複合材料構造物のモデリングと 振動問題における研究展望*

成 田 吉 弘^{*1}

Modeling of Composite Structures and Overview on the Related Vibration Problems

Yoshihiro NARITA

Key Words: Overview, Modeling, Vibration, Composite Material, FRP Laminates, Elasticity, Plate Theory, Shell Theory

1. は し が き

複合材料(Composite Material)は、2種類以上の素材を明りょうな界面を持った状態で複合し、全体として有益な特性を持たせた材料である。素材の複合化により、単独では得られない特性を得ようとする考え方は古くよりあったが、現在では複合材料と言えばFRP、FRMなどの先端複合材料を意味しており、繊維形、粒子分散形など複合形態により種々の分類がある。このうち本展望では、炭素、ボロン、ガラスなどの連続した長繊維が一方に配列され、母材としてエポキシ材などプラスチックを利用した連続繊維形の複合材料を取り上げる。

これら繊維強化プラスチック(FRP)材料は、高い比強度と比剛性を持つことから構造物の軽量化に大きく貢献してきた。最近では、さらに研究開発が進み主要強度部材として応用されるようになった結果、この複合材料の力学的な取扱いが重要になってきた。力学の観点から複合材料を見ると、繊維によって生じる強い材料異方性に特徴があり、また層材(Lamina)を重ねて成形した平板、シェルといった積層構造材(Laminate)として使われることが多い。この層材の繊維方向を選択することにより、材料設計や最適化が可能になる点においても、在来構造材より優れた特色を持つ。しかし積層化により全体として複雑な挙動を示すことから、精度よく力学特性を把握することが構造設計に際して不可欠となる。複合材料の力学についてはいくつかの優れたテキスト^{(1)~(4)}があるが、その力学問

題のうち、破壊⁽⁴⁾、座屈⁽⁵⁾などの問題と並んで、重要なものが振動、衝撃、波動などのダイナミクスの問題である。

本展望では、初めに複合材料から成る積層構造材(積層板、積層シェル)について、その力学モデリングを行う手順を説明する。具体的には、連続体を「力の釣合い式、変位-ひずみ関係式、応力-ひずみ関係式、変位場の仮定」を用いて解析する。これらのうち力の釣合い式と変位-ひずみ関係式は微小変形の範囲内で従来の等方性理論と差はなく、応力-ひずみ関係式については複合材料の特徴として異方性が考慮されるが、弾性範囲内では関係式が確立されている。

しかし三次元弾性論から平板やシェルなどの二次元理論を導く際に仮定される変位場については、いまだ考察の余地がある。それは積層構造が複雑な異方性を示すこと、FRP材料のせん断弾性率が縦弾性率に比して相対的に小さく、構造の厚さ方向のせん断変形を無視できないことによる。このため従来の古典薄板(殻)理論で用いた仮定は十分ではないと考えられ、最近では板厚方向のせん断変形や伸びを考慮する理論が提案されている。本報告では、これら最近の複合材料の力学モデルの発展を概観し、その問題点、今後の可能性についてまとめる。さらに積層板の振動問題について、上記各理論に関連して、最近の研究動向の展望を試みる。平板と並ぶ重要な構造要素であるシェルについても同様に研究動向を説明する。

2. 複合材のモデリングと解析

2.1 積層材料の構造 振動問題などの構造解析を行うには、対象物と現象を力学モデルに置き換えるモデリングが必要となる。複合材料には、いろいろな

* 原稿受付 平成5年2月22日。

^{*1} 正員、北海道工業大学(〒006 札幌市手稲区前田7条15丁目)。

複合形態があるが、ここでは連続繊維複合材料を扱う。すなわち長繊維(Fiber)が一方向に平均的に配列され、エポキシなどの母材(Matrix)により固められた不均質な構造の材料である。繊維の縦弾性率は母材のそれに比べかなり大きく、繊維が主要な荷重を負担する構成要素となっている。構造解析においては、これらの微細な構造については微視力学(Micro-mechanics)に任せ、複合材料は複合則⁽⁴⁾に基づいた繊維と母材の平均的な特性を持つと仮定する巨視力学(Macro-mechanics)により扱う。この考え方により、複合材料は以降、異方性は持つが均質な連続体として異方性弾性論により解析が可能になる。

次に図1(a)の断面図に示す複数の層(Ply, Layer)から成る積層長方形板を例に考察する。図1(b)に取り出した第 k 層は、繊維の配列方向である1軸が(剛性が最大の)主軸方向となり、それに直角な2軸が(剛性が最小の)主軸となる。長方形の辺に平行に採った x - y 座標系を考え、1軸と x 軸の成す角度を θ_k とする。複合材料は材料設計が可能な材料(Tailored Material)と呼ばれるが、積層材において自由な方向に積層が可能な点は大きな長所である。一般には重ね方として、層の繊維(1軸)方向が互いに直角となるクロスプライ(Cross-ply)、 θ と $-\theta$ の層から成るアングルプライ(Angle-ply)といった積層形態がよく使われる。

2・2 積層板の解析モデリング 巨視力学の立場から連続体の挙動を解析するには、(1)力の釣合式、(2)変位-ひずみ関係式、(3)応力-ひずみ関係式、(4)変位場の仮定、が必要となる。

(1) 力の釣合式 複合材料から成る連続体においても力の釣合い

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{x,x} + \tau_{yx,y} + \tau_{zx,z} + X &= 0 \\ \tau_{xy,x} + \sigma_{y,y} + \tau_{zy,z} + Y &= 0 \\ \tau_{xz,x} + \tau_{yz,y} + \sigma_{z,z} + Z &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

は材料の性質と無関係に、等方性材料と同じ形式が成り立つ。ここで、 σ は垂直応力、 τ はせん断応力、 X 、 Y 、 Z は物体力、(,)はそれに続く変数による偏微分を示す。

(2) 変位-ひずみ関係式 構造の変形を微小(線形解析)に限ると、変位-ひずみ関係式

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= u_{,x}, \epsilon_y = v_{,y}, \epsilon_z = w_{,z}, \\ \gamma_{xy} &= u_{,y} + v_{,x}, \gamma_{yz} = w_{,y} + v_{,z}, \\ \gamma_{zx} &= w_{,x} + u_{,z} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

は、材料の異方性と無関係に成り立つ。ただし ϵ は垂直ひずみ、 γ はせん断ひずみであり、 u 、 v 、 w はそれ

ぞれ x 、 y 、 z 方向の変位を示す。

(3) 応力-ひずみ関係式 これは材料に依存する構成方程式であり、最も一般的な三次元理論から考えてみる。面内の1軸、2軸に加え、板厚方向を3軸とすると、三次元解析では応力

$$\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{12}\} \dots\dots\dots (3\cdot a)$$

とひずみ

$$\{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \gamma_{23}, \gamma_{31}, \gamma_{12}\} \dots\dots\dots (3\cdot b)$$

の間の関係を考慮しなければならない。複合材料はしばしば応力依存性を持った応力-ひずみ関係を示し、静解析ではこの非線形弾性を仮定することがある。しかし振動解析では、線形弾性を仮定することで十分と考えられている。そこで応力(3・a)とひずみ(3・b)は、材料定数 $Q_{ij}(i, j=1, \dots, 6)$ を用いた一次式により関係づけられる(材料特性の対称性を考えると、 $Q_{ij}=0$ の要素が多い)。ただし Q_{ij} の添字 i, j は

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 \rightarrow 1, \sigma_2 \rightarrow 2, \sigma_3 \rightarrow 3, \\ \tau_{23} \rightarrow 4, \tau_{31} \rightarrow 5, \tau_{12} \rightarrow 6 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

(ひずみも同様)のように対応させた時の、 i 番目の応力と j 番目のひずみの関係を与えている。ここで Q_{ij} には、各主軸方向の縦弾性係数や、せん断弾性係数、ポアソン比などが含まれる。

しかし材料主軸に沿った1-2軸座標は、例えば図1の積層長方形板の形状に合わせて採る x - y 座標系と斜交した関係にある。そこで解析に便利な x - y 座標を用いるため、 Q_{ij} を θ_k 角度回転させ、 x, y 方向の応力とひずみ

(a) 断面の構造 (b) 第 k 層ラミナ

図1 積層構造要素の断面と座標系

$$\{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy}\} \dots\dots\dots (5\cdot a)$$

$$\{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}, \gamma_{xy}\} \dots\dots\dots (5\cdot b)$$

の関係式に変換する。その変換後の材料定数を $\bar{Q}_{ij}$ で表す。

2・3 変位場の仮定と各積層板理論 複合材料構造の解析において2・2節(1)～(3)で説明した関係式は確立されている。しかし変位場については、いまだ議論の余地があると思われるので、変位場の仮定とそれから生じる積層板理論を本節において考察する。

一般的な三次元弾性論から、平板理論やシェル理論など二次元化された理論を導くには、変形を規定する変位場を導入する必要がある。その際、厚さ方向の挙動をどう考えるかにより、用いる仮定に違いが生じる。とくにFRPの小さなせん断弾性率に起因する面外のせん断変形の評価により、理論が異なってくる。そこで板内部の変位 $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$, $w(x, y, z)$ を、中央部 ($z=0$) における量 $u_i(x, y)$, $v_i(x, y)$, $w_i(x, y)$ により展開すると、

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= \sum_{i=0}^{\infty} z^i u_i(x, y) \\ &= u_0 + zu_1 + z^2 u_2 + z^3 u_3 + z^4 u_4 + \dots\dots\dots \end{aligned} \quad (6\cdot a)$$

$$v(x, y, z) = \sum_{i=0}^{\infty} z^i v_i(x, y) \quad (6\cdot b)$$

$$w(x, y, z) = \sum_{i=0}^{\infty} z^i w_i(x, y) \quad (6\cdot c)$$

と表される。式(6・c)は板が厚さ方向に伸縮する変形を含めた表現である。これを無視して $w(x, y, z) = w_0(x, y)$ と考えて解析を行うことが多いが、場合によっては z の一次以上の項を考慮した解析もある。また $v(x, y, z)$ は $u(x, y, z)$ と同じ面内変位であり、一般性は失われないので、今後は式(6・a)を中心に議論を進める。

(a) 古典板理論(CPT: Classical Plate Theory)

その適用範囲から薄板理論(Thin Plate Theory)とも呼ばれるこの理論は、 z の1次の項をとり、かつキルヒホッフの仮定(変形前に中央面に直角な平面は変形後も直角な平面を保つ)により $u_1 = -w_{,x}$ とする。

$$u(x, y, z) = u_0 + zu_1 = u_0 - zw_{,x} \quad (7)$$

この式を $w(x, y, z) = w_0(x, y)$ と共に、式(2)の γ_{xz} に、代入すると解るように、式(7)の変位場は面外のせん断変形を無視することになる。この場合、各層において

$$\{\sigma\} = \{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}\}^T \quad (8\cdot a)$$

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}\}^T \quad (8\cdot b)$$

だけを考えれば十分であり、最も簡単な積層板モデルである。いま板厚全体の合応力[式(8・a)の板厚にわたる積分値]と合モーメント[式(8・a)の一次モーメント

の板厚にわたる積分値]

$$\{N\} = \{N_x, N_y, N_{xy}\}^T \quad (9\cdot a)$$

$$\{M\} = \{M_x, M_y, M_{xy}\}^T \quad (9\cdot b)$$

を求める。その結果、式(9・a, b)と中央面 ($z=0$) における式(8・b)、および曲率ベクトル

$$\{\kappa\} = \{\kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}\}^T \quad (10)$$

(κ_x, κ_y : x, y 方向の曲率, κ_{xy} : ねじれの曲率)の間の関係式

$$\begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [B]^T & [D] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \kappa \end{bmatrix} \quad (11)$$

が得られる。ただし $[A][B][D]$ の各要素は

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^L \bar{Q}_{ij}^{(k)} (z_k - z_{k-1}) \quad (12\cdot a)$$

$$B_{ij} = (1/2) \sum_{k=1}^L \bar{Q}_{ij}^{(k)} (z_k^2 - z_{k-1}^2) \quad (12\cdot b)$$

$$D_{ij} = (1/3) \sum_{k=1}^L \bar{Q}_{ij}^{(k)} (z_k^3 - z_{k-1}^3) \quad (12\cdot c)$$

で与えられる(古典板理論では、 $i, j=1, 2, 6$ のみ使う)。ただし、 z_k は板の中央面から第 k 層の上面までの距離を示す(図1)。ここで式(12・a～c)は、物理的に積層板全体を一枚の平板と考えた場合の、それぞれ面内の伸び、伸び-曲げ連成、曲げに関する剛性を与える。以上の等価な剛性を求める理論は、積層理論(LT: Lamination Theory)と称され、これにより積層板は一枚の一般異方性平板にモデル化される。ただし、3種類の剛性を常に必要とするわけではなく、($\theta, -\theta, \theta$)のように中央面に関して対称に積層された積層板では、連成剛性は $B_{ij}=0$ となる。その結果、面内変形と面外(曲げ)変形は非連成化され、CPTで微小な曲げ変形を考察する場合は、式(12・c)の剛性 D_{ij} だけを用いれば十分となる。

この古典板理論(CPT)と積層理論(LT)の組み合わせである古典積層理論(CLT)は、十分薄いFRP積層板では妥当な仮定であり、積層板の固有振動の実験値とも比較的よく一致することが知られている⁽⁶⁾。

(b) 一次せん断変形理論(FSDT: First-order Shear Deformation Theory) この理論は(a)と同様に、中央面に直角な平面は変形後も平面を保つが、せん断変形を考慮して変形後の平面の角度に関する自由度 u_1 を残している。すなわち

$$u(x, y, z) = u_0 + zu_1 \quad (13)$$

と考える。式(13)を $w(x, y, z) = w_0(x, y)$ と共に、式(2)の γ_{xz} に代入しても0にはならず、板厚方向のせん断応力とひずみの関係式が解析に必要となる。さらにせん断ひずみは z の関数ではなく、単に A_{ij} を乗じたのみでは面外のせん断応力が厚さ方向に一定値となり、自由表面である板上下面で0とならない。こうし

た板厚方向のせん断合応力 $\{N_{yz} \ N_{zx}\}$ の過大評価の補正のため、せん断修正係数 k を持つ関係式

$$\begin{Bmatrix} N_{yz} \\ N_{zx} \end{Bmatrix} = k \begin{bmatrix} A_{44} & A_{45} \\ A_{45} & A_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} \cdots \cdots \cdots (14)$$

を考えるのが一般的である。

等方性平板に対して本理論を提案した Reissner⁽⁷⁾ や Mindlin⁽⁸⁾ は、それぞれ $k=5/6=0.833$ と $k=\pi^2/12=0.822$ の値を提唱している。この理論を積層板に導入したのが、Yang らの研究⁽⁹⁾ であり、以後の積層板の解析でもこれらの値が使われている。しかし k の値により、せん断の効果を過大(過小)評価する可能性があり、計算結果が k に依存し異なることは明らかである。とくに、せん断の方向により材料特性が異なる複合材料の問題に、等方性板と同じせん断修正係数の一定値を使うことに疑問があるが、その影響を検証した文献は見受けられない。

(c) 高次せん断変形理論(HSDT: Higher-order Shear Deformation Theory) Reddy⁽¹⁰⁾ の論文からひん繁に使われるようになった本理論は、3 次の高次項

$$u(x, y, z) = u_0 + zu_1 + z^2u_2 + z^3u_3 \cdots \cdots \cdots (15)$$

まで考慮している。せん断応力を上下板面で 0 とするため $u_2=0$ となり、FSDT で問題となったせん断修正係数 k は不要となる。しかし(12・a-c)に加え、さらに高次の物理的意味の明確でない剛性と、それに伴う境界条件の扱いに問題を生じている。

以上の(a)CLT, (b)FSDT, (c)HSDT は、積層板に対して積層理論により等価剛性を求め、それぞれに仮定した変位場に基づき異方性板理論を展開している。これに対し以下の(d)(e)は、二次元化された平板理論に還元しない点で根本的な相違がある。

(d) 多層理論(MLT: Multi Layer Theory) 多層理論⁽¹¹⁾⁽¹²⁾ は、Individual Layer Theory と呼ばれ、積層材の各層 ($k=1, 2, \dots, L$) ごとに採った座標系において支配方程式を与え、層間の変位、応力の連続条件、および自由表面条件によって全体の系をモデル化する。未定係数と方程式の数を揃え、各層において面内変位を 3 次式、面外変位を 2 次式で近似する。

$$u(x, y, z) = u_0 + zu_1 + z^2u_2 + z^3u_3 \cdots \cdots \cdots (16\cdot a)$$

$$v(x, y, z) = v_0 + zv_1 + z^2v_2 + z^3v_3 \cdots \cdots \cdots (16\cdot b)$$

$$w(x, y, z) = w_0 + zw_1 + z^2w_2 \cdots \cdots \cdots (16\cdot c)$$

したがって厚さ方向の伸びやせん断変形が考慮されている。なお、この方法は層の釣り合い式や展開項の選択などにややあいまいさがあり、全周単純支持長方形板など特定の境界条件を有する場合を除いて、現在のと

ころ解析的な扱いが困難である。しかし層ごとに独立した支配方程式を立てる考え方は、板厚全体の等価剛性を用いる積層板理論(a)~(c)より理論の厳密性があり、今後の発展性が期待される。

(e) 三次元理論(TDT: Three Dimensional Theory) 本来であれば複雑な積層板の問題であっても、最も一般的な理論である三次元異方性弾性論により変位場の仮定なく、解決されるものである。ただ積層板を三次元理論で、一般的な境界条件に対して解析解を導くことは困難であり、また FEM で数値的に扱うにしても、最終的に解く方程式が一方向自由度の 3 乗で増加し計算規模の点から実用的でない。

ただし特定の積層と境界条件を持つ場合については、三次元解析が可能となる。現在のところ、三次元解析は実用性よりも、(a)~(d)の各理論の妥当性の検証のために重要と言えよう。

3. 積層板の振動問題の動向

本節では、積層板の振動問題に関するこの 5 年間の研究を中心に、主な文献を取り上げ動向を概観する。必要に応じて、静的解析の論文も含んでいる。

3.1 積層長方形板の振動問題と解析モデル 最近の積層長方形板の振動問題に関する文献を調べると、2 節で紹介した HSDT や MLT など板厚方向の高次の変位場を考える研究が主流になっている。こうした理論の発展に大きく寄与したのが、積層板の解析に HSDT を導入した Reddy⁽¹⁰⁾ であるが、彼はその後も積層板のモデリングに関する精力的な研究を続けている。1987 年に HSDT を含む二次元化理論を一般的にまとめ⁽¹³⁾、このモデルに基づき周辺支持板の厳密解を導くとともに⁽¹⁴⁾、FEM 要素について解説している⁽¹⁵⁾。また FRP ではないが母材が金属の FRM について構成式を提案し、それを FSDT により FEM 要素の定式化も行っている⁽¹⁶⁾。

Librescu も高次モデルの研究を行っており⁽¹⁷⁾、Reddy と共著によりいくつかの解析モデルを比較した報告がある⁽¹⁸⁾。同様に静的問題に対して、七つの解析モデルによる比較も行われている⁽¹⁹⁾。このほか、層別のせん断特性を考慮したり⁽²⁰⁾、ラグランジュ乗数で応力連続性を保証するモデルも提案⁽²¹⁾されている。

こうした各種モデルに基づいた積層長方形板の振動解析法と数値結果が多数発表されている。CLT を用いた研究としては、対称積層された片持長方形板の振動数データ⁽²²⁾や、リッツ法に直交多項式⁽²³⁾や任意の境界条件を満たす変位関数⁽²⁴⁾を提案した文献がある。またパソコンで利用可能な FEM⁽²⁵⁾や、グリーン関数を

使う方法⁽²⁶⁾などがある。

FSDT では、三角形 FEM 要素を導いた研究⁽²⁷⁾⁽²⁸⁾があり、HSDT でも同様に FEM により非対称積層板⁽²⁹⁾⁽³⁰⁾を解析している。また HSDT により、対辺支持のクロスプライ板に対する厳密解を与えた文献⁽³¹⁾もある。

MLT を用いて周辺支持長方形板の振動数を求めたのは、文献⁽¹²⁾であるが、この計算結果の一部の精度が HSDT の結果⁽¹⁴⁾より劣る点に関して疑問が出されている⁽³²⁾。これに対し、Cho らは MLT で使われた力の釣合い式に変分的裏付けがないことを認めている⁽³³⁾。

TDT については、逆対称積層板のフーリエ級数解を導いた文献⁽³⁴⁾や、変分法の裏付けを用い反復による三次元解を与えた解析⁽³⁵⁾などがある。

3・2 ほかの形状と幾何的特徴を持つ積層板 積層板の振動解析は長方形板を扱った論文が大多数であり、他の形状を持つ積層板の解析、とくに HSDT など高次モデル理論の適用はこれからの問題である。

FRP は航空機への応用が多いことから、翼モデルとして台形や後退翼形の積層板を FEM により解析した研究がある⁽³⁶⁾。同様に平行四辺形板⁽³⁷⁾、ねじれのある片持ち板(偏平シェル)⁽³⁸⁾の振動も解析されている。円板では、周辺自由板⁽³⁹⁾、回転板⁽⁴⁰⁾、有孔円板⁽⁴¹⁾の解析もある。また円孔を持つ長方形板の FEM 解析⁽⁴²⁾もある。

板形状の問題のほかに、横方向からの低速の衝撃などにより生じる層間のはく離(Delamination)という積層板に固有な問題がある。はく離は板の剛性をかなり減少させるため重要な問題であるが、現在のところ座屈強度におもな関心が集まり⁽⁵⁾、それに比較して振動への影響を扱った例は多くはない⁽⁴³⁾。

以上で取り上げた積層板は、複合材料の層を密に重ねた積層板であるが、中間にハニカムなどを入れ、上下面の FRP 層を離すことで曲げ剛性を向上させる利用法がある。こうしたサンドイッチ板についても活発な研究がなされ、その FEM 要素に関する展望記事が出されている⁽⁴⁴⁾。こうした FEM 解析による数値例⁽⁴⁵⁾や、板厚が変化するサンドイッチ板の FDM⁽⁴⁶⁾と FEM⁽⁴⁷⁾の解析、また円板のガレルキン法による解⁽⁴⁸⁾などが報告されている。

3・3 非線形振動、ランダム振動、熱、動的不安定などの問題 振幅が板厚程度のオーダになると線形振動解析の固有値問題から、解析は幾何的に非線形な釣合い状態を示す微分方程式の解を求める問題となる。積層板の非線形振動に対して一般的な条件下で解析解

を得ることは困難であり、種々の近似解法を用いる点は従来の等方性板の解析と同じである。式(2)の変位-ひずみ式に 2 次の非線形項を導入する Von Karman 形の CLT 解析が多く、周辺支持のクロスプライ板の直接積分による解⁽⁴⁹⁾、一般的な積層板のガレルキン法による解⁽⁵⁰⁾や FEM 解析⁽⁵¹⁾がある。また FSDT⁽⁵²⁾や高次のせん断変形を考慮した文献⁽⁵³⁾も見られる。

以上の変形の程度による幾何的非線形性のほか、複合材の材料特性による非線形問題もある。すなわち材料によっては引張りと圧縮の弾性率が無視できないほど異なる場合があり、こうした材料定数の二値性を考慮したモデルを提案し⁽⁵⁴⁾、Bert によるモデル⁽⁵⁵⁾と比較した研究もある。

積層板のランダム振動を扱った研究として HSDT を用いて応答を求めた文献⁽⁵⁶⁾⁽⁵⁷⁾や、大変形の非線形ランダム応答を解析した報告もある⁽⁵⁸⁾。

そのほか、周期的な面内荷重による動的不安定の問題が、CLT⁽⁵⁹⁾と HSDT⁽⁶⁰⁾のモデルに基づいて解析されている。同様な問題が、通常の HSDT と少し異なる高次理論により FEM 解析されている⁽⁶¹⁾。

3・4 積層板の振動と最適設計問題 複合材料は材料設計が可能な材料と先に述べたが、最適設計の手法を導入してその長所を活用することができる。最適設計とは、与えられた制約条件の下で、設計変数(Design Variable)と呼ばれるパラメータを変化させて、目的関数(Object Function)を最適にするための方法である。積層板の場合は、設計変数として層ごとの繊維配向角や層厚さを採用するが、その一般的な解説は文献⁽⁶²⁾⁽⁶³⁾に与えられている。振動に問題を限定すると、最適設計は固有振動数等の制約下において最小重量となる設計変数を求めるか⁽⁶⁴⁾、または目的関数を基本振動数や応答量としてその最大化(最小化)を試みることになる⁽⁶⁵⁾。

こうした設計の基礎となる感度計算機能を組込んだ FEM 手法⁽⁶⁶⁾、設計変数を離散化することで手順を単純化した設計法⁽⁶⁷⁾などの提案や、ニューラルネットの座屈最適化法⁽⁶⁸⁾の振動への応用も考えられ、今後も発展の余地があるように思われる。

4. 積層シェルの振動問題の動向

積層シェルでも、積層平板に見られたと同様の研究傾向がある。円筒シェルでは、せん断変形を考慮した FSDT、HSDT が主流だが、それ以外の形状では、平板の CPT と同様にせん断変形を無視する古典(薄肉)殻理論(CST)もまだ多い。解析手法としては FEM による解析が中心である。

偏平シェルの振動問題では、積層偏平シェルの支配方程式とエネルギー表現を与え⁽⁶⁹⁾、それを周辺自由シェルの自由振動へ適用した研究⁽⁷⁰⁾がある。この偏平殻の応答実験⁽⁷¹⁾や非線形振動⁽⁷²⁾を扱った文献も見受けられる。

閉じた円筒シェルでは、CST に基づき一様厚さ⁽⁷³⁾と変厚⁽⁷⁴⁾のシェルについての FEM 解析例や、任意の境界条件に対する解析法の提案⁽⁷⁵⁾がある。FSDT ではリッツ解析⁽⁷⁶⁾や、Donnell 形の理論を用いた場合の解析法⁽⁷⁷⁾の提案がある。HSDT に基づく解析では、級数解⁽⁷⁸⁾とガレルキン解⁽⁷⁹⁾を与えた文献があり、おもにせん断変形の効果を議論している。

ほかの積層円筒シェルのモデルとして、層ごとに断片線形の変位分布を考える理論の適用⁽⁸⁰⁾や、それを含めた各モデリング理論を展望した文献⁽⁸¹⁾もある。また軸方向振動の三次元解析⁽⁸²⁾もある。

円筒以外のシェルとしては、CST に基づくパラボラの曲率を持つシェルのねじり振動の FDM 解析⁽⁸³⁾、FSDT による球状シェルのガレルキン解析⁽⁸⁴⁾⁽⁸⁵⁾やふたのある円筒殻の FEM 解析⁽⁸⁶⁾がある。円すいシェルでは、FSDT による数値解法⁽⁸⁷⁾と HSDT による FEM 解析⁽⁸⁸⁾がある。また熱入力を受ける偏平シェルの振動⁽⁸⁹⁾と安定性⁽⁹⁰⁾に対して、CST に基づき解析解を導いた研究もある。

5. お わ り に

本展望では、複合材料の積層構造材の解析モデリングの概略から、積層平板とシェルの振動問題の最近の研究動向までの総説を試みた。ただし振動に関連したほかの重要なテーマである減衰の問題は取り上げていない。また引用した以外にも多数の文献があるが、本報ではできる限り最新の論文を引用したので、特定のテーマに関心のある方は、引用された論文中の参考文献を参照願いたい。

なお本展望の執筆に当たり、共同研究者として常にご協力頂いている北海道工業大学太田佳樹講師に厚く謝意を表す。

文 献

- (1) Jones, R. M., *Mechanics of Composite Materials*, (1975), Scripta, Washington D. C.
- (2) Vinson, J. R. and Sierakowski, R. L., *The Behavior of Structures Composed of Composite Materials*, (1986), Martinus Nijhoff, Dordrecht [福田・ほか 3 名訳, 複合材料の構造力学, (1987), 日刊工業新聞社].
- (3) 福田・邊, 複合材料の力学序説, (1989), 古今書院.
- (4) 藤井・座古, 複合材料の破壊と力学, (1978), 実教出版.
- (5) 成田, 複合材料構造物の座屈問題と最近の研究動向, 機械の研究, 45-6(1993), 669.
- (6) 成田・一ノ宮・丸山・津島, 機構論, No. 920-55, B (1992), 450.
- (7) Reissner, E., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, **67** (1945), A 69.
- (8) Mindlin, R.D., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, **73** (1951), 31.
- (9) Yang, P. C., ほか 2 名, *Int. J. Solids Struct.*, **2** (1966), 665.
- (10) Reddy, J. N., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, **51** (1984), 745.
- (11) Noor, A. K. and Burton, W. S., *Trans. ASME, Appl. Mech. Rev.*, **42-1** (1989), 1.
- (12) Cho, K. N., ほか 2 名, *J. Sound Vib.*, **145-3** (1991), 429.
- (13) Reddy, J. N., *Commun. Appl. Numer. Method*, **3** (1987), 173.
- (14) Reddy, J. N. and Phan, N. D., *J. Sound Vib.*, **98** (1985), 157.
- (15) Reddy, J. N., *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **27** (1989), 361.
- (16) Arenburg, R. T. and Reddy, J. N., *Comput. Struct.*, **40-6** (1991), 1357.
- (17) Librescu, L., *J. Sound Vib.*, **147** (1991), 1.
- (18) Librescu, L. and Reddy, J. N., *Int. J. Eng. Sci.*, **27** (1989), 515.
- (19) Rohwer, K., *Int. J. Solids Struct.*, **29** (1992), 105.
- (20) Reddy, K. J. and Vijayakumar, K., *J. Sound Vib.*, **158** (1992), 257.
- (21) Chomkwar, V. and Avula, X. J. R., *Comput. Struct.*, **37** (1990), 845.
- (22) Narita, Y. and Leissa, A. W., *J. Sound Vib.*, **154-1** (1992), 161.
- (23) Chow, S. T., ほか 2 名, *Compo. Struct.*, **20** (1992), 213.
- (24) 成田, 日本複合材料学会誌, **18-3** (1992), 113.
- (25) 鈴木・松本・座古, 機論, 55-511, C (1989), 533.
- (26) 細川・矢田・坂田, 機論, 57-543, C (1991), 3413.
- (27) Shiau, L. and Chang, J., *Comput. Struct.*, **39** (1991), 735.
- (28) Martin, C. W. and Lung, S. F., *Comput. Struct.*, **40-5** (1991), 1249.
- (29) Mukherjee, A., *Comput. Struct.*, **40-6** (1991), 1387.
- (30) Kant, T. and Mallikarjuna, *J. Sound Vib.*, **134** (1989), 1.
- (31) Khdeir, A. A., *J. Sound Vib.*, **128** (1989), 377.
- (32) Bhasker, K. and Varadan, T. K., *J. Sound Vib.*, **154** (1992), 178.
- (33) Cho, K. N., ほか 2 名, *J. Sound Vib.*, **154** (1992), 180.
- (34) Noor, A. K. and Burton, W. S., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, **57** (1990), 182.
- (35) Savoia, M. and Reddy, J. N., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, **59** (1992), 166.
- (36) Lee, I. and Lee, J. J., *Comput. Struct.*, **37** (1990), 1077.
- (37) Krishnan, A. and Deshpande, J. V., *J. Sound Vib.*, **153** (1992), 351.
- (38) Qatu, M. S. and Leissa, A. W., *Int. J. Mech. Sci.*, **33** (1991), 927.
- (39) Sivakumaran, K. S., *J. Sound Vib.*, **125** (1988), 211.
- (40) Bhumbla, R., ほか 2 名, *AIAA J.*, **28** (1990), 1962.
- (41) Srinivasan, R. S., ほか 2 名, *J. Sound Vib.*, **140** (1990), 175.
- (42) Ramakrishna, S., ほか 2 名, *Compo. Struct.*, **21** (1992), 177.
- (43) Shen, M. H. and Grady, J. E., *AIAA J.*, **30** (1992), 1361.
- (44) Ha, K. H., *Comput. Struct.*, **37** (1990), 397.
- (45) Rao, K. M. and Meyer-Piening, H. R., *Comput. Struct.*, **41** (1991), 177.

- (46) Lu, C. H. and Libove, C., *AIAA J.*, **29** (1991), 299.
- (47) Chang, J. S. and Chen, H.C., *J. Sound Vib.*, **155** (1992), 195.
- (48) Sherif, H. A., *J. Sound Vib.*, **157** (1992) 531.
- (49) Singh, G., ほか 2 名, *AIAA J.*, **29** (1991), 784.
- (50) Woo, J. and Nair, S., *AIAA J.*, **30** (1992), 180.
- (51) Chiang, C. K., ほか 2 名, *Trans. ASME, J. Vib. Acous.*, **113** (1991), 309.
- (52) Ganapathi, M., ほか 2 名, *Comput. Struct.*, **39** (1991), 685.
- (53) Barbero, E. J. and Reddy, J. N., *AIAA J.*, **28** (1990), 1987.
- (54) Sacco, E. and Reddy, J.N., *Comput. Struct.*, **39** (1/2), (1991), 149.
- (55) Bert, C. W., *Trans. ASME, J. Engng. Mater. Technol.*, **99** H(4), (1977), 344.
- (56) Singh, M. P. and Abdelnaser, A. S., *AIAA J.*, **30** (1992), 1081.
- (57) Srinivasan, R. S. and Krishnan, P. A., *Trans. ASME, J. Vib. Acous.*, **113** (1991), 286.
- (58) Locke, J., *AIAA J.*, **29** (1991), 1480.
- (59) Mond, M. and Cederbaum, G., *J. Sound Vib.*, **154** (1992), 271.
- (60) Cederbaum, G., *AIAA J.*, **29** (1991), 2000.
- (61) Kwon, Y. W., *Comput. Struct.*, **38** (1991), 57.
- (62) Vanderplaats, G. N. and Weisshaar, T. A., *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **27** (1989), 437.
- (63) 福永, 日本複合材料学会誌, **16** (1990), 75, 115, 256.
- (64) Lin, C. C. and Yu, A. J., *Comput. Struct.*, **38** (1991), 581.
- (65) Bruch, J. C., ほか 3 名, *Comput. Struct.*, **37** (1990), 87.
- (66) Mateus, H. C., ほか 2 名, *Comput. Struct.*, **41** (1991), 501.
- (67) 成田・太田, 機講論, No. 920-2 (1992), 99.
- (68) 邊・木野山, 機講論, No. 920-17 A (1992), 128.
- (69) Leissa, A. W. and Qatu, M. S., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, **58** (1991), 181.
- (70) Qatu, M. S. and Leissa, A. W., *J. Sound Vib.*, **151** (1991), 9.
- (71) Palazotto, A., ほか 2 名, *AIAA J.*, **30** (1992), 1827.
- (72) Rauof, R. A. and Palazotto, A., *Compo. Struct.*, **20** (1992), 249.
- (73) Lakshminarayana, H.V. and Dwarakanath, K., *J. Sound Vib.*, **154** (1992), 431.
- (74) Ganesan, N. and Sivadas, K. R., *Comput. Struct.*, **35** (1990), 239.
- (75) Narita, Y., ほか 3 名, *AIAA J.*, **30** (1992), 790.
- (76) 太田・ほか 3 名, 機論, **57**-538, C(1991), 1815.
- (77) Nosier, A. and Reddy, J. N., *J. Sound Vib.*, **157** (1992), 139.
- (78) Jegley, D. C., *J. Sound Vib.*, **138** (1990), 389.
- (79) Soldatos, K. P., *J. Sound Vib.*, **144** (1991), 109.
- (80) Barbero, E. J., ほか 2 名, *AIAA J.*, **28** (1990), 544.
- (81) Noor, A. K., ほか 2 名, *Int. J. Solids Struct.*, **27** (1991), 1269.
- (82) Hawkes, T. D. and Soldatos, K. P., *AIAA J.*, **30** (1992), 1089.
- (83) Kayran, A. and Vinson, J. R., *J. Sound Vib.*, **141** (1990), 231.
- (84) Chao, C. C., ほか 2 名, *Trans. ASME, J. Vibr. Acous.*, **113** (1991), 152.
- (85) Narasimhan, M. C. and Alwar, R. S., *J. Sound Vib.*, **154** (1992), 515.
- (86) Singh, A. V., ほか 2 名, *J. Sound Vib.*, **148** (1991), 265.
- (87) Kayran, A. and Vinson, J. R., *AIAA J.*, **28** (1990), 1259.
- (88) Sivadas, K. R. and Ganesan, N., *J. Sound Vib.*, **152** (1992), 27.
- (89) Huang, N. N. and Tauchert, T. R., *J. Sound Vib.*, **154** (1992), 485.
- (90) Birman, V. and Bert, C. W., *J. Sound Vib.*, **142** (1990), 183.