摩擦特性をもつ付加構造物系の初通過破壊確率の推定法*

青 木 繁^{*1}Estimation Method for First Excursion Probability
of Secondary System with Friction

Shigeru AOKI

There are many nonlinear characteristics in a secondary system. The friction characteristic, which is seen in mechanical supports and joints, is one of these. In this paper, the estimation method of the first excursion probability of a secondary system with friction, subjected to earthquake excitations, is proposed. This method is based on the equivalent linearization method. By using this method, the effect of frictional force on the first excursion probability is examined. In order to examine the effectiveness of the proposed method, the obtained results are compared with those obtained by the simulation method.

Key Words: Random Vibration, Friction Vibration, Seismic Motion, Reliability, Nonlinear Vibration

1. 緒 言

重要度の高い機器・配管などの付加構造物系は大地震時にもその機能が維持されなければならない。このような付加構造物系に対して、耐震安全性を確率論的に評価することの重要性が指摘されている。著者らはこのような観点から、地震動入力を受ける付加構造物系の初通過破壊確率を推定する手法を提案した⁽¹⁾。さらに、非線形履歴復元力特性をもつ付加構造物系の初通過破壊確率は、線形系の場合と比較して低減されることを示した⁽²⁾。非線形特性は多くの構造物にみられ、その種類も多い。各種の支持部や締結部にみられる摩擦特性もそのひとつである。摩擦特性をもつ構造物の初通過破壊確率の推定法に関する研究は少なく⁽³⁾、十分に確立されているとはいえない。

本論文では上記の点を考慮し、摩擦特性をもつ付加構造物系の初通過破壊確率を理論的に推定する手法を提案した。次に、この手法を用いて摩擦特性が付加構造物系の初通過破壊確率におよぼす影響について検討した。さらに、シミュレーション法によって、提案した

手法の妥当性を検討した。

2. 解析モデルおよび入力地震動

付加構造物系とそれが設置されている主構造物系の間に摩擦特性がある場合を対象とし、解析モデルとしては図1に示すような力学モデルを用いた。図中の m は質量、 c は減衰係数、 k はばね定数、 x は絶対変位を表す。添字 s は付加構造物系、 p は主構造物系を表す。また、 y は地表面の絶対変位、 F_r は摩擦力を表す。入力地震動としては、耐震設計用応答スペクトルに適合する非定常模擬地震動を用いた。図2に本報で用いた目標応答スペクトル⁽⁴⁾を示した。この図で、 S は1質点系の最大応答加速度と最大地動加速度の比である応答倍率を表す。振幅非定常性を表す包絡関数としては、図3で表される関数⁽⁵⁾を用いた。

3. 初通過破壊確率の推定法

3・1 運動方程式 図1に示した力学モデルで、付加構造物系と主構造物系の間の相対変位 z_s および主構造物系と地表面の間の相対変位 z_p に着目する。付加構造物系が主構造物系に対して相対運動をしている場合に、運動方程式は、

* 平成2年9月24日 第68期全国大会講演会において講演、原稿受付 平成4年10月27日。

*1 正員、東京都立工業高等専門学校(〒140 東京都品川区東大井1-10-40)。

$$\left. \begin{aligned} \ddot{z}_s + 2h_s\omega_s\dot{z}_s + \omega_s^2 z_s + f &= -\ddot{y} - \ddot{z}_p \\ \ddot{z}_p + 2h_p\omega_p\dot{z}_p + \omega_p^2 z_p \\ &- \gamma(2h_s\omega_s\dot{z}_s + \omega_s^2 z_s + f) = -\ddot{y} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

ここで、 h は減衰比、 ω は固有円振動数、 γ は質量比 m_s/m_p 、 f は摩擦特性を表す項である。摩擦特性として、図4に示すクーロン摩擦を導入し、摩擦力に相当する加速度を $f_r (=F_r/m_s)$ とすると、 f は、

$$f = f_r \cdot \dot{z}_s / |\dot{z}_s| \dots\dots\dots (2)$$

式(1)は主構造物系の絶対加速度 $\ddot{x}_p$ が f_r よりも大きい場合に成立する。この条件が成立しない場合には

図1 解析に用いた力学モデル

図2 目標応答スペクトル (5%減衰)

図3 包絡関数

図4 Coulomb 摩擦特性

付加構造物系が主構造物系に対して静止する条件を考えなければならない。この場合には、付加構造物系の絶対加速度を $\ddot{x}_s$ とすると、

$$\dot{z}_s = 0 \text{ and } |\dot{x}_s| < f_r \dots\dots\dots (3)$$

であり、この条件を満足したときの変位を z_{st} とすると、

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}_s &= \ddot{x}_p \\ \dot{z}_s &= 0 \\ z_s &= z_{st} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

主構造物系に対して相対運動を開始する条件は、

$$\left. \begin{aligned} |\ddot{x}_p - \omega_s^2 z_{st}| &> f_r; z_{st} > 0, \\ \dot{x}_p > 0 \text{ or } z_{st} < 0, \dot{x}_p < 0 \\ |\ddot{x}_p + \omega_s^2 z_{st}| &> f_r; z_{st} < 0, \\ \dot{x}_p > 0 \text{ or } z_{st} > 0, \dot{x}_p < 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

式(5)より、 $z_s = 0$ の状態から地震入力を受けた場合に、 $|\ddot{x}_p| > f_r$ となるまで付加構造物系は主構造物系に対して運動しない。したがって、 f_r は摩擦特性のない線形系の場合の $\ddot{x}_p$ の最大値 $|\ddot{x}_p|_{\max}$ を基準として次のように定めた。

$$f_r = \xi |\ddot{x}_p|_{\max} \dots\dots\dots (6)$$

ここで、 ξ は摩擦力の大きさを表すパラメータで、 $0 \leq \xi \leq 1$ である。 $|\ddot{x}_p|_{\max}$ は図2における T_p に対応する固有周期の S に地動加速度の最大値 $|\ddot{x}_g|_{\max}$ を乗じて定めた。 $|\ddot{x}_g|_{\max}$ は1となるように正規化した。

3.2 初通過破壊確率の推定式 付加構造物系の変位応答 z_s の絶対値が最初に破壊レベル B_D を超過した瞬間に付加構造物系が破壊するものとする、初通過破壊確率 P_f は次式から求まる。

$$P_f(t) = 1 - \exp \left\{ -2 \int_0^t \nu(t) dt \right\} \dots\dots\dots (7)$$

ここで、 $\nu(t)$ は z_s が B_D を超過する時刻が統計的に独立であると仮定すると、

$$\begin{aligned} \nu(t) &= \frac{1}{2\pi} \frac{D}{\sigma_{z_s}^2} \left[\exp \left\{ -\frac{B_D^2}{2\sigma_{z_s}^2} \left(1 + \frac{\chi_{z_s}^2 z_s}{D} \right) \right\} \right. \\ &\quad \left. + B_D \chi_{z_s} z_s \sqrt{\frac{\pi}{2D\sigma_{z_s}^2}} \right. \\ &\quad \left. \times \exp \left(-\frac{B_D^2}{2\sigma_{z_s}^2} \right) \{ 1 + \operatorname{erf}(C) \} \right] \dots\dots\dots (8) \end{aligned}$$

ここで、 $C = \frac{\chi_{z_s} z_s B_D}{\sqrt{2D\sigma_{z_s}^2}}$ 、 $D = \sigma_{z_s}^2 \sigma_{z_s}^2 - \chi_{z_s}^2 z_s^2$ 、

$$\operatorname{erf}(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u \exp(-y^2) dy$$

σ^2 および χ はそれぞれ添字で示された変数の分散および共分散を表す。本論文で用いた非定常模擬地震動のパワースペクトル密度関数 $G(\omega)$ は次式で表される⁽¹⁾。

$$G(\omega) = \frac{(2h_g\omega_g\omega)^2 + \omega_g^4}{(\omega^2 - \omega_g^2)^2 + (2h_g\omega_g\omega)^2} G_0 \dots\dots\dots (9)$$

ここで、 ω_g は地盤の卓越振動数、 h_g は地盤の減衰比、 G_0 は基盤への入力が白色雑音であるとしたときのパワースペクトル密度を表す。各パラメータの値は、 $h_g = 0.5$ 、 $T_g (= 2\pi/\omega_g) = 0.285$ s、 $G_0 = 1.94 \times 10^{-3}$ (1/s) である⁽¹⁾。付加構造物系と主構造物系との間の相対変位 z_s 、相対速度 $\dot{z}_s$ 、主構造物系と地表面の間の相対変位 z_p 、相対速度 $\dot{z}_p$ 、地表面と基盤の間の相対変位 z_g 、相対速度 $\dot{z}_g$ に関する結合確率密度関数 p に対する Fokker-Planck の式は次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} = & -\frac{\partial p}{\partial z_p} \dot{z}_p + 2h_p\omega_p p \\ & -\frac{\partial p}{\partial \dot{z}_p} \{-2h_p\omega_p \dot{z}_p - \omega_p^2 z_p \\ & + \gamma(2h_s\omega_s \dot{z}_s + \omega_s^2 f) + I(t)(2h_g\omega_g \dot{z}_g + \omega_g^2)\} \\ & -\frac{\partial p}{\partial z_s} \dot{z}_s + 2h_s\omega_s(1+\gamma)p \\ & -\frac{\partial p}{\partial \dot{z}_s} \{-2h_s\omega_s(1+\gamma) \dot{z}_s \\ & -\omega_s^2(1+\gamma)z_s - (1+\gamma)f + 2h_p\omega_p \dot{z}_p + \omega_p^2 z_p\} \\ & -\frac{\partial p}{\partial z_g} \dot{z}_g + 2h_g\omega_g p + \frac{\partial p}{\partial \dot{z}_g} (2h_g\omega_g \dot{z}_g + \omega_g^2 z_g) \\ & + \frac{\partial^2 p}{\partial \dot{z}_g^2} \frac{\pi G_0}{2} \dots\dots\dots (10) \end{aligned}$$

式(8)を用いるためには z_s および $\dot{z}_s$ に関する 2 次モーメントが必要となる。式(10)に部分積分法を適用することによって、 z_s 、 $\dot{z}_s$ 、 z_p 、 $\dot{z}_p$ 、 z_g 、 $\dot{z}_g$ の 2 次モーメントに関するモーメント方程式が得られる⁽⁶⁾。この方程式を解いて式(8)および式(7)を用いることによって P_f を求めた。

3.3 等価線形化法 f は次のように等価線形化した。

$$f = C_e \dot{z}_s \dots\dots\dots (11)$$

ここで、 C_e は等価減衰係数を表す。ここでは、摩擦力が比較的小さい場合を対象とし、主要動付近では式(1)を満足する振動が生じるものとした。また、主要動が比較的に長いことから、定常理論によって C_e を近似的に求めた。正弦波入力に対する等価減衰係数は⁽⁷⁾、

$$C_e = 4f_r / (\pi\omega_i Z_s) \dots\dots\dots (12)$$

ここで、 Z_s は応答振幅、 ω_i は入力の円振動数を表す。振幅の分布がレーレー分布になると仮定し、 C_e の期待値を C_e とすると、 C_e は、

$$C_e = \frac{2\sqrt{2}f_r}{\sqrt{\pi}\omega_s\sigma_s} \dots\dots\dots (13)$$

主要動付近での C_e は式(13)とするが、入力開始から主要動に至る間および主要動後には、式(3)～(5)を

考慮しなければならない運動が生じる。式(5)から、静止状態から入力を受ける場合、 $|\dot{x}_p| > f_r$ の場合に付加構造物系は主構造物系に対して運動をする。この条件を考え、 $\dot{x}_p$ の標準偏差 $\sigma_{\dot{x}_p}$ を用いて式(3)～(5)の条件を考慮した場合の C_e を近似的に求めた。ここでは、標準偏差と構造物の最大応答は比例関係にあるものとした⁽⁸⁾。まず、線形系の $\sigma_{\dot{x}_p}$ の最大値 $|\sigma_{\dot{x}_p}|_{\max}$ を求めた。次に、摩擦特性がある場合の $\sigma_{\dot{x}_p}$ が摩擦力に相当する加速度の標準偏差 $\xi|\sigma_{\dot{x}_p}|_{\max}$ より小さい場合には、確率 p_s で式(3)および(4)が成立しているものとし、付加構造物系の応答に関する 2 次モーメントは確率 p_s で 0 であるとした。 p_s は次式で近似できるものとした。

$$p_s = 1 - \frac{\sigma_{\dot{x}_p}}{\xi|\sigma_{\dot{x}_p}|_{\max}} \dots\dots\dots (14)$$

ただし、 $\sigma_{\dot{x}_p}/\xi|\sigma_{\dot{x}_p}|_{\max}$ が 1 を越えた場合には、 $p_s = 0$ とした。 p_s と $\sigma_{\dot{x}_p}$ の関係を図示すると、図 5 のようになる。付加構造物系の応答に関する 2 次モーメント、 $\sigma_{\dot{z}_s}$ および $\chi_{z_s \dot{z}_s}$ はモーメント方程式から求めた値に $\{\sigma_{\dot{x}_p}/\xi|\sigma_{\dot{x}_p}|_{\max}\}^2$ を乗じて修正した。また、付加構造物系と主構造物系または地盤の応答に関する 2 次モーメント、たとえば $\chi_{z_s z_p}$ などは $\sigma_{\dot{x}_p}/\xi|\sigma_{\dot{x}_p}|_{\max}$ を乗じて修正した。

4. 初通過破壊確率の推定結果

4.1 摩擦力と破壊レベル 摩擦力は式(6)で定め、破壊レベル B_D は摩擦特性がない線形系に対する z_s の最大値 $|z_{st}|_{\max}$ で次式のように無次元化した。

$$\delta_t = B_D / |z_{st}|_{\max} \dots\dots\dots (15)$$

$|z_{st}|_{\max}$ は次式から定めた。

$$|z_{st}|_{\max} = R \cdot |\dot{x}_p|_{\max} / \omega_s^2 \dots\dots\dots (16)$$

ここで、 R は摩擦特性がない場合の付加構造物系と主構造物系の最大応答の比である。振動特性を表すパラメータの値は代表値として $\gamma = 0$ 、 $h_s = 0.01$ 、 $h_p = 0.05$ とし、固有周期は付加構造物系の応答が大きくなる $T_s = T_p$ となる条件で 0.3 s から 0.8 s の間で選んだ。この条件では、式(16)の R は約 10 となる⁽⁹⁾。重要度の

図 5 p_s と $\sigma_{\dot{x}_p}$ の関係

図 6 付加構造物系の初通過破壊確率の推定 ($\gamma=0$, $h_s=0.01$, $h_p=0.05$, $T_s=T_p$, $\xi=0.05$)

高い付加構造物系は地震動終了後もその機能を維持していなければならないことから、地震動終了後の P_f に注目した。

4.2 推定結果 図 6 に $\xi=0.05$ に固定し、 T_s が異なる系に対する P_f を示す。この図で、固有周期 T_s による P_f の変動が小さくなっている。この特徴は ξ がほぼ 0.1 以下の比較的摩擦力が小さい場合にみられた。したがって、式(15)のように破壊レベルを無次元化すると、 P_f はほとんど T_s に依存しないことが明らかである。

図 7 に異なる ξ の値に対する P_f を示す。この図から、 ξ が大きいほど、すなわち摩擦力が大きいほど P_f が小さくなることが明らかである。この図は $T_s=T_p=0.3$ s に対する P_f であるが、図 6 の結果から、ほかの T_s に対する P_f の値も図 7 から推定できる。

4.3 シミュレーション法による検討 提案した P_f の推定法の妥当性を検討するために、100 波の模擬地震動を用いたシミュレーション法によって P_f を推定した。理論的手法に対する破壊レベル δ_t と区別するために、シミュレーション法に対する破壊レベルとして δ_s という記号を用いた。

図 8 に異なる ξ の値に対する P_f を示す。この図は図 7 に対応する。図 8 で、 ξ が大きいほど P_f は小さくなっている。この特徴は図 7 と一致する。したがって、提案した手法によって得られた P_f の特徴はシミュレーション法による P_f の特徴と一致する。一方、図 7 と図 8 を比較すると、一般的に理論的手法はシミュレーション法より大きい P_f の値を与えることが明らかである。これは、式(7)で $z_0(t)$ が B_D を超過する時刻が統計的に独立であるとした仮定が厳密には成立しなかったためと考えられる。しかしながら、 δ_t と δ_s の間には比較的簡単な関係があると考えられる。最小自乗法によって δ_t と δ_s の関係を求めると次式が得られる。

$$\delta_s = \delta_t / \{(2 - P_f)(1.1 - \xi)\} \quad \text{.....(17)}$$

式(17)によって δ_t を修正することによって得られた

図 7 付加構造物系の初通過破壊確率の推定 ($\gamma=0$, $h_s=0.01$, $h_p=0.05$, $T_s=T_p=0.3$ s)

図 8 付加構造物系の初通過破壊確率の推定 ($\gamma=0$, $h_s=0.01$, $h_p=0.05$, $T_s=T_p=0.3$ s)

P_f の値を図 8 に点で示す。得られた結果はシミュレーション法による P_f と定量的に一致する。

5. 結 言

摩擦特性をもつ付加構造物系の初通過破壊確率 P_f の理論的推定法を提案し、摩擦特性が P_f に与える影響について検討した。得られた結果を以下に要約する。

- (1) 破壊レベルを式(15)のように無次元化すると、 P_f の固有周期に対する変動が小さくなる。
- (2) 摩擦力が大きくなるほど P_f は小さくなる。
- (3) 一般に、理論的推定法はシミュレーション法よりも大きな P_f の値を与える。両者の破壊レベルの間には、式(17)の関係がある。

文 献

- (1) 青木・鈴木, 非定常地震動入力を受ける付加構造物系の初通過破壊確率の推定法, 機論, 49-446, C (1983), 1980-1986.
- (2) 青木・鈴木, 地震動入力を受ける機械構造物系の非線形履歴復元力特性による初通過破壊確率の低減, 機論, 50-458, C (1983), 1980-1986.
- (3) Pradlwarter, H.J., Schueller, G.I. and Chen, X.W., "Stochastic Response of a Coulomb Slip System Subjected to Earthquake Excitation Using Equivalent Linearization", Proc of 9WCEE, V (1988), 247-252.
- (4) 通商産業省, 高圧ガス施設等耐震設計基準(告示 515 号),

- (1981).
- (5) Jennings, P.C., Housner, G.W. and Tsai, N.C., Simulated Earthquake Motions, Earthquake Engineering Research Laboratory, *California Institute of Technology*, (1968), 7-8.
- (6) 青木, 地震動入力を受ける付加構造物系の初通過破壊確率, 東京都立工業高等専門学校研究報告, **23** (1988), 1-8.
- (7) 入江, 機械振動学通論, (1969), 48-49, 朝倉書店.
- (8) 多治見, 耐震理論に関する基礎研究, 東京大学生産技術研究所報告, 8-4 (1959), 173.
- (9) 鈴木・青木, 付加構造物系の最悪地震応答特性(床応答増幅係数による推定法), 機論, **44**-387 (1978), 3749-3758.
-