ある非線形振動系のカオスの挙動について*
(分数調波共振領域の応答特性)津田 吉 広*¹, 田村 英 之*²
末岡 淳 男*², 藤井 毅*¹Chaotic Behavior of a Nonlinear Vibrating System
with a Retarded Argument
(Characteristics in the Region of Subharmonic Resonance)Yoshihiro TSUDA, Hideyuki TAMURA,
Atsuo SUEOKA and Tsuyoshi FUJII

In this paper, we consider the characteristics of a nonlinear vibrating system, i. e., the van der Pol and Duffing equation, with a retarded argument under a harmonic exciting force. A numerical analytical procedure has been applied to analyze the characteristics in the subharmonic resonant region of the system. The system has been found to show quite complex characteristics, e. g., many kinds of subharmonic oscillations, both symmetric and asymmetric subharmonic solutions, bifurcations and nonperiodic solutions. Each of these subharmonics has shown isolated, island like response curves. With the use of numerical simulation, Poincaré mapping, basin of attractions and chaotic phenomena, corresponding to nonperiodic solutions, have been obtained. The chaotic behavior appears in various frequency regions. These nonperiodic motions have been concluded to be chaotic because of the positive Lyapunov exponent. The route to chaos is via period doubling bifurcations.

Key Words: Nonlinear Vibration, Subharmonic Oscillation, Chaos, Simulation, Period Doubling Bifurcation, Poincaré Mapping, Lyapunov Exponent, Attractor

1. 諸 言

著者らは、後述の式(1)で表される系において、強制外力の1, 2の振動数域で周期倍分岐よりカオス現象が発生することを既報⁽¹⁾において報告した。しかし、そこで示した特性⁽¹⁾によって、考察の系の応答特性を十分に解明し得たとは言えず、系の特性の多様性および発生する現象の豊富さを結果として示唆するのみにとどまった。

非線形な現象において、周期的な振動に加えて不規則な振動、すなわち、カオス現象の発生が注目され、これまでに数多くの研究が内外において報告されている^{(2)~(8)}。さらに、系の特性の中に時間遅れ要素をもつ場合も存在し得る。その様な系は、例えば、機械・電気系の振動制御に関する問題から、生物工学、社会科学まで広い分野^{(9)~(11)}において認めることができ、遅れ要素をもつ系の挙動を明らかにすることは、重要な研究課題の一つであると考えられる。

上述のような時間遅れ要素をも含む非線形系の挙動に関する検討は、ミノルスキーの船体の波浪による運

動の解析に始まるとされ、それ以来数多くの報告がある⁽¹²⁾。例えば、上田ら⁽¹³⁾は位相同期系を検討し、また吉武ら⁽¹⁴⁾は金属切削系において時間遅れ量が小さい場合、近似解析解(例えば、平均法)と実験結果とがよく一致することを示している。

ところで、対象とした振動系は、例えば、ある種のリンク機構の解析モデルとして検討されたものである⁽¹⁵⁾⁽¹⁶⁾。その結果、ホップ分岐現象発生の可能性について言及されているものの、系のその他の応答特性に関する体系的な解析はなされておらず、したがって系の挙動に関しては検討すべき余地が多々残されているようである。

既報⁽¹⁾に引き続き、式(1)に対する一連のシミュレーションの結果、従来言及されていない種類の周期解や分岐現象などが数多く観測された。そこで、本報告においては、式(1)の主共振域よりも高い振動数領域(時間遅れ要素を含む系の分数調波共振領域)を対象とし、この領域の応答特性をカオス現象も含めて、前報に示した数値的手法⁽⁹⁾を用い数値解析的に詳細に検討した。ただし、時間遅れ要素に対しては上述の文献(1), (13), (14), (17)および(18)らと同じ立場に沿うものである。

* 原稿受付 平成4年12月17日。

*¹ 正員, 大分大学工学部 (〒870-11 大分市旦野原700)。*² 正員, 九州大学工学部 (〒812 福岡市東区箱崎6-10-1)。

2. 運動方程式

解析すべき振動系は、例えば、機械系の振動現象を支配する系として、今までに二、三の研究者らにより検討を加えられている、非線形系に遅れ要素を含む次式とする^{(1)(15)~(17)}。

$$x''(t) - \{h - \gamma \cdot x^2(t)\} \cdot x'(t) + k \cdot x(t) + q \cdot x^3(t) + \beta \cdot x(t - \tau) = f \cdot \cos \omega t \quad \cdots (1)$$

ただし、 $h, \gamma, k, q, \beta, \tau(>0), f$ および ω は系パラメータで、かつ、 $(\cdot)' = d(\cdot)/dt$ である。さらに、時間遅れ量 τ は十分小さいとする⁽¹⁾⁽¹⁴⁾⁽¹⁷⁾⁽¹⁸⁾。

なお、以下の数値解析結果において式(1)の応答 $x(t)$ のノルム (norm): $\|x(t)\|$ を用いるが、その定義は次のようである。ある振動波形 $x(t)$ を次のようにフーリエ級数に展開する：

$$x(t) = a_0 + \sum a_n \cdot \cos(2\pi n t / T - \phi_n) \quad \cdots (2)$$

ただし、 T は $x(t)$ の周期である。このとき、ノルム (norm) $\|x(t)\|$ は

$$\|x(t)\| = \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2} \quad \cdots (3)$$

である。

式(1)の解析すべき応答としては種々考えられるが、ここではカオス現象との関連から、1/2 次分数調波応答を近似解析の検討対象としてとり上げる⁽¹⁾。

このときの近似解を、次式のように仮定する。

$$x(t) = R + u \cdot \cos \omega t / 2 + v \cdot \sin \omega t / 2 + A \cdot \cos \omega t + B \cdot \sin \omega t \quad \cdots (4)$$

ただし、 $c = \sqrt{u^2 + v^2}$: 1/2 次分数調波成分の振幅、 $\alpha = \sqrt{A^2 + B^2}$: 基本調波成分の振幅である。

式(1)および(4)から、振幅 R, u, v, A および B などを時間 t に関して緩やかに変化する関数とし、平均法によりこれらの定常解および安定性も容易に求めることができる⁽¹⁷⁾。この安定・不安定の境界に着目すれば、フロケの定理⁽¹⁹⁾からも容易に推測できるよう

に、周期倍分岐現象の発生に関する手掛かりを得ることができる⁽²⁰⁾。

3. 分数調波共振領域の応答特性の計算結果および考察

平均法式(4)による基本調波および 1/2 次分数調波振動に関する応答曲線(ノルム表示)の一例を図 1(a) に示す。図中、孤島状の応答曲線が 1/2 次分数調波振動(order 1/2 で表示)であり、実線は安定な、破線は不安定な状態を意味する。以下、同様である。これより、図示した振動数領域における応答の概要を推定することができる。また、図から不安定な状態も含めれば、振動数のかなり広い領域に渡り 1/2 次分数調波振動の発生が認められる。わずかではあるものの、孤島の両端近傍に安定な領域が存在し、後述するように安定と不安定な状態の境界近傍において、周期倍分岐よりカオス現象の発生が予測できる。ここでは、図 1(a) の結果を基にして、系の応答特性をさらに詳しく検討する。

ところで、非線形系の応答特性を詳細に検討するためには、高精度の解を必要とするが、高次近似解を解析的に求めることは困難なため、求解を数値的に求めざるを得ず、さらに、カオス等の現象を検討する場合も解析的手法には限界がある。そこで、以下においては数値的に解析を進めるが、使用した解析手法については既報⁽¹⁾に述べたので省略する。以下、使用した系パラメータの値は、 $h = \gamma = 0.1, k = 1.0, q = 3.0, \beta = -2.0, f = 5.0$ および $\tau = 0.1$ である⁽¹⁾。ただし、3・5 節は除く。

3・1 分数調波共振領域の応答特性 図 1(b) は既報⁽¹⁾に示した手法により数値解析的に求めた応答特性(便宜上、この解を数値解と称する)である。主共振領域よりも高い振動数域に 1/2 および 1/3 次分数調波

(a) 近似解

(b) 数値解

図 1 応答曲線

図 2 分数調波応答曲線

解(以下、それぞれ2および3周期解と称する。その他の解についても同様)に対応する応答曲線が認められる。図1(a)と(b)とを比較すれば、基本調和応答特性と1/2次分数調波応答特性とは定性的によく一致していることがわかる。さて、この分数調波応答領域を拡大表示したものが図2である。図中には対称解および非対称解もまとめて表示してあり、かつ孤島状の応答曲線に付した、2-T、3-T、4-T、…は、2周期解、3周期解、4周期解、…をそれぞれ意味する。

ところで、この振動数領域における基本調和解は図1に示すように、振動数が、例えば、点Aから増大するとき(対称)安定な状態ABが点Bで対称解(分岐BDに対応)と非対称解(分岐BEに対応)へと分岐する。安定な対称解ABは分岐と同時に不安定化する(分岐BD)が、派生した非対称解BEのほうは領域CEが安定である。分岐により派生した非対称解には位相の異なる解も含めて2種類存在する。このような2種類の非対称解を、便宜上、フーリエ級数に展開したときの式(2)中の定数項成分 a_0 の正・負によって区別することにする。以後、この a_0 成分が正である非対称解のほうを正の非対称解、負であるそれを負の非対称解と称する。

図3はこのような状況にある基本調和解の解軌道および解波形を描いたものである。ただし、軌道上の小さい黒点は強制外力の一周期に対応する点であり、かつ、用いた振動数は $\omega=4.48$ である。図3(a)は(対称)共振解であり、図3(b)は非共振解で、正の非対称解、図3(c)は同じく負の非対称解である。

3・2 1/2次および1/3次分数調波応答 図2において、一番上方の2周期解(1/2次分数調波解、当然非対称解)の詳細図を図4に示す。図からわかるように、この解は最上部に安定状態(分岐AB部分)が存在し、振動数の低下とともに点Bで不安定化する。同時に2倍の周期をもつ非対称な解BD(4周期解に対応)が分岐により新たに発生する。この分岐した解BDにおいては、点B近傍にわずかではあるが安定な状態が存在する。さらに振動数が減少すると、分岐BCとBDは点Eにて再び合流する。この分岐DEのほうは合流点Eの近傍に非常に狭いものの安定な状態を持つ。合流後、図示のように安定な状態(分岐Ea)が存在する。なお、図4(b)、(c)にそれぞれ正、負の2周期解の解軌道および解波形が描いてある。

次に、図2に示した3周期解の詳細図を図5に示す。図4と同様、最上部の領域AB(この領域は対称解である)は振動数が減少するとき点Bで分岐し、その後対称解に対応する分岐BCはすべて不安定である。

一方、分岐して現れた分岐BDは同じ周期をもつ3周期の非対称解であり、2周期解の場合と同様、分岐点B近傍に安定な状態が存在する。さらに、振動数が減少すると、対称解BCと非対称解BDは2周期解の場合と同様点Eで合流し、また、合流点Eの近傍において分岐BD上には非常に狭いものの安定な解(状態)が存在する。なお、図5(b)に3周期解の解軌道および

(a) 対称共振解

(b) 正の非対称非共振解

(c) 負の非対称非共振解

図3 基本調和応答特性($\omega=4.48$)

(a) 応答曲線

(b) 正の2周期解($\omega=4.15$) (c) 負の2周期解($\omega=4.15$)

図4 2周期解応答特性

解波形を示す。

3・3 高次の分数調波応答 上述した分数調波解(応答)のほかに、図2に描いてあるように、4周期解(4-T), 5周期解(5-T), ..., 9周期解(9-T)といった多くの分数調波解が存在する。これらの解の挙動はそれぞれ上述の2および3周期解の場合と、1, 2の例外を除いて、ほぼ同様である。

図6(a)は4周期解の応答曲線である。図示のように、この解には2個の孤島状解曲線が存在する。上方の大きな応答曲線[4-T(1)]上には、図上では判別困難ではあるものの、安定領域が中央を走る分枝Bの両端近傍に存在し(図中の詳細図参照。図中、○印: 安定・不安定境界点)、この分枝上の安定と不安定領域との境界近傍にカオスが存在する。図6(b)は4周期解の解波形および解軌道(の一例)を描いたものである。下方の小さいほうの孤島状応答曲線[4-T(2)]は下半分が安定領域であり、上半分はすべて不安定である。ただし、この下方の応答曲線は上方の孤島状応答曲線とは異なり、中央を走る分枝は存在しない。すなわち、分岐現象およびカオス現象は存在しない。

図7~10は、それぞれ、5-, 7-, 8-, 9-周期解の応答曲線と代表的な解軌道および解波形を示したものであり、ほぼ同様な応答特性を示しているものの、時刻歴応答は相互にわずかながら異なっている。さらに、これらの応答特性はカオス現象も含めて上述の2週期解などと同様である。ただし、8周期解以外は対称解である。なお、図9に示した8周期解の安定領域は、わずかながらあるものの、図中の詳細図に示すように孤島状の中央を走る分枝Bと外周との合流点近傍に存在す

る。

図11は6周期解に対応する応答特性である。図11(a)から明らかなように、この解には4個の孤島状解曲線が存在し、他の周期解と異なる点である。ただし、これらの曲線にも、上述した2, 3周期解等と同様に中央を走る分枝が存在するが、図中では省略してある。なお、各孤島の左右両端部にわずかながらあるものの、これらの安定領域が存在する(図中、応答曲線Iのみ詳細図表示)。図11(b)~(e)には、図11(a)の上から順に取った、これら4個の応答曲線の右端の安定状態にそれぞれ対応する解軌道および時刻歴応答を示す。同じ6周期解とはいえ、時刻歴応答は互いに異なっている。ただし、この周期解は非対称解であり、図

(a) 応答曲線

(b) 解軌道と波形 ($\omega = 4.713$)

図6 4周期解応答特性

(a) 応答曲線

(b) 解軌道と波形 ($\omega = 4.25$)

図5 3周期解応答特性

(a) 応答曲線

(b) 解軌道と波形 ($\omega = 5.66$)

図7 5周期解応答特性

示した解波形は正の解のみを示してある。その他の特性に関しては、2周期解などと同様である。

3・4 カオス的挙動 以上の各分数調波応答曲線上の不安定領域にカオスが発生〔ただし、4周期解のうちの1個は例外。図6(a)参照〕することが容易に推測できるが、この点に関しては以下のようなものである。

図12は、図4(a)に示した2周期解の孤島状応答曲線の中央を走る分枝EDBに沿って振動数を増加させたときに得られた分岐線図の一部である。すなわち、図4(a)の点E近傍から点Dの方向へ振動数を変化させたときの分岐線図で、図4(a)のE点近傍に対応する(ただし、負の非対称解のみ表示)。この結果から、

(a) 応答曲線

(b) 解軌道と波形 ($\omega=4.78$)

図 7 7周期解応答特性

(a) 応答曲線

(b) 解軌道と波形 ($\omega=4.44578$)

図 9 8周期解応答特性

周期倍分岐によりカオス状態へ遷移しているものと予測できる。図12(b)は図12(a)に関連してカオスと推測できる状態のときの、ポアンカレ写像法により求めたアトラクタの一つであり、図中の小さな○印は対応する2周期解(特異点…不安定)である。図12(c)はこのときのリアプノフ指数のうち最大のもの λ_1 を強制外力のサイクル数に対して描いたものである。リアプノフ指数⁽²¹⁾の一つが正值であることがわかる。さらに、同図(d)は図12(b)のアトラクタに着目し、その安定、不安定多様体(すなわち、 α -, ω -枝)を図示したものである。これより、ホモクリニック構造であることが容易に認められる。ただし、これらの振動数 ω はすべて $\omega=2.6908$ である。以上より、この振動数における非周期応答現象はカオスであると判断できる。すなわち、図12に示した領域において振動数が増加するとき、2周期解に付随する周期倍分岐から、カオス現象が発生することがわかる。なお、図13は4周期解〔図6(a)参照〕に付随する分岐線図の一部であり、この場合も周期倍分岐によりカオス発生が容易に推測できる。

その他の周期解においても、上述した2, 4周期解の場合と同様、それぞれの孤島状応答曲線の中央を走る非対称解分枝の不安定領域において、周期倍分岐よりこの非対称解に付随したカオス現象が発生する。

図14は、引き込み領域をセル写像法⁽²²⁾により求めたアトラクタ圏境である。図14(a)は振動数 $\omega=2.6908$ のときの2周期解に付随するカオス領域のもので、図12に対応する〔図12(a)の記号: ↓(*)参照〕。図中の“赤色”の領域が正の2周期解に付随するカオス引き

(a) 応答曲線

(b) 解軌道と波形 ($\omega=4.17$)

図 10 9周期解応答特性

(a) 4個の6周期解応答曲線

(b) 応答Iの解軌道と波形 ($\omega=4.19$) (c) 応答II 解軌道と波形 ($\omega=4.256$) (d) 応答IIIの解軌道と波形 ($\omega=4.333$) (e) 応答IV 解軌道と波形 ($\omega=4.446$)

図 11 6周期解応答特性

込み領域であり、“青色”が負の2周期解に付随するカオスへの引き込み領域である。“黒色”は基本調和解(対称)のうちの共振解への領域，“緑色”はその非共振解(対称)への引き込み領域を意味する。この図から、それぞれの引き込み領域の境界は複雑であり、共振・非共振基本調和解への引き込み領域の境界のわずかなすきまにカオスへの引き込み領域が存在することがわかる。図14(b)は $\omega=2.8756$ のときの引き込み領域圏境である。これは3周期解(図5参照)に付随するカオス領域であり、図中、“赤色”が正の非対称3周期解へ付随するカオス，“緑色”が負の3周期解へ付随するカオス，“黒色”が共振基本調和解(対称)，“緑色”が非共振

(a) 分岐線図

(b) カオスアトラクタ

(c) リアプノフ指数

(d) 不变曲線

図 12 2周期解に付随するカオス特性

(a) 振動数 ω : 増大方向(b) 振動数 ω : 減少方向

図 13 4周期解に付随する分岐線図(その一部)

(a) 2周期解近傍 ($\omega=2.6908$) (b) 3周期解近傍 ($\omega=2.8756$) (c) 4周期解近傍 ($\omega=3.24817$)

図 14 引き込み圏境

(a) 図 14(a)の不变曲線

(b) 図 14(c)の不变曲線

図 15 不变曲線

(a) 外力の影響

(b) 非線形性の影響

(c) 遅れ量の影響

図 16 系パラメータの応答特性に及ぼす影響

基本調和解(対称)への引き込み領域を表す。同図(c)は $\omega=3.24817$ のときの、4周期解[図6(a)の記号: ↓(*)参照]に付随するカオス領域の引き込み領域の圏境で、“緑色”が非共振基本調和解, “赤色”が4周期解の近傍に存在する5周期解, 図中では判明しにくくなったもののこの赤色のごく一部に4周期解に付随するカオス, “黒色”が共振解(対称)へのそれぞれの引き込み領域を意味する。図14(b), (c)のカオス引き込み領域に対しても, 図14(a)と同様な状況にあることがわかる。なお, 図15(a)(b)はそれぞれ図14(a)(c)に対応する α -枝(図中, 太い実線)および ω -枝(図中, 細い実線)を同じ領域, または少し広範囲に渡り描いたもので, ホモクリニック構造を読みとることができる。また, 図中の○印は対応する周期解を示す。

これら各図から, 各々の引き込み領域は相互に複雑に入り込んでおり, 特に, カオスへの引き込み領域は共振・非共振基本調和解への引き込み領域の境界のわずかなすきまに存在していることがわかり, カオス現象を探索する際注意すべき点である。

3.5 系パラメータの応答特性に及ぼす影響 図16は, 2周期解の応答特性を例にとり, 系パラメータ

の応答特性に及ぼす影響を求めたものである。図16(a)は強制外力の影響を示したもので, その大きさが大きくなると(その他のパラメータは一定)当然のことながら2周期応答も増大し, 発生領域は高い振動数域に移動しかつ安定領域も広がる傾向にあることがわかる。同図16(b)は非線形性を表すパラメータ q の影響を示したもので, q が大きくなると応答の大きさは抑制される傾向にあることがわかり, この傾向は一般的な非線形系に認められるものと同様である。ただし, 応答の発生領域は高い振動数のほうへ移動する。図16(c)は時間遅れ項の大きさが及ぼす影響を求めたものである。この項の大きさが大きくなると, 応答の大きさおよび発生領域共に低下する傾向にある。その安定領域も減少していることが読みとれる。ただし, これらの応答曲線の中央を走る分枝は省略してある。

4. 結 言

時間遅れ要素を含む, 非線形振動系の分数調波共振領域の応答特性に着目し, 数値解析的に検討を加えた。その結果, 着目した分数調波振動数領域において数多くの次数の異なる分数調波応答が存在し, これら

の応答曲線は孤島状を示す。かつ、それらの分数調波解には一般的にカオスが付随するが、その応答構造は極めて多様である。すなわち、これらの分数調波振動の中には、同じ次数ではあるものの、複数の応答曲線を有するものも存在する。さらに、各々の周期解の不安定な領域において周期倍分岐を経て、カオス現象が発生することなどを明らかにしたが、応答特性の構造はそれほど単純ではなく、呈示した周期解の中には周期倍分岐・カオスにはなんら関係のない例外的な周期解(例えば、4周期解)も認めることができる。

なお、カオスであることはポアンカレ写像、安定・不安定多様体あるいはリアプノフ指数などを用いて判断した。

文 献

- (1) Tsuda, Y., ほか 3 名, *JSME Int. J.*, Vol. 35, No. 324 (1992), 259.
- (2) Guckenheimer, J. and Holmes, P., *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, Springer-Verlag (1983), 66.
- (3) Szemplinska-Stupnicka, W., ほか 2 名, *J. of Appl. Mech.*, 56-4 (1989), 947.
- (4) Moon, F. C., *Chaotic Vibrations*, (1987), 67, John Wiley & Sons.
- (5) 津田・ほか 3 名, 機論, 58-547, C (1992), 731.
- (6) Jackson, E. A., *Perspectives of nonlinear dynamics* (Vol. 1), (1989), 166, Cambridge Univ. Press.
- (7) Ehrich, F., Observations of Subcritical Superharmonic and Chaotic Response in Rotordynamics. *J. of Vibrations and Acoustics, ASME*, 114 (1992), 93.
- (8) Kim, Y. B. and Noah, S. T., *Int. J. Non-Linear Mech.*, 27-5 (1992), 833.
- (9) Kolmanovskii, V. B. and Nosov, V. R., *Stability of Functional Equations*, (1986), 13, Academic Press.
- (10) 例えば, Stepan, G., *Retarded dynamical systems: stability and characteristic functions*, (1989), 95, Longman Scientific & Technical (Essex).
- (11) 例えば, 巖佐, 数理生物学入門, HBJ 出版局, (1990), 55.
- (12) Minorsky, N., *J. Appl. Phys.*, Vol. 19 (1948), 332.
- (13) 上田・ほか 2 名, 電子通信学会論文誌, '78/6, Vol. J 61-B, No. 6 (1977), 457.
- (14) 吉武・ほか 2 名, 機論, 49-439, C (1982), 298.
- (15) Plaut, R. H. and Hsieh, J. C., *J. of Sound & Vib.*, 114-1 (1987), 73.
- (16) Awrejcewicz, J., *Acta Mech.* (Springer-Verlag), 77 (1989), 111.
- (17) Tsuda, Y., ほか 3 名, *Bull. of JSME*, 29-256 (1986), 3476.
- (18) 井上, 機械工学便覧(日本機械学会編), 3 (1976), 3-67.
- (19) 例えば, Hayashi, C., *Nonlinear Oscillations in Physical Systems*, (1964), 69, McGraw-Hill Co.
- (20) Szemplinska-Stupuniska, W., *Int. J. Non-Linear Mech.*, 21-5 (1986), 401-419.
- (21) 文献(4)の191ページ.
- (22) Hsu, C. S., *Cell-to-Cell Mapping*, (1987), 139, Springer-Verlag.