ダンパとばねで連結された並列構造物の制振法*

岩 浪 孝 一^{*1}, 鈴 木 浩 平^{*2}, 背 戸 一 登^{*3}

Vibration Control Method of Parallel Structures Connected to Each Other with Damper and Spring

Kouichi IWANAMI, Kouhei SUZUKI and Kazuto SETO

The purpose of this study is to analyze a simultaneous vibration control method of structures. The analyses are performed under the following assumptions, that is, each structure is composed of a mass and a spring and vibrates in a one-degree-of freedom mode, and vibrating input is applied to the base of the structures. Here, the vibration model is composed of two structures which are connected to each other by one damper and one spring in parallel. From the analyses, it was clarified that the theory of P, Q is useful as a method of the optimal adjustment this vibration control model. In addition, the optimum design procedure is described, optimum values of tuning and damping parameters of this model are specified in graphical forms, and the effectiveness of this method is shown to be considerably greater than that of the method connecting two structures by only a damper, in reducing the transmissibility during resonance.

Key Words: Damping, Vibration Control, Dynamic Absorber, Parallel Structures, Optimum Design

1. 結 論

機械およびその支持構造物系、家屋などの建造物や各種の塔状構造物等が基礎部分から強制励振を受ける場合、これら構造物の固有振動数付近における共振振動を制振する方法の一つとして、能動形、受動形を含めた各種の動吸振器を制振対象ごとに独立に付加する制振手法が広く行われている^{(1)~(3)}。

一方、著者らは既報⁽⁴⁾において構造物が並列に複数近接して存在する場合に、これらを減衰要素でたがい連結し、構造物の相互の動きを利用して全体として共振振動を低く抑える「連結ダンパ法」⁽⁵⁾を提案した。さらに構造物が2個および3個の場合において、連結要素にダンパのみを使用したときの最適調整に P, T, Q 定点理論が適用できることを示した。

構造物をダンパのみで連結した場合、定点理論に基づく最適調整状態は厳密な意味では1種類のみ定まる。これに対し、実際に「連結ダンパ法」を利用して構造物を設計する上では、仕様の多様化に対応させるた

めに連結要素の中に調整可能な要素を設定してあるほうが都合がよい。

本研究では、このような調整要素としてばね要素を取り入れ、ダンパと並列にばねを配置した連結要素を使用した場合について解析を行った。調整を行うにあたり、定点理論を応用することによって最適調整が可能となることを示し、さらに数値計算を行って求めた最適な変位振幅比曲線をもとに、最適調整値を推算できる設計資料を図表として示した。

2. 並列な2個の構造物の制振
(ダンパのみで連結した場合)

図1に示すような並列に存在する2個の独立な構造物を、減衰要素としてダンパのみで連結した場合の最適調整法および調整条件については P, Q 定点理論を応用することにより求められる⁽⁴⁾。

すなわち、土台部の強制変位振幅 U に対する構造物質量の変位振幅 X_1, X_2 の比はそれぞれ次の式で表される。

$$|X_1/U| = \left[\frac{[1 - (\omega/\omega_2)^2]^2 + [2\zeta(\omega/\omega_2)\{1 + \mu(\omega_2/\omega_1)^2\}]^2}{\Delta} \right]^{1/2} \dots\dots (1)$$

$$|X_2/U| = \left[\frac{[1 - (\omega/\omega_1)^2]^2 + [2\zeta(\omega/\omega_2)\{1 + \mu(\omega_2/\omega_1)^2\}]^2}{\Delta} \right]^{1/2} \dots\dots (2)$$

* 原稿受付 平成5年3月19日。

^{*1} 正員、東京都立工業高等専門学校 (〒140 東京都品川区東大井 1-10-40)。^{*2} 正員、東京都立大学工学部 (〒192-03 八王子市南大沢 1-1)。^{*3} 正員、防衛大学校 (〒239 横須賀市走水 1-10-20)。

図 1 ダンパのみで連結した場合の並列構造物振動モデル

$$\Delta = \{(\omega/\omega_1)^2 - 1\}^2 \{(\omega/\omega_2)^2 - 1\}^2 + [2\zeta(\omega/\omega_2)\{-(1+\mu)(\omega/\omega_1)^2 + \{1 + \mu(\omega_2/\omega_1)^2\}\}]^2$$

ただし、

$$\begin{aligned} \text{質量比} &: \mu = m_2/m_1 \\ \text{減衰率} &: \zeta = c/2\sqrt{m_2 k_2} \\ \text{固有振動数比} &: \gamma = \omega_2/\omega_1 \\ \text{固有振動数} &: \omega_1 = \sqrt{k_1/m_1} \\ &: \omega_2 = \sqrt{k_2/m_2} \end{aligned}$$

最適調整条件を P, Q 定点理論により求めると、
(最適調整条件)

(I) P, Q 点の高さを等しくする。

(II) 変位振幅比 $|X_1/U|$, $|X_2/U|$ の曲線がそれぞれ P, Q 点において極大値をもつようにする。
の条件を満たすようにすればよい。

すなわち (I) の条件を満たす最適な固有振動数比 γ は次式で与えられる。

$$\gamma_{\text{opt}} = 1/\mu \quad \dots\dots\dots (3)$$

また (II) の条件を満たす最適な減衰率 ζ_{opt} は次式で与えられる ζ_p または ζ_q となる。これは P, Q 点で同時に極大とならないため、二つの調整値が存在する。

$$A_P \zeta_p^4 + B_P \zeta_p^3 + C_P = 0 \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$A_P = 64\mu(\mu+1)^6(1-\mu)$$

$$B_P = 8(\mu+1)^3(-4\mu^6 + 12\mu^5 - 9\mu^4 - 4\mu^3 + 6\mu^2 - 1)$$

$$C_P = 16\mu^9 - 48\mu^8 + 24\mu^7 + 48\mu^6 - 39\mu^5 - 21\mu^4 + 18\mu^3 + 6\mu^2 - 3\mu - 1$$

または

$$A_Q \zeta_q^4 + B_Q \zeta_q^3 + C_Q = 0 \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$A_Q = 64\mu(\mu+1)^6(\mu-1)$$

$$B_Q = 8(\mu+1)^3(-\mu^6 + 6\mu^4 - 4\mu^3 - 9\mu^2 + 12\mu - 4)$$

$$C_Q = -\mu^9 - 3\mu^8 + 6\mu^7 + 18\mu^6 - 21\mu^5 - 39\mu^4 + 48\mu^3 + 24\mu^2 - 48\mu + 16$$

図 2 最適調整されたときの変位振幅比曲線
(ダンパのみで連結した場合)

図 3 最適設計図表(ダンパのみで連結した場合)

調整条件 (I) (II) を満足した最適調整時の最大変位振幅比 $|X/U|_{\text{max}}$ の値は次式で与えられる。

$$\left| \frac{X_1}{U} \right|_{\omega=\omega_P} = \left| \frac{X_2}{U} \right|_{\omega=\omega_Q} = \frac{1+\mu}{1-\mu} \quad \dots\dots\dots (6)$$

最適調整状態における構造物の変位振幅比曲線の例を図 2 に示す。P, Q 点の高さは等しく調整されている。また X_1 , X_2 の曲線とともにそれぞれ P, Q 点を通り、同時に P, Q 点のごく近傍で極大値をもっており、最適状態に制振されている。図 3 には、以上の解析結果を基に、実際の構造物の制振設計に便宜をはかれるように最適設計図表を示す。なお、 ζ は ζ_p と ζ_q の平均値で示した。

ダンパのみで連結した場合、図 3 よりわかるように、二つの構造物の質量の値が近くなるに従って ($\mu \rightarrow 1$) 制振効果は大きく減少する傾向が見られる。これによ

りこの手法は構造物の質量に差がある場合に有効であるものと考えられる。

3. 並列な2個の構造物の制振 (ダンパとばねを並列に配置して 連結した場合)

並列構造物をダンパのみで連結した場合、最適調整値は一組の構造物に対して厳密には一種類のみ存在するため、構造物の設計に当たって自由度が少なく不便な面がある。そこで連結減衰要素にばね要素を並列に配置して用いた場合について解析を行い、その有用性および最適調整法について検討を行う。

3・1 振動モデルと解析基礎式 図4は並列して存在する2個の構造物をダンパとばねを並列に配置した要素で連結した時の振動モデルを示す。土台部に水平方向に強制変位入力が入力し、構造物が質量とばね要素のみで近似できる集中定数系1自由度モデルで表されると仮定すると、力学モデルは図5で示され、運動方程式は次式で表せる。

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= k_1(u - x_1) + k(x_2 - x_1) \\ &\quad + c(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \\ m_2 \ddot{x}_2 &= k_2(u - x_2) + k(x_1 - x_2) \\ &\quad + c(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) \end{aligned} \quad (7)$$

系が調和振動するものと仮定し、 $x_1 = X_1 e^{j\omega t}$ 、 $x_2 = X_2 e^{j\omega t}$ 、 $u = U e^{j\omega t}$ と表し、基礎の強制変位振幅 U に対する構造物質量の変位振幅 X_1 、 X_2 の比を求めると次式になる。

$$\left| \frac{X_1}{U} \right| = \sqrt{\frac{C^2 + D^2}{A^2 + B^2}} \quad (8)$$

$$\left| \frac{X_2}{U} \right| = \sqrt{\frac{E^2 + F^2}{A^2 + B^2}} \quad (9)$$

ただし

$$A = \{1 + n - (\omega/\omega_1)^2\} \{1 - (\omega/\omega_2)^2\}$$

$$+ (n/\mu) \{(\omega_1/\omega_2)^2 - (\omega/\omega_2)^2\}$$

$$B = 2\zeta(\omega/\omega_2) \{1 + \mu(\omega_2/\omega_1)^2$$

$$- (1 + \mu)(\omega/\omega_1)^2\}$$

$$C = 1 - (\omega/\omega_2)^2 + (\omega_1/\omega_2)^2 (n/\mu) + n$$

$$D = 2\zeta(\omega/\omega_2) \{1 + \mu(\omega_2/\omega_1)^2$$

$$E = 1 - (\omega/\omega_1)^2 + (\omega_1/\omega_2)^2 (n/\mu) + n$$

$$F = 2\zeta(\omega/\omega_2) \{1 + \mu(\omega_2/\omega_1)^2$$

ここで、

$$\text{質量比} \quad : \mu = m_2/m_1$$

$$\text{減衰率} \quad : \zeta = c/2\sqrt{m_2 k_2}$$

$$\text{固有振動数比} \quad : \gamma = \omega_2/\omega_1$$

$$\text{固有振動数} \quad : \omega_1 = \sqrt{k_1/m_1}$$

$$// \quad : \omega_2 = \sqrt{k_2/m_2}$$

$$\text{ばね定数比} \quad : n = k/k_1$$

3・2 最適調整 はじめに、図4に示す構造物の最適調整を行うに当たり、定点理論の適用が可能かどうか検討する。

式(8)、(9)において $\zeta=0$ とすると次式が得られる。

$$\left| \frac{X_1}{U} \right| = [\omega_2^2 \{1 + n - (\omega/\omega_2)^2\} + (n/\mu)\omega_1^2] / G \quad (10)$$

$$\left| \frac{X_2}{U} \right| = [\omega_2^2 \{1 + n - (\omega/\omega_1)^2\} + (n/\mu)\omega_1^2] / G \quad (11)$$

$$G = (\omega_2^2 - \omega^2) \{1 + n - (\omega/\omega_1)^2\} + (n/\mu)(\omega_1^2 - \omega^2)$$

次に $\zeta=\infty$ とおくと

$$\left| \frac{X_1}{U} \right| = \left| \frac{X_2}{U} \right| = \frac{\omega_a^2}{\omega_a^2 - \omega^2} \quad (12)$$

ただし

$$\omega_a = \omega_1 \sqrt{\{1 + \mu(\omega_2/\omega_1)^2\} / (1 + \mu)}$$

式(10)～(12)の特性式を図に示すと図6になる。曲線群の交点六つのうち図中に示す二つの交点をP、Q点と設定する。

ここで減衰率 ζ を $0 \sim \infty$ まで変化させると X_1 の曲線は ζ の値にかかわらず常にP点を通り、同様に X_2 の曲線は常にQ点を通ることが明らかになった。すなわちこの二つの交点P、Qは減衰率 ζ に無関係な定点であり、最適調整に利用できることがわかった。これによって最適調整条件は定点理論を適用して次の

図4 ダンパとばねで連結した場合の振動モデル

図5 力学モデル

ように定めればよい。

(最適調整条件)

(I) 定点P, Qの高さを等しく設定する。

(II) 変位振幅比 $|X_1/U|$, $|X_2/U|$ の曲線がそれぞれP, Q点で極大値をもつように設定する。

実際の解析において、(I)(II)の条件を満足する条件式は、ダンパのみで連結した場合の最適値を求める式(3)~(6)のように質量比 μ のみの関数ではなく、ばね定数比 n も変数となり複雑な式になる。そこで次に述べる手順に従って最適な固有振動数比 γ 、減衰率 ζ 、ばね定数比 n の値を求めた。調整にあたり、はじめに μ を設定する。次に $\zeta=0$, $\zeta=\infty$ のときの特性式(10)~(12)における γ , n の値を変化させ、数値計算によりP, Q点の高さを求め、これを繰返すことによりP, Q点の高さが等しくなる最適な γ と n の値を求める。さらに X_1 , X_2 の変位振幅比を示す式(8), (9)にこの最適な γ と n の値を代入した状態で ζ を変化させ、P, Q点でそれぞれの変位振幅比曲線が極大値をもつような最適な ζ の値を求める。ここで、今回の最適調整図表の作成にあたり、P, Q点の高さの差ならびにP, Q点と極大点の高さの差は3%以内になるように調整した。

図7は、最適調整された変位振幅比曲線の例で、質量比 $\mu=0.5$ の場合を示す。

3.3 解析結果 まず連結要素としてダンパとばねを並列に使用した場合の固有振動数比 γ およびばね定数比 n の値の変化が調整に及ぼす影響について考察する。なお、質量比は図7に合せ $\mu=0.5$ の時の例で示す。

(1) ばね定数比 n の変化による影響 図7, 8は固有振動数比が $\gamma=4$ のときの例を示す。図7では $n=0.8$, 図8では $n=2$ と設定した場合で、P, Q点を定める3本の特性曲線の変化を調べると、中央の $\zeta=\infty$ の曲線の位置は式(12)に n を含まないため変化し

ないが、 $\zeta=0$ のときの X_1 , X_2 の曲線の共振点は、 n が $2 \rightarrow 0.8$ と小さくなるに従って横軸の強制振動数の低域側に移動する傾向が見られる。すなわちP点の高さを低く、Q点の高さを高めに移動させる操作に利用できる。

(2) 固有振動数比 γ の変化による影響 図9と10のばね定数比は $n=0.1$ とした。図9は $\gamma=3.5$, 図10は $\gamma=2$ の場合を示す。 γ を $3.5 \rightarrow 2$ に変化させると $\zeta=\infty$ のときの X_2 の曲線の共振点は横軸の強制振

図7 最適調整されたときの変位振幅比曲線

図8 ばね定数比 n の変化($n=0.8 \rightarrow 2$)によるP, Q点への影響(図7と比較)

図6 最適調整に利用する特性定点P, Q

図9 固有振動数比 γ の変化によるP, Q点への影響(図10と比較)

動数の低域側に移動し、 X_1 の曲線の共振点は高域側に移動する傾向がみられ、P、Q点の高さを高めに移動させるのに利用できる。

このように、 γ 、 n の変化に対し、以上で述べたような傾向が見られるが、この傾向はあくまでも3本の特性曲線の共振点があり分散せず、近接している範囲でいえる傾向で、全体としてはかなり複雑な変化をする。

なお、並列横造物に「連結ダンパ法」を適用した場合、土台部に強制励振が作用する条件のもとでは、当然のことながら、2個の構造物の固有振動数が等しい($\gamma=1$)時には最適調整は不可能となる。

次に、質量比 μ を変化させ、数値解析によって図7に示すような最適調整曲線をそれぞれ求め、得られた調整値をまとめて最適調整図表としたものを図11～

図 10 固有振動数比 γ の変化($\gamma=3.5 \rightarrow 2$)による P、Q 点への影響(図9と比較)

図 11 固有振動数比 γ の最適調整図表

13に示す。横軸に質量比 μ をとり、図11に最適な固有振動数比 γ 、図12に最適な減衰率 ζ を示し、図13にこのときに得られる最大変位振幅比 $|X/U|$ の値をばね定数比 n をパラメータとして示した。

図13に示す最適調整時の最大変位振幅比の値を見ると、破線で示してあるダンパのみで連結した場合と比べ、ダンパとばねを並列に組合せることによって制振効果を大幅に高めることが可能となり、この傾向は質量比が1に近いほど顕著であることが明らかになった。また、ばね定数比 n の値を大きくすることによっ

図 12 減衰率 ζ の最適調整図表

図 13 最適調整されたときの最大変位振幅比の値

て変位振幅比をより低く調整することが可能であることもわかった。さらに、ダンパのみで結合した場合は最適調整が不可能であった $\mu=1$ のときでも最適調整が可能となり、振幅比をかなり低くできる利点がある。このことは、実際に「連結ダンパ法」を適用して制振しようとする構造物等では、これらが同じような構造をしている場合が多いことから有利な点となる。以上に示したようにダンパとばねを並列にして連結する手法は、構造物の設計も行いやすくなり、しかも有効な制振手法であると考えられる。

しかしながら、ここで注意しなければならない点は、 n の値を大きくするに従って 3 本の特性曲線の共振点は広く分散し、P, Q 点の高さは等しく調整できたとしても、 X_1 , X_2 の振幅比曲線の極大点が P, Q 点で同時に一致しなくなる傾向が強まり、最適な調整状態とはみなせなくなる。同様にこの傾向は質量比が 1 に近くなるに従ってさらに大きくなるため、 n の値および μ をむやみに大きくすることには注意を必要とする。

4. 結 論

並列な複数の構造物が近接して存在し、これらの土台基礎部分に地震動のような水平な強制振動が作用する場合の制振方法の一つとして、減衰効果をもつ連結要素で構造物同士を結合して制振する手法を取り上げ、一例として 2 個の構造物の場合にこれを適用して解析した結果、次のような結論が得られた。

(1) 2 個の並列構造物をダンパとばねを並列に複合させた連結要素で結合した場合の最適調整法に、P,

Q 定点理論が適用できることを示した。

(2) 数値解析の結果をまとめ、最適調整値を図表として示した。

(3) ダンパのみで結合した場合、構造物の質量が等しいときは最適調整が不可能である。また、等しくなくとも近い値のときは、調整が可能であっても高い制振効果が期待できず、しかも最適な調整値が一組のみのため設計上不便である。これに対し、ダンパとばねを並列に配置した要素で連結する方法を採用すると、次のような効果が期待できることが明らかになった。

(a) 2 個の構造物の質量が等しい場合 ($\mu=1$) でも最適調整が可能となる。

(b) 連結要素に使用するばね定数の値を変化させることによって制振効果をかなり広い範囲で任意に設定することが可能となる。

(c) ダンパのみで連結する場合よりも制振効果を高めることが可能となる。

終りに、本研究の解析にあたり都立工業高専の卒研生である中代、成田君等の協力をいただいた。ここに謝意を示す。

文 献

- (1) Ormondroyd, J. and Den Hartog, J. P., *Trans ASME*, Vol. 50 (1928), A 9-A 22.
- (2) 岩浪・背戸, 機論, 50-449, C (1984), 44.
- (3) 川島, 機論, 58-548, C (1992), 1024.
- (4) 岩浪・鈴木・背戸, 機論, 52-484, C (1986), 3063.
- (5) 国枝, 機誌, 79-689 (1976), 89.