長さが変化する弦の振動解析*

金 山 忠 司^{*1}, 小 寺 忠^{*2}

Vibration of String with Time-Varying Length

Tadashi KANAYAMA and Tadashi KOTERA

Free vibration of string with time-varying length is analyzed. An equation of motion described by a partial differential equation cannot be solved by the method of variable separation. In the present paper the equation of motion of a string with a constant length is described by a partial integro-differential equation. Then, vibrations with a moving support acted upon by an unknown load are analyzed. From the condition that the displacement of the string at the support is zero, an integral equation of Volterra type of the first kind with respect to an unknown load is obtained. This integral equation is solved approximately and solutions of free vibrations are obtained.

Key Words: Theory of Vibration, Vibration of String with Time-Varying Length, Free Vibration, Integral Equation of Volterra Type

1. ま え が き

時間とともに長さが変化する連続体の振動解析は、鉱山用エレベータの縦揺れの防止の目的で始められて以来、すでに数十年が経過しているが、変数分離が不可能という理由のため解析が非常に困難で、任意の初期条件からの解を初等関数で表現することはほとんど不可能と言っても過言ではない。水平に一定張力で張った弦については、著者の一人が今までさまざまな解析法を示し、特定の初期条件からの解を解析的に表現することには成功したが^{(1)~(3)}、任意の初期条件からの解はまだ得ていない。

一方、橋本はグリーン関数と移動荷重の概念を用いる方法を発表した⁽⁴⁾⁽⁵⁾。この方法では水平に一定張力で張った弦の任意の初期条件からの解を求めることができるとしているが、そのほかの系には適用できない。

エレベータやクレーンのような場合は先端に質量をつるした弦でモデル化できるが、従来の一定張力の弦

の場合と同様の手法では解析的に解くことはほとんど不可能で、数値的に解く以外に方法は残されていないようである。

著者らは、影響関数と移動荷重の概念を用いれば、どのような連続体の場合でも統一的に第1種ボルテラ積分方程式で表現できることを見いだしたので、従来の一定張力で張られた水平弦だけでなく、重力場でつるされた弦の場合についても解法および数値計算の結果を示す。

2. 影響関数と移動荷重の概念

時間とともに長さが変化する連続体を、一端(弦ならば支点としてよい)が時間とともに速度 v で移動するというようにモデル化してみる(図1)。支点が移動すると境界を表す座標そのものが時間の関数となるため、影響関数も固有関数も定義できず、変数分離法では解くことができない。

図1 長さが変化する弦の模型

* 平成4年3月13日 北陸信越支部金沢地方講演会において講演, 原稿受付 平成4年11月24日.

^{*1} 学生員, 福井大学大学院(〒910 福井市文京 3-9-1).

^{*2} 正員, 福井大学工学部.

この問題は、もとの状態の固有関数と移動荷重の考えを応用すれば解くことができる。

一般的に長さが l の連続体があるとし、その単位長さ当りの質量を m 、影響関数を $G(x, \xi)$ 、固有振動数を ω_i 、正規固有関数を $X_i(x)$ とする。移動支点の座標を $l_0 + vt$ とし ($l_0 + vt < l$)、移動支点が連続体に及ぼす集中荷重を $f(t)$ とすると、運動方程式は

$$u(x, t) = \int_0^l G(x, \xi) \left\{ f(t) \delta(\xi - l_0 - vt) - m(\xi) \frac{\partial^2 u(\xi, t)}{\partial t^2} \right\} d\xi \quad (1)$$

となる⁽⁶⁾。

この解 $u(x, t)$ を

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(t) X_i(x) \quad (2)$$

と仮定すると

$$\sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(t) X_i(x) = G(x, l_0 + vt) f(t) - \int_0^l G(x, \xi) m(\xi) \sum_{i=1}^{\infty} \ddot{\phi}_i(t) X_i(\xi) d\xi \quad (3)$$

この両辺に $m(x) X_k(x)$ をかけて、 $x=0 \sim l$ で積分し、

$$X_i(x) = \omega_i^2 \int_0^l G(x, \xi) m(\xi) X_i(\xi) d\xi$$

$$\int_0^l m(\xi) X_i(\xi) X_k(\xi) d\xi = \delta_{ik}$$

(クロネッカーの δ)

なる関係式を用いると、

$$\ddot{\phi}_k(t) + \omega_k^2 \phi_k(t) = X_k(l_0 + vt) f(t) \quad (4)$$

が得られる。一般の外力による振動の解の公式を用いると、この解は

$$\phi_k(t) = \frac{1}{\omega_k} \int_0^t \sin \omega_k(t - \tau) X_k(l_0 + v\tau) f(\tau) d\tau + A_k \cos \omega_k t + B_k \sin \omega_k t \quad (5)$$

のようになり、もとの運動方程式の解は式(2)によって与えられる。ただし、係数 A_k と B_k は初期条件によって決まる。

ところで、未知の力 $f(t)$ を求めるには、支点では変位が常に 0 であることを利用する。すなわち、 $u(l_0 + vt) = 0$ を変形すると

$$\int_0^l \sum_{i=1}^{\infty} X_i(l_0 + vt) \frac{1}{\omega_i} \sin \omega_i(t - \tau) \times X_k(l_0 + v\tau) f(\tau) d\tau = - \sum_{i=1}^{\infty} X_i(l_0 + vt) (A_i \cos \omega_i t + B_i \sin \omega_i t) \quad (6)$$

のようになる。これは第 1 種ボルテラ形積分方程式である。したがって、それぞれの連続体について具体的な固有振動数と正規固有関数を用いて式(6)を数値的

に解き、 $f(t)$ を式(5)に代入すれば振動中の変位 $u(x, t)$ が得られる。

3. 水平に張った弦の場合

まず、線密度が σ の水平に一定張力 T で張られた弦の場合、運動方程式は

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} : a^2 = \frac{T}{\sigma} \quad (7)$$

である。

水平に張った弦の長さが l_0 から短くなるときは、 $l = l_0$ のときの固有振動数と、重み付きの正規固有関数を考える。それらは、すでに知られているように

$$\omega_i = \frac{ia\pi}{l_0}$$

$$X_i(x) = \sqrt{\frac{2}{l_0\sigma}} \cdot \sin \frac{i\pi x}{l_0} \quad (8)$$

のように表される。ここで

$$\frac{x}{l_0} = \zeta, \quad \frac{at}{l_0} = t', \quad \frac{v}{a} = \nu \quad (9)$$

なる無次元記号を導入すれば、無次元固有振動数 Ω_i と正規固有関数 $X_i(\zeta)$ は、

$$\Omega_i = i\pi$$

$$X_i(\zeta) = \sqrt{2} \sin i\pi\zeta \quad (10)$$

となる。

4. つるされた弦の場合

線密度が σ の弦のみがつるされている場合については、従来の変数変換法を用いれば見かけ上一定長さのつるされた弦になるので、見かけの固有関数による級数展開法を用いて連立の微分方程式を導き、Runge-Kutta-Gill 法で解くこともできるが、ここではあくまでも第 1 種ボルテラ形積分方程式を用いて数値解を求めることにする。

そのために、まず長さが l_0 のつるされた弦の正規固有関数を求めよう(図 2 参照。弦の長さが l_0 から短くなる時はこれでよいが、長くなる時は十分に長い l の弦の正規固有関数を求める)。弦の運動方程式は

$$\sigma \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = g\sigma \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right) \quad (11)$$

のように表される。ここで

$$\frac{x}{l_0} = \zeta, \quad \sqrt{\frac{g}{l_0}} t = t' \quad (12)$$

なる無次元記号を導入すれば(長くなるときは l で割る。以下同様)、式(11)は

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t'^2} = \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\zeta \frac{\partial u}{\partial \zeta} \right) \quad (13)$$

となり、この解を

$$u = X(\zeta) \cos \Omega t' \quad (14)$$

とおくと(ただし, $\Omega t' = \omega t$ とする)

$$\zeta \frac{d^2 X}{d\zeta^2} + \frac{dX}{d\zeta} + \Omega^2 X = 0 \quad (15)$$

が得られる。

ここで

$$2\Omega\sqrt{\zeta} = z \quad (16)$$

とおくと式(11)は

$$\frac{1}{z} \frac{d}{dz} \left(z \frac{dX}{dz} \right) + X = 0 \quad (17)$$

なる第0次 Bessel 微分方程式となり,

これの一般解は

$$X = CJ_0(z) + DN_0(z) \quad (18)$$

のようになる。

途中は省略するが, この振動数方程式は

$$J_0(2\Omega) = 0 \quad (19)$$

となり, 解 Ω を $\Omega_i (i=1, 2, \dots)$ とおくと, 正規固有関数は

$$X_i(\zeta) = \frac{J_0(2\Omega_i\sqrt{\zeta})}{J_1(2\Omega_i)} \quad (20)$$

となる⁽⁷⁾。

なお, 第1種ボルテラ形積分方程式(6)では $\phi_k(l_0 + vt)$ が使用されているが, $l_0 + vt$ を式(12)によって無次元化すると

$$\begin{aligned} \frac{l_0 + vt}{l_0} &= 1 + \frac{v}{\sqrt{gl_0}} \cdot \sqrt{\frac{g}{l_0}} t \\ &= 1 + \nu t' \end{aligned} \quad (21)$$

のようになる。同様に $\omega_k t$ を無次元化すると

$$\begin{aligned} \omega_k t &= \omega_k \sqrt{\frac{l_0}{g}} \cdot \sqrt{\frac{g}{l_0}} t \\ &= \Omega_k t' \end{aligned} \quad (22)$$

となる。

5. 質量をつるした弦の場合

クレーンのような場合には弦の先端に質量がある。この場合は従来の変数変換法では, たとえ見かけ上長さが一定の弦に変換できたとしても, 境界条件が複雑な形になって, もはや級数展開に使用すべき固有関数さえも定義できず, 解析的にはもちろん数値的にも解くことができなかったが, 本報の手報では正規固有関数さえ求めればよい。長さが l_0 の弦の先端に質量 M がある場合(図2), 運動方程式は

$$\sigma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = g\sigma \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial u}{\partial x} \right) + Mg \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (23)$$

となる。境界条件は, $x=0$ で

$$M \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = Mg \frac{\partial u}{\partial x} \quad (24)$$

および $x=l_0$ で

$$u=0 \quad (25)$$

である。

式(23)を式(12)によって変形すると

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t'^2} = \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\zeta \frac{\partial u}{\partial \zeta} \right) + \frac{M}{\sigma l_0} \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} \quad (26)$$

となり, この解を式(14)のように表すと

$$\left(\zeta + \frac{M}{\sigma l_0} \right) \frac{d^2 X}{d\zeta^2} + \frac{dX}{d\zeta} + \Omega^2 X = 0 \quad (27)$$

が得られる。さらに

$$\zeta + \frac{M}{\sigma l_0} = \zeta + \mu = y \quad (28)$$

とおけば,

$$y \frac{d^2 X}{dy^2} + \frac{dX}{dy} + \Omega^2 X = 0 \quad (29)$$

なる式が得られ,

$$2\Omega\sqrt{y} = z \quad (30)$$

とおくと式(29)は

$$\frac{1}{z} \frac{d}{dz} \left(z \frac{dX}{dz} \right) + X = 0 \quad (31)$$

なる第0次 Bessel 微分方程式となり, この一般解は

$$X = CJ_0(z) + DN_0(z) \quad (32)$$

のようになる。

境界条件(24)からは, $\zeta=0 (y=\mu)$ で

$$-\Omega^2 X = \frac{dX}{d\zeta}$$

となり, これを変形して

$$\begin{aligned} C\{J_1(2\Omega\sqrt{\mu}) - \Omega\sqrt{\mu}J_0(2\Omega\sqrt{\mu})\} \\ + D\{N_1(2\Omega\sqrt{\mu}) - \Omega\sqrt{\mu}N_0(2\Omega\sqrt{\mu})\} = 0 \end{aligned}$$

境界条件(25)からは, $\zeta=1 (y=1+\mu)$ で

$$CJ_0(2\Omega\sqrt{1+\mu}) + DN_0(2\Omega\sqrt{1+\mu}) = 0$$

が得られ, これらより係数 C と D が存在するための必要十分条件により振動数方程式を導くと

$$\begin{aligned} J_0(2\Omega\sqrt{1+\mu})\{N_1(2\Omega\sqrt{\mu}) - \Omega\sqrt{\mu}N_0(2\Omega\sqrt{\mu})\} \\ - N_0(2\Omega\sqrt{1+\mu})\{J_1(2\Omega\sqrt{\mu}) \\ - \Omega\sqrt{\mu}J_0(2\Omega\sqrt{\mu})\} = 0 \end{aligned} \quad (33)$$

図2 質量をつるした弦の模型図

となる。

この解 Ω を $\Omega_i (i=1, 2, \dots)$ とおくことにすると、固有関数は

$$X_i(\xi) = C_i \left\{ J_0(2\Omega_i \sqrt{\xi + \mu}) - \frac{J_0(2\Omega_i \sqrt{1 + \mu})}{N_0(2\Omega_i \sqrt{1 + \mu})} N_0(2\Omega_i \sqrt{\xi + \mu}) \right\} \dots (34)$$

のように書ける。

$$\int_0^1 X_i(\xi)^2 d\xi + \mu X_i(0)^2 = 1 \dots (35)$$

を満たすように係数 C_i を決めれば、正規固有関数 $X_i(\xi)$ が得られる。

6. 数値計算例

第1種ボルテラ形積分方程式(6)を式(12), (21), (22)によって無次元化すれば

$$\begin{aligned} \int_0^{t'} \sum_{k=1}^{\infty} X_k(1 + \nu t') \frac{1}{\Omega_k} \sin \Omega_k(t' - \tau) \\ \times X_k(1 + \nu \tau) F(\tau) d\tau = - \sum_{k=1}^{\infty} X_k(1 + \nu t') \\ \times (A_k \cos \Omega_k t' + B_k \sin \Omega_k t') \dots (36) \end{aligned}$$

のような形になる。ただし、 τ , A_k , B_k の中味は変わっているが記号は変えていない。また $F(\tau)$ は、未知の

力 $f(\tau)$ を無次元化したものである。

正規固有関数が決定されれば、初期条件により係数 A_k , B_k が決まるので、右辺は伸びる速度 ν に依存した既知関数となり、未知関数 $F(\tau)$ について数値的に解くことができる。第1種ボルテラ形積分方程式の数値解法の詳細については紙面の都合により省略するが、台形公式に似た著者らの近似解法で計算している。

図3, 4は水平に張った弦の場合で、中央が1、両端が0という折れ線状の初期変位を与えたときの自由振動を表している(図が複雑になるので、途中で計算を止めている)。いずれも時間とともに長さが短くなる場合の振動を扱っている。図3は超幾何微分方程式を解いて求めた厳密解、図4は本報の手法の結果である。この場合は40個のモードで近似している。図3と4はおおむねよく一致していることがわかる。

図5はつるされた弦の場合で、自由端が1の直線状初期変位を与えたときの、時間とともに長さが短くなる場合の自由振動を表している。この場合、固有モードは最初の7個で近似している。つるされた弦の場合、厳密解がいまだに求められていないので、図5の精度の検討は現状ではできない。

図3 変位の分布の時間的変化(超幾何微分方程式による)

図4 変位の分布の時間的変化(本報の解法による)

図6～8は質量をつるした弦の場合で、質量端が1の直線状初期変位を与えたときの、時間とともに長さが短くなる場合の自由振動を表している。この場合は、いずれも最初の4個のモードで近似している。固有振動数と正規固有関数は式(28)で定義される質量比 μ によって決まるので、挙動は伸びる速度 ν と質量比 μ の二つに依存する。

7. 結 言

一定張力で水平に張った弦、つるされた弦、質量をつるした弦が一定速度で長さを変えるとときの振動の、

第1種ボルテラ形積分方程式による解析法を提案し、変位の数値計算例を示した。また第1種ボルテラ形積分方程式は形式上いずれの系にも適用できることがわかった。これらの結果をまとめれば次のようになる。

(1) 固有関数の直交性などを利用することにより、簡単な第1種ボルテラ形積分方程式を導くことができた。

(2) 初期条件はいずれの場合も任意でよい。

(3) 今回の解析では、つるされた弦と質量をつるした弦の場合、第1種ボルテラ形積分方程式による解は、積分方程式の計算誤差のため、精度がよいとは言

図5 変位の分布の時間的変化(つるされた弦)

図6 変位の分布の時間的変化(質量をつるした弦, $\mu=0.25$)

図7 変位の分布の時間的変化(質量をつるした弦, $\mu=0.50$)

図 8 変位の分布の時間的变化(質量をつるした弦, $\mu=1.0$)

い難い。

(4) 振動のパターンを支配するのは、速度比と質量比である。

付 録

第1種ボルテラ形積分方程式(36)を簡単のために

$$\int_0^t F(y)G(t,y)dy = g(t) \quad \dots\dots\dots (37)$$

とおいてみると、 $G(t,t)=0$ となることから、精度の良い近似解はあまり期待できない。実際、著者らの近似解法でも、Maclaurin の解法でも精度は余りよくない。

そこで、第2種ボルテラ形積分方程式に変形する手法を適用してみる。すなわち、式(37)を t で微分すると

$$F(t)G(t,t) + \int_0^t F(y) \frac{\partial G(t,y)}{\partial t} dy = g'(t) \quad \dots\dots\dots (38)$$

となる。ところが左辺第1項が0となるため、

$$\int_0^t F(y) \frac{\partial G(t,y)}{\partial t} dy = g'(t) \quad \dots\dots\dots (39)$$

となり、再び第1種ボルテラ形積分方程式となる。本報ではこれを著者らの近似解法で解いている。

文 献

- (1) Kotera, T., *Bulletin of JSME*, 21-160(1979), 1469.
- (2) Kotera, T. and Kawai, R., *JSME Int. J.* III, 31-3(1988), 524.
- (3) 小寺, 機論, 54-507, C(1988), 2597.
- (4) 橋本, 機論, 57-539, C(1991), 2167.
- (5) 橋本, 機論, 57-541, C(1991), 2785.
- (6) 近藤, 積分方程式とその応用, (1963), 170, コロナ社.
- (7) 坪井, 振動論, (1944), 425, 河出書房