ゴムの振動特性に関する研究*
(周波数及び変位振幅依存型の非線形振動特性)柴田 耕一*¹, 見坐地 一人*², 加藤 英樹*³Vibration Characteristics of Rubber
(Nonlinear Vibration Characteristics Depending on Frequency
and Amplitude of Displacement)

Koichi SHIBATA, Kazuhito MISAJI and Hideki KATO

In this paper, we describe a new method for analyzing nonlinear vibrational properties of rubber using experimental results of a dynamic hysteresis characteristics test of rubber vibration isolators used in automobiles. This method was developed based on an equivalent linear system using the restoring force model of power function type. As a result of our studies, we are now able to determine the vibrational properties of rubber (dynamic spring constant and damping factor) in relation to frequency and amplitude of displacement. That is to say, we devised a theory of simulation that enables one to predict the vibrational properties of rubber using the area of the hysteresis loop and bone curve.

Key Words: Rubber, Nonlinear Vibration, Hysteresis Characteristics, Dynamic Spring Constant, Damping Factor

1. 緒 言

近年、自動車に対し特に求められている性能の一つに、車室内の静粛性があげられる。すなわち振動、騒音の問題である。そのおもなものとして、エンジンを発生源とするものと、タイヤからの路面入力を発生源とするものとの二つがあり、これにより種々の振動、騒音が派生している。これらの防振対策に、エンジンマウント、サスペンションブッシュなどの防振ゴムが多用されている。しかしゴムの振動特性は外的要因である周波数、振幅などに影響して変化するため、これまで理論的にあらかじめ把握することがむずかかった。

防振ゴムの動特性までも考慮した最適設計を可能にするには、まずゴムの非線形振動特性を十分把握する必要がある。

そこで本論では、実際のサスペンションブッシュ(トレーリングアームブッシュ)を用いて速度(周波数)を段階的に変えた加力実験を行って、得られた復元力

特性から解析的にゴムの非線形振動特性(減衰係数、ばね定数)を求めた。本論の解析手法については、実験の示す履歴曲線の持つ振動特性すなわち減衰量および剛性量を忠実に反映表現でき、また動的応答解析も容易なべき関数型復元力モデルを用いて、任意の周波数に対する履歴ループの囲む面積から減衰係数を、各ループの頂点を結んだ骨曲線からばね定数を算出する等価線形系を用いる。すなわち、柴田、見坐地⁽¹⁾⁻⁽⁴⁾らがすでに発表した「金属製サイロの座屈後の振動特性とその解析」などの論文のように剛性が急激に減少する極めて強い非線形性を有する構造物の振動解析に適用した手法にさらにゴムの周波数依存性を考慮し拡張したものである。

2. 解 析 手 法

2.1 べき関数型復元力モデルを適用した等価線形系による解析手法 ゴムのように振動数 ω に依存する復元力特性が $f(x, \omega)$ で表現できる一質点系に強制外力 $p_0 \cos \omega t$ が作用する場合の運動方程式は次式で表すことができる。

$$m\ddot{x} + f(x, \omega) = p_0 \cos \omega t \quad \cdots \cdots (1)$$

(x : 変位, p_0 : 外力振幅, ω : 外力の円振動数)

式(1)を無次元化すれば次式となる。

* 原稿受付 平成4年12月18日。

*¹ 正員, 日本大学生産工学部 (〒275 習志野市泉町1-2-1)。*² 正員, (株)本田技術研究所, 栃木研究所 (〒321-33 栃木県芳賀郡芳賀町下高根沢4630)。*³ 学生員, 日本大学大学院。

$$\frac{d^2 X}{d\tau^2} + F(X, \eta) = P_0 \cos \eta \tau \quad \dots\dots\dots (2)$$

($X = x/x_s$, $X_0 = x_0/x_s$, $\omega_s^2 = F_s/(x_s \cdot m)$, $\eta = \omega/\omega_s$, $\tau = \omega_s t$, $P_0 = p_0/F_s$, $F(X, \eta)$: 無次元化した復元力, x_s , F_s : 線形限界における変位と荷重, ω_s : 線形領域における固有振動数, x_0 : 変位振幅)

Slowly Varying Parameter 法により式(2)の定常応答解を求めれば,

$$[S(X_0, \eta)]^2 + [C(X_0, \eta) - \eta^2]^2 = P_0^2/X_0^2 \quad \dots\dots\dots (3)$$

ここで,

$$\left. \begin{aligned} S(X_0, \eta) &= \frac{1}{\pi} \frac{1}{X_0} \int_0^{2\pi} F(X_0 \cos \theta, \eta) \sin \theta d\theta \\ C(X_0, \eta) &= \frac{1}{\pi} \frac{1}{X_0} \int_0^{2\pi} F(X_0 \cos \theta, \eta) \cos \theta d\theta \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (4)$$

X_0 : 無次元化変位振幅 (ループの頂点の X 座標)

式(3)から, ある履歴系の $S(X_0, \eta)$, $C(X_0, \eta)$ がほかの系の $S(X_0, \eta)$, $C(X_0, \eta)$ と一致するならば, 各々の系の定常応答特性は等しいと言える。

一方, 式(2)の履歴振動系を次式の等価な線形振動系に置換することを考える。

$$\frac{d^2 X}{d\tau^2} + 2H_{eq} \frac{dX}{d\tau} + K_{eq} X = P_0 \cos \eta \tau \quad \dots\dots\dots (5)$$

上式は, 線形であるから定常解は簡単に求めることができる。式(3)と同じ形状で表すと次のようになる。

$$[-2H_{eq}\eta]^2 + [K_{eq} - \eta^2]^2 = P_0^2/X_0^2 \quad \dots\dots\dots (6)$$

式(3)と式(6)が恒等的に等しいとおいて K_{eq} , H_{eq} を求めれば, 次式になる。

$$K_{eq} = C(X_0, \eta) \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$H_{eq} = -\frac{S(X_0, \eta)}{2\eta} \quad \dots\dots\dots (8)$$

このことは, 物理的には $S(X_0, \eta)$ は減衰量に, $C(X_0, \eta)$ はばね定数に関係した量であることを意味している。式(4)から $S(X_0, \eta)$, $C(X_0, \eta)$ と履歴曲線の幾何学的形状との関係を式で表すと,

$$S(X_0, \eta) = -\frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{X_0} \right)^2 A(X_0, \eta) \quad \dots\dots\dots (9)$$

$$C(X_0, \eta) = \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{X_0} \right)^2 \int_0^{X_0} P(X) R(X, \eta) dX \quad \dots\dots\dots (10)$$

$A(X_0, \eta)$: 変位振幅 X_0 に対応する履歴曲線の囲む面積

$P(X)$: $X/\sqrt{X_0^2 - X^2}$

$R(X, \eta)$: 各変位レベルでの加力線と減力線を加えた曲線 (和曲線)

ここで, $A(X_0, \eta)$, $R(X_0, \eta)$ を算定するための履歴曲線の基本モデルとして, 防振ゴムの履歴曲線の形状が類似しているべき関数型復元力モデルを適用する。

その基本式は次式で表せる。

$$\text{骨曲線 } F(X, \eta) = kX^a \quad \dots\dots\dots (11)$$

$$\text{加力線 } F(X, \eta) = 2k \left[\frac{1}{2}(X_0 + X) \right]^a - kX_0^a \quad \dots\dots\dots (12)$$

$$\text{減力線 } F(X, \eta) = -2k \left[\frac{1}{2}(X_0 - X) \right]^a + kX_0^a \quad \dots\dots\dots (13)$$

$$\text{和曲線 } R(X, \eta) = 2k \left\{ \left[\frac{1}{2}(X_0 + X) \right]^a - \left[\frac{1}{2}(X_0 - X) \right]^a \right\} \quad \dots\dots\dots (14)$$

(ただし, a, k は外力振動数 η に依存して変化する。 a, k の算出方法については, 次の2・2節で詳しく説明する。)

この復元力モデルに対して, 履歴曲線の囲む面積, $A(X_0, \eta)$ は次のように計算できる。

$$\begin{aligned} A(X_0, \eta) &= \int_{-X_0}^{X_0} \{ F(X, \eta)_{\text{加力線}} \\ &\quad - F(X, \eta)_{\text{減力線}} \} dX \\ &= 4k \left(\frac{1-a}{1+a} \right) X_0^{a+1} \quad \dots\dots\dots (15) \end{aligned}$$

となる。

式(15)を式(9)に代入すると,

$$S(X_0, \eta) = -\frac{4k}{\pi} \left(\frac{1-a}{1+a} \right) X_0^{a-1} \quad \dots\dots\dots (16)$$

式(14)を式(10)に代入すると $C(X_0, \eta)$ は次式のよう

$$C(X_0, \eta) = \frac{4k}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{a}{1+a} \right) \frac{\Gamma(a+1/2)}{\Gamma(a+1)} X_0^{a-1} \quad \dots\dots\dots (17)$$

この式の中で Γ はガンマ関数を示す。

式(7), (8)にそれぞれ式(16), (17)を代入すれば, 等価ばね, 等価減衰は次のように求まる。

$$\left\{ \begin{aligned} K_{eq} &= \frac{4k}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{a}{1+a} \right) \frac{\Gamma(a+1/2)}{\Gamma(a+1)} X_0^{a-1} \quad \dots\dots\dots (18) \\ H_{eq} &= \frac{2k}{\pi} \frac{1}{\eta} \left(\frac{1-a}{1+a} \right) X_0^{a-1} \quad \dots\dots\dots (19) \end{aligned} \right.$$

ここで, べき関数型復元力モデルの a, k が求められれば K_{eq} , H_{eq} が定まることになる。

2・2 ゴムの示す履歴特性のべき関数型復元力モデルへの置換 防振ゴムの履歴曲線の基本ループをべき関数型復元力モデル⁽¹⁾で近似することを考え, ここでは, 骨曲線と履歴曲線の囲む面積を用いて, ゴムの履歴曲線をべき関数型復元力モデルへ置換する方法を示す。

振動特性を反映させる条件としては,

(I) 加力試験から得られる履歴曲線の囲む面積とべき関数型復元力モデルの履歴曲線の囲む面積とを等しくする。 (減衰量の一一致条件)

(II) 加力試験結果の示す骨曲線とべき関数型復元力モデルの骨曲線を一致させる。すなわち各々の変位レベルにおいて加力試験と復元力モデルの頂点を一致させる。
(剛性量の一致条件)

今、加力試験の示す履歴ループにおいて、その履歴曲線の囲む面積、および骨曲線をそれぞれ $G_0(X, \eta)$, $F_0(X, \eta)$ として、すでに関数化ができたものとする。ただし η は外力の振動数であり、 G_0, F_0 は X_s, F_s で無次元化されているものとする。

(I) の条件は式(15)を用いて次式のように表せる。

$$G_0(X_0, \eta) = 4k \left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha} \right) X_0^{\alpha+1} \quad \dots\dots\dots (20)$$

(II) の条件は式(11)を用いて次式のように表せる。

$$F_0(X_0, \eta) = kX_0^\alpha \quad \dots\dots\dots (21)$$

式(21)を式(20)に代入して k を消去すれば次式になる。

$$G_0(X_0, \eta) = 4X_0 \left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha} \right) F_0(X_0, \eta) \quad \dots\dots\dots (22)$$

これから、 α は次式のように求まる。

$$\alpha(X_0, \eta) = \frac{4F_0(X_0, \eta)X_0 - G_0(X_0, \eta)}{4F_0(X_0, \eta)X_0 + G_0(X_0, \eta)} \quad \dots\dots\dots (23)$$

k は式(21)から次のように求まる。

$$k(X_0, \eta) = \frac{F_0(X_0, \eta)}{X_0^\alpha} \quad \dots\dots\dots (24)$$

式(23), (24)で表せる $\alpha(X_0, \eta), k(X_0, \eta)$ を用いれば加力試験とべき関数型復元力モデルのそれぞれの履歴曲線の囲む面積および骨曲線を一致させることができる。すなわち G_0, F_0 を変位振幅 X_0 と周波数 η で関数化できれば、 $\alpha(X_0, \eta), k(X_0, \eta)$ を用いてべき関数型復元力モデルへ置換できることになる。この $\alpha(X_0, \eta), k(X_0, \eta)$ を式(18), (19)に代入しゴムの変位および周波数に依存する K_{eq}, H_{eq} を求めることができ、以下の式(25), (26)からはばね定数 K , 減衰係数 C を求めることができる。

$$K = k_s \cdot K_{eq} = k_s \cdot C(X_0, \eta) \quad \dots\dots\dots (25)$$

表 2 履歴曲線測定条件

Load	P_A (N)
Displacement	$\pm 0.03 \sim \pm 1.0 \times 10^{-3}$ (m)
Frequency	Static ~ 100 (Hz)

表 1 ゴムの諸量

Polymer	NR
Specific Gravity	1.15
Hardness	60

図 1 ゴムプッシュ形状

図 2 履歴曲線計測システム

図 3 荷重-変位 履歴曲線 (0 Hz)

図 4 荷重-変位 履歴曲線 (10 Hz)

$$C = \frac{2F_s}{\omega_s \cdot x_s} \cdot H_{eq} = -\frac{k_s \cdot S(X_0, \eta)}{\omega} \dots\dots\dots (26)$$

3. 解析モデルと関数化

実験に用いた試験体は、自動車のサスペンションに使用するゴムブッシュ（図1、表1）である。周波数毎の荷重-変位特性は図2に示す計測システムにより測定した。

3.1 荷重-変位特性の測定 図3～8は、表2の測定条件により求めた周波数が0～100 Hzの時の P_A 方向の荷重-変位特性を示す。これらのループは変位振幅が $0.1, 0.2, 0.3, 0.5, 0.8, 1.0 \times 10^{-3}(\text{m})$ （それぞ

れ○, □, △, ●, ×, ▲印）の時の測定値を取り出してプロットしたものである。

このプロットした点をもとに骨曲線 $F_0(X, \eta)$ と、履歴曲線の囲む面積 $G_0(X, \eta)$ の関数化を行った。

3.2 $F_0(X, \eta)$ の関数化 周波数ごとの履歴曲線の各ループ頂点を結んで得られる P_A 方向の骨曲線を最小二乗法を用いてパラメータを周波数 η として、変位振幅 X で関数化した $F_0(X, \eta)$ を表3に示す。表3の中の $Z(\eta)$ は0～57.3 Hzと57.3 Hz以上の範囲にわけて、2本の曲線で表現した。

3.3 $G_0(X, \eta)$ の関数化 面積も骨曲線と同様にパラメータを周波数 η として、変位振幅 X で関数化

図5 荷重-変位 履歴曲線 (30 Hz)

図7 荷重-変位 履歴曲線 (80 Hz)

図6 荷重-変位 履歴曲線 (50 Hz)

図8 荷重-変位 履歴曲線 (100 Hz)

表3 骨曲線の関数

$F_0(X, \eta) = Z(\eta) \cdot X^B$	
frequency f(Hz)	$Z(\eta)$
$0 \leq f \leq 57.332$	$M0 + M1 \cdot a \cdot \eta + M2 \cdot a^2 \cdot \eta^2 + M3 \cdot a^3 \cdot \eta^3$ $M0 = 15.416$ $M1 = 0.27822$ $M2 = -0.0056686$ $M3 = 3.2879 \cdot 10^{-5}$
$57.332 < f$	$M4 \cdot \log(a \cdot \eta) + M5$ $M4 = -0.19478$ $M5 = 19.272$
※ $f = a \cdot \eta$, $a = \omega_s / 2\pi$, $B = 0.68966$	

表4 履歴ループ面積の関数

$G_0(X, \eta) = Y(\eta) \cdot X^A$	
frequency f(Hz)	$Y(\eta)$
$0 \leq f \leq 57.332$	$M0 + M1 \cdot a \cdot \eta + M2 \cdot a^2 \cdot \eta^2 + M3 \cdot a^3 \cdot \eta^3$ $M0 = 10.508$ $M1 = 0.56102$ $M2 = -0.011993$ $M3 = 6.7018 \cdot 10^{-5}$
$57.332 < f$	$M4 \cdot \log(a \cdot \eta) + M5$ $M4 = -7.0769$ $M5 = 28.325$
※ $f = a \cdot \eta$, $a = \omega_s / 2\pi$, $A = 1.7717$	

した P_A 方向の近似関数 $G_0(X, \eta)$ を表 4 に示す。表 4 中の $Y(\eta)$ は $Z(\eta)$ と同様に 57.3 Hz を境にして、2 本の曲線で表現した。

3・4 α, k 値の算出 関数化された面積 $G_0(X, \eta)$ 、骨曲線 $F_0(X, \eta)$ を用いて式 (23)、(24) から求めた連続的な α, k 値 (実線) と、各変位振幅、周波数ごとの履歴曲線の面積、頂点から計算した離散的な α, k 値 (○印) との比較を、(一例として周波数 10 Hz の場合を) 図 9、10 に示す。

離散的な α, k に対し関数化による値は精度良く求められている。すなわちこのことは、履歴曲線がべき関数型に精度良く置換されており、本解析手法による防振ゴムの振動特性の計算が容易であることを意味している。

なお、図 3～8 の実線はここで求めた α, k 値を式 (12)、(13) に代入して求めたものである。

3・5 履歴曲線の特徴 履歴曲線の特徴として、振幅と履歴ループの傾きについては、どの周波数についても、振幅の増大につれて (面積の増加と共に) 履歴ループの傾きは変化し、減少する傾向を示した。

一方、静的な履歴ループと比較すると周波数が高く

なるにつれて、面積 G_0 と骨曲線 F_0 は増加し、0～30 Hz ぐらいまでの変化が一番大きく、30～50 Hz 近辺で最大となり、それ以上 100 Hz までは骨曲線はあまり大きな変化は見られないが、面積は 100 Hz までは、なお、再び減少する傾向を示す。

4. 解析結果

本解析手法を用いて算出したばね定数と減衰係数の計算値の精度を検討するため、 P_A 方向の動ばね定数、減衰係数を動ばね測定器により直接測定した。以後の

表 5 実験から求めた動ばね定数と減衰係数

Displacement		± 0.01	± 0.05	± 0.1	± 0.3	± 0.5	± 1.0
Frequency		$\times 10^{-3}(\text{m})$					
10 (Hz)	K				22.1	18.3	14.5
	C				0.085	0.085	0.067
45	K			35.3	23.9	19.3	14.8
	C			0.026	0.022	0.021	0.015
75	K	55.7	49.2	37.0	24.0		
	C	0.016	0.011	0.018	0.016		
100	K	58.8	50.5	38.2	24.4		
	C	0.013	0.0098	0.016	0.011		
200	K	65.0	53.9	43.2			
	C	0.0065	0.0053	0.0065			

Damping Coefficient C: $\times 10^4 \text{ N} \cdot \text{s/m}$
Dynamic Spring Constant K: $\times 10^4 \text{ N/m}$

図 9 10 Hz の変位振幅に対する α

図 11 実験から求めた動ばね定数

図 10 10 Hz の変位振幅に対する k

図 12 実験から求めた減衰係数

計算結果は、動ばね測定器による実験値と比較する。

4.1 動ばね定数, 減衰係数の実測値 動ばね定数, 減衰係数を表5および図11, 12に示す。

動ばね定数の変位振幅依存性に関しては, 変位振幅が大きくなるにつれて指数関数的に減少する。また, 周波数依存性については, 周波数が大きくなるにつれて動ばね定数も高くなる。

減衰係数の変位振幅依存性は変位振幅が大きくなる程, 減衰係数は減少する傾向を示す。ただし, 周波数が

高くなるにつれて変位振幅の依存性は少なくなり一定になる傾向を示す。

4.2 動ばね定数の理論値と実験値との比較 周波数ごとの変位振幅に対する動ばね定数の理論値と実験値の比較を図13~16に示す。

理論値とは3.4節で求めた α, k を用いて式(18), (25)より求めた計算値を言う。理論値は周波数および変位振幅依存性を忠実に再現しており実験値と非常に良く一致している。

図13 ばね定数の理論値と実験値の比較 (10 Hz)

図16 ばね定数の理論値と実験値の比較 (200 Hz)

図14 ばね定数の理論値と実験値の比較 (45 Hz)

図17 減衰係数の理論値と実験値の比較 (10 Hz)

図15 ばね定数の理論値と実験値の比較 (100 Hz)

図18 減衰係数の理論値と実験値の比較 (45 Hz)

図 19 減衰係数の理論値と実験値の比較 (100 Hz)

図 20 減衰係数の理論値と実験値の比較 (200 Hz)

4.3 減衰係数の理論値と実験値との比較 周波数ごとの変位振幅に対する減衰係数の理論値と実験値の比較を図 17~20 に示す。

理論値とは動ばね定数同様、3.4 節で求めた α, k を用いて式 (19), (26) より求めた計算値を言う。

理論値は実験値に対して変位振幅依存性については、多少のずれがあるが減衰係数としては非常に良く一致している。周波数依存性についても周波数が高くなるにつれて減衰係数が減少する特性を忠実に再現できており理論値の精度としては十分である。

本論の手法を用いて履歴ループがまだ求められていない周波数の 200 Hz について計算したばね定数 K を図 16, 減衰係数 C を図 20 に示した。おおむね、実験値と対応した結果が得られているが、周波数の高い範囲での振幅が小さい部分の微妙な変化については、履歴ループを求めてさらに細かい追が必要である。

5. 結 言

本論文では、実際の車両用防振ゴムを用いた動的な加力実験をもとにゴムの振動特性（動ばね定数、減衰係数）を算出した。

我々は、非線形振動特性を求める解析手法⁽¹⁾⁽²⁾としてべき関数型復元力モデルを適用し、等価線形系的手法を基に発展させた解析方法をここで示した。この方法により求めたゴムの振動特性を実験値と比較検討した。

その結果、次のことが明らかになった。

1) 本解析手法により周波数および変位振幅に大きく依存するゴムの非線形振動特性を求められることがわかった。

2) 実験から直接求めた動ばね定数、減衰係数を

本論の解析結果とはじめて直接的に比較することにより本解析手法の信頼性および妥当性を検証した。

3) 動的特性をも考慮した防振ゴムの最適設計を実現する上で解析精度の面からも本解析手法は十分実用可能であることがわかった。

4) 以上よりゴムの動ばね定数 K , 減衰係数 C の予測が可能となった。

本論においては、防振ゴムの振動特性（動ばね定数、減衰係数）を解析する手法について述べたが、今後、べき関数型復元力モデルを用いた本手法により、任意波形入力に対する防振ゴムの振動応答解析⁽²⁾⁽³⁾も容易にできると考えられる。したがって、本手法を用いて防振ゴム（プッシュ等）をばねとするサスペンションの動的挙動についてさらに深く追究、検討することが重要なことで、今後の残された課題でもある。

なお、本研究を進めるにあたり(株)本田技術研究所、栃木研究所の中村光勇氏、角南圭一氏、田中 満氏に数々のご協力および助言を頂いた。また、計算、図表の作成にあたっては、日本大学柴田研究室、卒論生前田充君、清澤秀夫君、笹川考義君、真庭謙太郎君に協力を頂いた。ここに深く感謝致します。

文 献

- (1) 柴田・見坐地・ほか 2 名, 金属製サイロの座屈後の振動特性とその解析, 日本建築学会構造系論文報告集, 367 号 (1986), 131-141.
- (2) 柴田・ほか 2 名, 金属製サイロの座屈後の動的挙動, 日本建築学会構造系論文報告集, 367 号 (1986), 121-129.
- (3) 柴田・見坐地・ほか 1 名, 金属製サイロの構造特性係数に関する研究, 日本建築学会構造系論文報告集, 429 号 (1991), 89-100.
- (4) 柴田・ほか 2 名, 金属製サイロの構造特性係数の線形時周期による依存性, 日本建築学会構造系論文報告集, 435 号 (1992), 41-49.