	0.00	$\beta_{1.122}$	3.59	3.66	$\beta_{1.345}$	0.00	-0.91
k_1 N/m	$\times 10^5$	$\times 10^5$	$\beta_{1.123}$	0.00	0.01	$\beta_{1.346}$	0.00	1.75
N/m^2	$\times 10^8$	$\times 10^8$	$\beta_{1.124}$	0.00	0.17	$\beta_{1.355}$	2.09	1.34
$\alpha_{1.11}$	0.00	0.00	$\beta_{1.125}$	0.00	0.11	$\beta_{1.356}$	0.00	-1.59
$\alpha_{1.12}$	0.00	0.00	$\beta_{1.126}$	-2.55	-2.30	$\beta_{1.366}$	0.00	-1.86
$\alpha_{1.13}$	0.00	0.00	$\beta_{1.133}$	4.75	4.92	$\beta_{1.444}$	0.00	0.10
$\alpha_{1.14}$	0.00	0.00	$\beta_{1.134}$	0.00	0.13	$\beta_{1.445}$	0.00	2.68
$\alpha_{1.15}$	0.00	0.00	$\beta_{1.135}$	0.00	-1.00	$\beta_{1.446}$	0.00	2.03
$\alpha_{1.16}$	0.00	0.00	$\beta_{1.136}$	0.00	-0.10	$\beta_{1.455}$	0.00	2.65
$\alpha_{1.22}$	0.00	0.00	$\beta_{1.144}$	6.57	7.28	$\beta_{1.456}$	-7.93	-11.62
$\alpha_{1.23}$	0.00	0.00	$\beta_{1.145}$	0.00	-0.16	$\beta_{1.466}$	0.00	1.49
$\alpha_{1.24}$	0.00	0.00	$\beta_{1.146}$	0.00	-1.33			
$\alpha_{1.25}$	0.00	0.00	$\beta_{1.155}$	5.42	5.53			
$\alpha_{1.26}$	0.00	0.00	$\beta_{1.156}$	0.00	0.06			
$\alpha_{1.33}$	0.00	0.00	$\beta_{1.166}$	6.27	6.17			
$\alpha_{1.34}$	0.00	0.00	$\beta_{1.222}$	0.00	0.00			
$\alpha_{1.35}$	0.00	0.00	$\beta_{1.223}$	1.68	1.69			
$\alpha_{1.36}$	0.00	0.00	$\beta_{1.224}$	0.00	0.04			
$\alpha_{1.44}$	0.00	0.00	$\beta_{1.225}$	0.00	-0.10			
$\alpha_{1.45}$	0.00	0.00	$\beta_{1.226}$	0.00	-0.07			
$\alpha_{1.46}$	0.00	0.00	$\beta_{1.233}$	0.00	0.06			
$\alpha_{1.55}$	0.00	0.00	$\beta_{1.234}$	0.00	-0.49			
$\alpha_{1.56}$	0.00	0.00	$\beta_{1.235}$	0.00	-0.51			
$\alpha_{1.66}$	0.00	0.00	$\beta_{1.236}$	4.11	3.99			
			$\beta_{1.244}$	0.00	-0.38			
			$\beta_{1.245}$	8.49	9.08			
			$\beta_{1.246}$	0.00	-0.26			
			$\beta_{1.255}$	0.00	0.36			
			$\beta_{1.256}$	0.00	4.84

- Points where deflection is measured
▲ Points where external force is applied

図 1 長方形板

$$\begin{aligned}
 a &= 0.65 \text{ m}, & b &= 0.35 \text{ m} \\
 h &= 0.5 \times 10^{-3} \text{ m}, & \rho &= 7.84 \times 10^3 \text{ kg/m}^3 \\
 D &= 2.36 \text{ Nm}, & E &= 2.06 \times 10^{11} \text{ Pa} \\
 c &= 120 \text{ Ns/m}^3, & N_0 &= 4.0 \times 10^3 \text{ N/m}
 \end{aligned}
 \dots\dots\dots (22)$$

外力として,

$$Q = Q_0 \delta(x - x_f) \delta(y - y_f) \cos \omega t \dots\dots\dots (23)$$

の形の集中調和外力を加えるものとする。ここに Q_0 は外力の大きさ, (x_f, y_f) は外力を加える位置を表す。ここでは外力の大きさを $Q_0 = 13 \text{ N}$ とした。また外力を加える位置 (x_f, y_f) は図 1 に示す 4 点とした。たわみの測定位置は図 1 に示す 12 点とした。

たわみ w を数値的に求めるには次のようにした。実際の実験データのたわみはかなり高次までのモード成分を含むので、ここでは 10 次までのモード成分を含むものとする。そこで式(10)のモード方程式のはじめの 10 式を、式(23)で与えられる外力に対し、適当な初期条件のもとに数値的に積分し、外力と同じ周期の解が得られるまで続ける。こうして得られる解 X_n を式(5)に代入してたわみ w を求め、これを用いて各測定点におけるたわみ w_i を計算する。

外力の周期 T を変えて、測定点のたわみ w_m を多数得た。たわみのデータの例として、図 1 の点 1 に外力を加えたときの測定位置 1 から 3 におけるたわみ $w_m (m=1, 2, 3)$ の振幅を振動数 ω の関数として示すと、図 2 の○印のようになる。このようなたわみのデータから、式(12)によりモード座標を求めた。モード座標の例として、図 2 のデータから得たものの振幅を振動数 ω の関数として図 3 に示す。この図の結果および図 1 に示す他の点に外力を加えた場合に求めたモード座標の結果から、4 次までのモード座標は大きく、5, 6 次はかなり小さいが全く無視することはできないこと、7 次以上は無視できることがわかった。以下これを考慮して同定を進めた。

6 次までのモード座標を考慮し、式(14)のはじめの六つのモード方程式を定めることにすると、未知パラ

メータの数は相当多くなる。力学原理によって、式(10)に含まれる非線形項の係数は、非線形項がポテンシャルから導かれるようにある関係が満たされなければならない。これを考慮に入れると、独立な未知パラメータ数が減少する。同定にあたってはこのようにして未知パラメータの数を減らした。さらに5, 6次のモード座標についてはその振動が小さいため、ポテンシャルにおいて5, 6次のモード座標の3乗以上の項を無視することとし、独立な未知パラメータの数をさらに減少させた。このように未知パラメータの数を減少させ、式(14)の6番めまでのモード方程式を定めることとした。フーリエ級数展開の打ち切り次数は3にした。また最小二乗法によって未知パラメータを定めるとき、重みマトリックスは用いなかった。

以上のようにして、提案した方法に従ってモード方程式の各パラメータを定めた。この場合の結果の例として、第1番めのモード方程式に現れる未知パラメータの値を表1に示す。比較のためこの表には、たわみのデータを求めるために用いたパラメータの値を合せて示してある。表1から、同定結果のパラメータはもとの値とよく対応していることがわかる。ここに示さなかったものも含めて同定結果の妥当性を見るため、すべてのパラメータの値を用いて測定位置でのたわみの振幅を求め、同定に用いたもとのデータを示している図2に重ねて実線で示す。図2から、同定結果はもとのデータをよく再現しており、提案した同定法が有効であることがわかった。

図2 長方形板のたわみの振幅

4.2 円板 次に周辺で固定支持された円板に対する数値シミュレーションの結果を示す。座標系として板の中心を極とする極座標系(r, θ)を取る。この場合の線形モード関数は

$$\Phi_n = \begin{cases} \{J_m(p_{jn}r) + x_n I_m(p_{in}r)\} \cos m\theta \\ \{J_m(p_{jn}r) + x_n I_m(p_{in}r)\} \sin m\theta \end{cases} \quad \dots (24)$$

図3 長方形板のモード座標

図4 円板

図5 円板のたわみの振幅

である⁽²⁵⁾。ここに J_m , I_m はそれぞれ m 次のベッセル関数, 変形ベッセル関数であり, p_{Jn} , p_{In} は

$$\rho h p^2 \Phi - N_0 \nabla^2 \Phi + D \nabla^4 \Phi = 0 \quad \dots\dots\dots (25)$$

の固有値 p を用いて定められる定数である。式(24)の線形モード関数は既知であるとする。

振動データを数値的に求めるため, 円板の寸法および物理定数を次のように定める。

$$\begin{aligned} a &= 2.15 \times 10^{-1} \text{ m}, & h &= 0.5 \times 10^{-3} \text{ m} \\ D &= 2.36 \text{ Nm}, & E &= 2.06 \times 10^{11} \text{ Pa} \\ \rho &= 7.84 \times 10^3 \text{ kg/m}^3, & \nu &= 0.3 \\ c &= 120 \text{ Ns/m}^3, & N_0 &= 0.4 \times 10^3 \text{ N/m} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (26)$$

外力として

$$Q = Q_0 \delta(r - r_f) \delta(\theta - \theta_f) \cos \omega t \quad \dots\dots\dots (27)$$

の形の集中調和外力を採用する。ここに Q_0 は外力の大きさ, (r_f, θ_f) は外力を加える位置を表す。ここでは外力の大きさ Q_0 は $Q_0 = 3 \text{ N}$ とした。または外力を加える位置 (r_f, θ_f) は図4に示す4点とした。たわみの測定位置は図4に示す13点とした。

たわみ w を数値的に求めるのに, モード方程式のはじめの10式を用い, 式(27)で与えられる周期外力に対し, 長方形板の場合と同様に求めた。

外力の周期 T を変えて, 測定点のたわみ w_m を多数得た。たわみのデータの例として, 図4に示す点1に外力を加えたときの測定位置1から3におけるたわみ $w_m (m=1, 2, 3)$ の振幅と ω の関係として示すと, 図5の○印のようになる。このようなたわみのデータ

図6 円板のモード座標

から, 式(12)によりモード座標を求めた。この結果の例として, 図4のデータから得たモード座標の振幅を図6に示す。この図6および図4に示す他の点に外力を加えた場合に求めたモード座標の結果から, この場合にも, 7次以上のモード座標は無視できること, 4次, 5次のモード座標はあまり大きくないことがわかった。そこで式(14)のはじめの六つのモード方程式を定めることとした。ここでもポテンシャルの存在を仮定し, ポテンシャルにおける4次, 5次のモード座標の3乗以上の項を無視して未知パラメータの数を減らした。フーリエ級数展開の打ち切り次数は3にした。また重みマトリックスは用いなかった。

以上のようにして同定を行った。その結果得られたパラメータの値を用いて, 測定位置でのたわみを求め, 図5に重ねて実線で示す。同定結果はもとのデータをよく再現していることがわかる。非線形の円板において, ある振動数において非線形系に特有の回転様式の振動が発生することが報告されている⁽²⁶⁾。同定によって得たモード方程式を用いてもこの様式の振動の発生を確かめることができた。このように提案した同定法が有効であることが確認された。

5. ま と め

本論文では、前報で提案した非線形はりの同定法を非線形二次元構造系に適用できるよう一般的手法として提案した。例として長方形および円形の非線形板を取上げて数値シミュレーションを行い、提案した同定法が有効であることを示した。

文 献

- (1) Ibanez, P., Identification of Dynamic Parameters of Linear and Nonlinear Structural Models from Experimental Data, *J. Nucl. Eng. Des.*, 25(1973), 30.
- (2) Ibrahim, S. R. and Mikulcik, E. C., The Experimental Determination of Vibration Parameters from Time Responses, *Shock Vib. Bull.*, 46-5(1976), 187.
- (3) Masri, S. F. and Caughey, T. K., A Nonparametric Identification Technique for Non-linear Dynamic Problems, *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, 46-2(1979), 433.
- (4) Udawadia, F. E. and Kuo, Chin-Po., Non-Parametric Identification of a Class of Non-Linear Close-Coupled Dynamic Systems, *Earthqu. Eng. Struct. Dyn.*, 9(1981), 385.
- (5) Stephan, C. U. and Ivan, E. M., *ASME Paper*, 82-DET-138(1982).
- (6) Okubo, N., The Effect of Non-Linearity on Transfer Function Measurement, *Sound Vib.*, 16-11(1982), 34.
- (7) Kirshenboim, J. and Ewins, D. J., A Method for Recognizing Structural Nonlinearities in Steady-State Harmonic Testing, *Trans. ASME, J. Vib. Acoust. Stress Reliab. Des.*, 106-1(1984), 49.
- (8) 渡部・佐藤, 多自由度非線形系の周波数応答解析, 機論, 51-467, C(1985), 1765.
- (9) 大久保・山本・仁礼, ヒルベルト変換を用いた非線形振動解析-モーダルアナリシスの基礎と応用に関する研究, 精密工学会誌, 52-3(1986), 485.
- (10) Stanway, R., Sproston, J. L and Stevens, N. G., A Note on Parameter Estimation in Non-Linear Vibrating Systems, *Proc. Instn. Mech. Eng.*, 199-C, 1(1985), 79.
- (11) Yongxin, Y. and Ibrahim, S. R., A Nonparametric Identification for a Variety of Discrete Nonlinear Vibrating Systems, *Trans. ASME, J. Vib. Acoust. Stress Reliab. Des.*, 107-1(1985), 60.
- (12) 渡部・佐藤, 非線形ビルディングブロック法の応用に関する研究, 機論, 52-481, C(1986), 2397.
- (13) Busby, H. R., Nopporn, C. and Singh, R., Experimental Modal Analysis of Non-Linear Systems: A Feasibility Study, *J. Sound Vib.*, 180-3(1986), 415.
- (14) 佐藤・岩田・内潟, 一自由度非線形系のパラメータ同定法, 機論, 54-497, C(1988), 87.
- (15) 安田・河村・渡辺, 多自由度系の同定法(同定法の提案), 機論, 53-495, C(1987), 2191.
- (16) 安田・河村・渡辺, 多自由度系の同定法(ノイズのある場合の同定), 機論, 54-500, C(1988), 816.
- (17) 安田・河村, クーロン摩擦の作用する多自由度系の同定法, 機論, 54-504, C(1988), 1708.
- (18) 安田・河村, 非線形振動系のノンパラメトリック同定法(方法の提案と一自由度系への応用), 機論, 54-507, C(1988), 2550.
- (19) 安田・渡辺, 多自由度非線形系の同定法(同定システムの開発), 機論, 55-512, C(1989), 833.
- (20) 神谷・安田, 多自由度非線形振動系の同定法(統計的手法の導入による精度向上の試み), 機論, 57-545, C(1991), 3113.
- (21) 安田・神谷, 非線形はりの同定法(第1報, 同定法の提案), 機論, 55-515, C(1989), 1609.
- (22) 安田・神谷, 非線形はりの同定法(第2報, 非一様はりの同定法), 機論, 56-525, C(1990), 1178.
- (23) 安田・神谷, 非線形はりの同定法(実際のはりへの応用), 機論, 57-535, C(1991), 749.
- (24) 例えば Nowacki, W., *Dynamics of Elastic Systems*, (1963), 206, Chapman & Hall.
- (25) Yasuda, K. and Hayashi, N., Subharmonic Oscillations of a Prestressed Circular Plate, *Bull. JSME*, 25-202(1982), 620.
- (26) 安田・鳥居, 円形膜の非軸対称非線形強制振動, 機論, 52-473, C(1986), 294.