微小すきま気体潤滑流れの数値解析 に対する各種スキーム* (定常解析)

川 端 信 義*¹, 坂 口 洋 之*²

Some Schemes for Gas-Lubricated Reynolds Equation in the High-Bearing-Number Region (Steady Analysis)

Nobuyoshi KAWABATA and Hiroshi SAKAGUCHI

The purpose of this paper is to compare some schemes for the applicability to the gas-lubricated Reynolds equation in the high-bearing-number region. Weighted upstream schemes (the simple upstream, the exponential method, the stabilization method), polynomial approximation schemes (QUICK scheme, Kawamura-Kuwahara scheme, etc.) and the exponential approximation method are taken up. Steady pressure distributions of slider bearings are calculated using these schemes. It has been clarified that polynomial approximation schemes are unstable and that the exponential approximation method and the stabilization method are the most precise.

Key Words: Lubrication, Hydro-Dynamic Bearing, Numerical Analysis, Gas-Lubricated Reynolds Equation, Steady Analysis, High-Bearing-Number, Schemes

1. ま え が き

気体潤滑流れではベアリング定数といわれる無次元数 Λ が重要である。 Λ はポアズイユ流による流量成分とクエット流による流量成分の比であり、クエット流の成分が大きい程 Λ も大きくなる。また Λ の値は2つの軸受面の相対滑り速度 U に比例し、周囲圧力 p_a に反比例し、すきま c の自乗に反比例する。そのため、高速化する程、すきまが極小化する程および低圧環境になる程 Λ 値は大きくなる。 Λ 値が大きい場合の数値計算では、数値的不安定が発生することが経験的に知られており、不安定が生じる部分で局所的に分割を細かくするという対策が講じられていた⁽¹⁾。しかし、磁気記録ヘッドを代表とする気体軸受の高性能化に伴い、 Λ 値はますます高くなり、細分割による対策だけでは間に合わなくなっている。さらに磁気テープヘッドではわずかな圧力の振動がテープの変形に影響を与えることも考えられ、高精度、高安定な解法が必要とさ

れる。

図1は、距離 L 離れた2点間 ($X=0 \sim 1$) の圧力分布を示した図である。ただし、区間内のすきまは一定とし、 $X=0$ 点の圧力は $P=2$ 、 $X=1$ 点の圧力は $P=1$ とする。図から $\Lambda \rightarrow 0$ (非圧縮性流体の場合に対応) の場合は圧力分布は直線となるが、 Λ が大きくなるにつ

図 1: 2点間の圧力分布

* 原稿受付 平成5年3月15日。

*¹ 正員, 福井大学工学部 (〒910 福井市文京 3-9-1)。*² 学生員, 福井大学工学部学生。

れて区間内の圧力が上昇し、 $\Lambda = 100$ ではほぼ $X = 0$ の圧力($P = 2$)に等しくなる。従来の方法はこの圧力分布を直線と近似したものであるが、 Λ 値が高くなると直線で近似することが不都合になる。このことが数値計算が不安定になる理由である。

著者の一人は、上記のような数値的不安定の原因の考察から不安定が生じる条件を明らかにし、粗い分割でも安定な解を求め得る計算手法(重み付き上流化スキーム)を示した⁽²⁾⁽³⁾。本論文では、気体潤滑レイノルズ方程式と流体の運動を支配するナビエ・ストークス方程式の類似性に注目し、高レイノルズ数域における流れ解析で成果を挙げている代表的なスキームを気体潤滑レイノルズ方程式の数値計算に適用し、重み付き上流化スキームとの比較を通して気体潤滑問題への適用の是非についての考察を行った。

本論文で使われる主な記号を以下に示す。

- B : スライダ軸受の幅。
 c : 基準すきま。
 h, H : 潤滑厚さ。 $H = h/c$
 L : 基準長さ。スライダ軸受の長さ。
 M_X : スライダ滑り方向の分割数。
 p, P : 圧力。 $P = p/p_a$
 p_a, ρ_a : 基準圧力, 基準密度。
 q, Q : 質量流量。 $Q = q (12\mu L / \rho_a c^3 p_a)$
 U : 滑り速度。
 x, X : 滑り方向座標。 $X = x/L$
 ξ : 計算座標。
 μ : 粘性係数。
 Λ : ペアリング定数。 $= 6\mu UL / p_a c^2$

2. 各種スキーム

既報⁽³⁾と同様に任意の潤滑膜厚さを有する一次元定常潤滑問題(図2)を取り上げて、各スキームを説明する。等温変化する時の X 方向の質量流量 Q は

$$Q = -H^3 P \frac{dP}{dX} + \Lambda H P \quad \dots\dots\dots (1)$$

である。右辺の第1項がポアズイユ流の成分、第2項はクエット流の成分である。実際にはこの他に気体の希薄性によるスリップ流の成分を考慮しなくてはならないが、ポアズイユ流と同じ性質を示すため、簡単のため

図2: 一次元潤滑問題

め本論文では省略する。

X 座標を ξ 座標に座標変換して、 ξ 座標を間隔1で等分割する。このような座標変換によって自由な格子分割が可能となる。したがって Q は

$$Q = -\frac{H^3 P}{X_\xi} \frac{dP}{d\xi} + \Lambda H P \quad \dots\dots\dots (2)$$

となる。ここで $X_\xi = dX/d\xi$ である。図3は ξ 座標系における格子分割であるが、連続した4点を考え、1, 2, 3, 4と番号を付ける。以下の節では2-3の区間の中点Iにおける流量 Q_I を各スキームを用いて表す。

2.1 ポアズイユ流とクエット流を分離して取り扱うスキーム ポアズイユ流の離散化については特に問題がないことが経験的に分かっている。したがって区間2-3内の圧力分布を線形近似して、式(2)右辺第1項のポアズイユ流の成分を求める。

$$\frac{H_I^3 P_I}{X_{\xi I}} (P_3 - P_2) \quad \dots\dots\dots (3)$$

ここで P_I はI点の圧力であり、 P_2 と P_3 の平均値とする。クエット流で用いる P_I の算出は重要である。本論文ではこの P_I の算出法について、両隣の格子点圧力に適当な重みをつけて算出する方法(重み付き上流化スキーム)と両隣以外の格子点圧力も用いた方法(多項式近似に基づくスキーム)について以下の節で示す。

2.1.1 重み付き上流化スキーム 既報⁽³⁾で提案した方法であるが、上流側の影響の程度を調節する重み c_1 を用いて

$$P_I = \frac{1+c_1}{2} P_2 + \frac{1-c_1}{2} P_3 \quad \dots\dots\dots (4)$$

と表わし、流量 Q_I を

$$Q_I = \left(\frac{H_I^3 P_I}{X_{\xi I}} + \Lambda H_I \frac{1+c_1}{2} \right) P_2 - \left(\frac{H_I^3 P_I}{X_{\xi I}} - \Lambda H_I \frac{1-c_1}{2} \right) P_3 \quad \dots\dots\dots (5)$$

で算出する方法である。既報⁽³⁾では重み c_1 を決定する方法として指数法と安定化法の2つの方法を提案している。

図3: 格子分割

指数法では区間2-3内のすきまを一定としI点におけるすきま H_1 に等しいと近似した段付き面近似を行う。さらにポアズイユ流の係数中の P を P_1 に等しいと近似し、流量連続の条件

$$dQ/dX = 0 \quad \dots\dots\dots (6)$$

を積分して求められる圧力分布

$$\left. \begin{aligned} P(\xi) &= P_2 + \frac{\exp(A_1\xi) - 1}{\exp(A_1) - 1}(P_3 - P_2) \\ A_1 &= \Lambda X_{\xi 1}/H_1^2 P_1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

を式(4)に等置して c_1 を決定する。

$$c_1 = \tanh(A_1/4) \quad \dots\dots\dots (8)$$

安定化法では式(5)の P_3 の係数が P_2 の係数と同符号になるように

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= \max(1 - 2\alpha_s/A_1, 0) \\ \alpha_s &= 0.87 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

としたものである。この P_3 の係数と P_2 の係数が同符号になることが、安定な計算のための条件である。

また、 $c_1 = 1$ とすると $P_1 = P_2$ となり、単純に上流側の格子点の圧力とする単純上流化スキームとなり、 $c_1 = 0$ とすると $P_1 = (P_2 + P_3)/2$ となり、2-3内の圧力分布を直線と近似した場合になる。

2.1.2 多項式近似に基づくスキーム 気体潤滑すきま内のポアズイユ流とクエット流の関係は、流体の運動を支配するナビエ・ストークス方程式の拡散項と移流項の関係によく似ている。そこで本節では流れ解析において移流項の離散化に適用され効果を挙げているスキームをクエット流の離散化に用いる。

QUICKスキーム⁽⁴⁾は P_1 の算出を上流側の3点(図3の1, 2, 3)の圧力 P_1, P_2, P_3 を用いた2次曲線補間で求める方法である。すなわち

$$P_1 = (-P_1 + 6P_2 + 3P_3)/8 \quad \dots\dots\dots (10)$$

である。

3次精度上流差分スキームの一つである河村・桑原スキーム⁽⁴⁾は点3における圧力勾配 $(dP/d\xi)_3$ を

$$\left(\frac{dP}{d\xi} \right)_3 = (P_1 - 8P_2 + 8P_4 - P_5)/12 + (P_1 - 4P_2 + 6P_3 - 4P_4 + P_5)/4 \quad \dots\dots (11)$$

と離散化するスキームである。ここで P_5 は図3の点4の右側の格子点5における圧力である。上式を変形すると

$$\begin{aligned} \left(\frac{dP}{d\xi} \right)_3 &= \{(-P_2 + 7P_3 + 7P_4 - P_5)/12 \\ &\quad + (-P_2 + 3P_3 - 3P_4 + P_5)/4\} \\ &\quad - \{(-P_1 + 7P_2 + 7P_3 - P_4)/12 \\ &\quad + (-P_1 + 3P_2 - 3P_3 + P_4)/4\} \quad \dots (12) \end{aligned}$$

とおける。したがって $\{ \}$ の値を格子点間の中点の圧力値と考えることができ、

$$\begin{aligned} P_1 &= (-P_1 + 7P_2 + 7P_3 - P_4)/12 \\ &\quad + (-P_1 + 3P_2 - 3P_3 + P_4)/4 \quad \dots\dots\dots (13) \end{aligned}$$

となる。

以上のQUICKスキームと河村・桑原スキームは上流側の影響を大きく見積もる高次の上流化スキームであるが、次に上流側の影響と下流側の影響を等しく評価する中心差分に属する方法を示す。4点の圧力(P_1, P_2, P_3, P_4)を用いた3次曲線で P_1 を算出するスキームを用いると

$$P_1 = (-P_1 + 9P_2 + 9P_3 - P_4)/16 \quad \dots\dots (14)$$

となる。I点の両隣の2点の圧力(P_2, P_3)を用いて直線近似して P_1 を算出するスキームを用いると

$$P_1 = (P_2 + P_3)/2 \quad \dots\dots\dots (15)$$

となる。この場合は前節の重み付き上流化スキームで $c_1 = 0$ とした場合と同じである。

QUICKスキームや河村・桑原スキームのように、I点をはさむ2点の圧力(P_2, P_3)以外の点の圧力(P_1, P_4)を用いるスキームは、軸端境界に適用することはできない。そこで軸端境界に対しては、2.1.1節の重み付き上流化スキームで $c_1 = 1$ とした単純上流化スキームを適用した。

2.2 ポアズイユ流とクエット流をまとめて取り扱うスキーム 前節のようにポアズイユ流とクエット流を分離して取り扱うと、2次元問題の複雑な軸受面形状に対して斜交座標系⁽⁵⁾を用いた場合でも適用可能である。しかし、直交座標系に限定すれば、ポアズイユ流とクエット流を分離せずにまとめて取り扱うことによって、さらに高精度の解法が可能となる。

すきまを一定とし、さらに式(1)中ポアズイユ流の係数中の P を一定とすると区間2-3内の圧力分布は式(7)で与えられる。式(7)で $\xi = 1/2$ とにおいてI点における圧力 P_1 を求め、さらに ξ に関して微分してI点における $(dP/d\xi)_1$ を求め、式(2)に代入して流量 Q_1 を求めると

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= \frac{H_1^3 P_1}{X_{el}} (c_2 P_2 + c_3 P_3) \\ c_2 &= A_1 \exp(A_1) / \{\exp(A_1) - 1\} \\ c_3 &= A_1 - c_2 \end{aligned} \right\} \cdots \cdots (16)$$

となる。ただし $A_1 \rightarrow 0$ の時は

$$c_2 = 1, \quad c_3 = -1 \quad \cdots \cdots (17)$$

である。このスキームは文献(6)中でナビエ・ストークス方程式の移流項と拡散項の離散化に対して示されている指数法に対応するが、2・1・1節の重み付き上流化スキームの指数法との混同を避けるため本論文では指数近似法と呼ぶことにする。また、この指数近似法は従来の気体潤滑の数値解析で用いられていた Exponential Approximation 法⁽⁷⁾に対応する方法である。

指数近似法では $\exp(A)$ の計算を多用するが、 $\exp(A)$ の計算は Cpu 時間を多く必要とし、効率的でない。そこで式(16)の c_2 を

$$c_2 = \max(1 + A_1/2, A_1) \quad \cdots \cdots (18)$$

と近似したハイブリッド法⁽⁶⁾、あるいは

$$c_2 = \max\{(1 - A_1/10)^5 + A_1, A_1\} \quad \cdots \cdots (19)$$

と近似したべき乗法⁽⁶⁾が用いられる。図4に指数近似法、ハイブリッド法、べき乗法の c_2 を示すが、特にべき乗法は指数近似法とほとんど違いがなく、計算結果もほぼ一致する。しかも、指数近似法に比べてハイブリッド法とべき乗法は Cpu 時間が60%~70%に短縮される。

3. 各スキームの比較

各スキームを比較するため、図5に示す2種類のスライダ軸受について計算を行った。タイプIはすきまの変化が穏やかなテーパフラットスライダ軸受の場合、

図4: P_2 の係数 c_2 の A_1 による変化
(1:指数近似法, 2:ハイブリッド法, 3:べき乗法)

合、タイプIIはすきまがステップ状に急変する段付きスライダ軸受の場合である。数値計算はDF法に基づく方法⁽⁵⁾によって行い、 y 方向に対称となるため半分のみの領域を取扱い、 x 方向の分割 $M_X = 20$ 、 y 方向の分割 $M_Y = 20$ とした。格子分割図もそれぞれ図6に示す。また、精度の基準として $M_X = 400$ 、 $M_Y = 50$ の場合の安定化法による結果を精密解として用いた。指数法でも精密解を求めたが、両者はほぼ一致した。以下の図では各スキームによる結果を次のような記号を付けて表した。

A : 精密解 ($M_X = 400, M_Y = 50$)	
U : 単純上流化スキーム	} 2・1・1節
B : 指数法	
S : 安定化法	
E : 指数近似法	} 2・2節
H : ハイブリッド法	
Q : QUICKスキーム	} 2・1・2節
K : 河村・桑原スキーム	
2 : 式(15)	
4 : 式(14)	

べき乗法は指数近似法とほぼ一致した結果となったので図には示していない。

図7にタイプIの場合の結果を示す。(a1), (b1)には $A = 100$ の場合の H, S, E, B, U, および Q, K, 2, 4 について示す。以下、(a2), (b2)には $A = 1000$ の場合、(a3), (b3)には $A = 10000$ の場合について示す。これらの

図5: スライダ軸受

図6: 格子分割図

図 7: タイプ I の場合の中心軸上の圧力分布

図 8: タイプ II の場合の中心軸上の圧力分布

図から次のことがわかる。 $A = 100$ の低い A 値では各スキームとも特に大きな違いはないが、流出端 ($X = 1$) 近くで B, U はやや低い圧力となるが、E, S はほとんど一致し精密解 (A) とよく一致する。 H はわずかではあるが流出端で圧力が高くなる。 (b1) の多項式に基づくスキームは、いずれもほんのわずかであるが流出端で圧力が発振しかかっている。 $A = 1000$ になると、2, 4 はフラット部全面で圧力が発振しており、Q, K も流出端近くで発振している。 また、Q, K, 4 は、テーパ部とフラット部の境界 ($X = 0.2$) で、圧力の鋭いピークを抑えようとする傾向が見られる。これは高次の多項式近似では鋭いピークを表し得ないためである。 H, S, E はテーパ部とフラット部の境界部で低い圧力となっているが、流出部ではよく精密解 (A) に一致している。 また、B, U は発振はしないものの全体的に低い圧力となり、精度が低下することが分かる。 $A = 10000$ になると、2, 4 は軸受全面で激しく発振し、Q, K は流出部で発振するが、それ以外の領域では最も A に近

い。 H, S, E, B, U は A とよく似た分布となるが、A に比べて低い圧力となる。特に、B, U が低い。

図8はタイプIIの場合の結果である。この場合はすきまが段差状に変化する部分で、圧力分布もギャップを持つように変化するため発振が起こりやすい例である。 $A = 100$ の場合は各スキームとも精密解に近い分布となるが、多項式近似に基づくスキーム (2, 4, Q, K) ではタイプIと同様に流出部で圧力の発振がわずかに見らる。 $A = 1000$ になると、H, S, E はほとんど一致し、精密解に最も近くなる。 B, U はほとんど一致し、H, S, E に近い分布となるが、段差部の上流側でわずかに異なる分布となる。 2, 4 は軸受全面で激しく発振し、特に流出部で激しく、Q, K は段差部と流出部で発振する。 $A = 10000$ になると H, S, E, B, U はほぼ一致し、A とよく一致するが、2, 4, Q, K はますます発振が激しくなる。

図9, 10は $A = 10000$ の場合について、分割数 M_X を40, 80と変えた場合で、図9がタイプI、図10がタイプ

図9: 分割数 M_X の影響 (タイプI)

図10: 分割数 M_X の影響 (タイプII)

IIの場合である。結果はA, U, S, Q, K, 2の場合について示した。

図9のタイプIの場合から次のことがわかる。従来一般的な計算手法である2について見ると、 M_X が大きくなるにつれて圧力の振動は小さくなるものの、 $M_X = 80$ になっても流出端で激しく振動している。Q, Kについては、 $M_X = 40$ および $M_X = 80$ の時に精密解Aにほとんど一致しているが、流出端の極く近傍で振動している。Sは $M_X = 40$ の場合はAよりわずかに低い圧力分布であるが、 $M_X = 80$ になるとほぼAに一致する。Uは $M_X = 80$ になってもAより低い圧力分布のままで精度の点で問題があることがわかる。

図10のタイプIIの場合から、2は $M_X = 80$ になっても軸受面全体で激しく振動すること、Q, KはAによく一致するものの段差部および流出端で振動すること、S, UはAによく一致することがわかる。また、図9, 10から、細分割してQやKのような高精度の上流化スキームを用いても圧力の振動をなくすのは容易ではないことがわかる。

5. ま と め

高 A 領域における気体潤滑レイノルズ方程式の数値解析を、いくつかのスキームを用いて行った。その結果、各スキームは次の4つのグループに分類された。

1. QUICKスキーム, 河村・桑原スキーム

高次の上流化スキームで、流れ解析では効果を挙げているスキームではあるが、高 A 領域になると流出端や段差を有する部分で圧力分布が振動するため、潤滑問題には適さない。しかし、振動しない場合には高精度である。

2. 中心差分スキーム

上流側と下流側の両方の影響を均等に考慮した中心差分スキームは圧力が激しく振動し、高 A 領域の潤滑問題には適さない。

3. 指数近似法, べき乗法, ハイブリッド法, 安定化法

ポアズイユ流とクエット流をまとめて取り扱うスキームである指数近似法・べき乗法・ハイブリッド法(2.2節)と重み付き上流化スキームの安定化法(2.1.1節)はほぼ一致した結果となり、圧力の発振もなく最も精密解に近い結果となり、高 A 領域レイノルズ方程式に適している。

4. 単純上流化法, 指数法

圧力の発振がなく、解法としては安定であるが、3のグループと比べると精度がやや低下する。

以上より、3のグループの指数近似法、べき乗法、ハイブリッド法、安定化法が気体潤滑レイノルズ方程式には最も適していることが分かった。しかし、以上の検討は直交座標系について行ったものであり、指数近似法、べき乗法、ハイブリッド法は斜交座標系には適用できないことを考慮すると、はん用性の点から安定化法が最もよいと考えられる。

文 献

- (1) 金子・三矢, 潤滑流れの数値解析, ターボ機械, 13-11, (1985), 664.
- (2) 川端, 高 A 領域の気体潤滑レイノルズ方程式の数値計算, 機論, 52-484, C (1986), 3277.
- (3) 川端・葦埜・立花・藤田, 高 A 領域の気体潤滑レイノルズ方程式の数値計算(第2報, 上流化スキームの高精度化), 機論, 54-504, C (1988), 1811.
- (4) 日本機械学会編, 流れの数値シミュレーション, (1988), 70, コロナ社.
- (5) 川端, 境界適合座標系を用いた潤滑流れ計算のはん用化に関する研究(第2報, 定常気体潤滑の場合), 機論, 54-499, C (1988), 712.
- (6) Patankar, S.V., 水谷・香月訳, コンピューターによる熱移動と流れの数値解析, (1985), 82, 森北出版.
- (7) 金子, 流体潤滑の数値計算における離散値化手法, 潤滑, 29-9, (1984), 633.